

Die Aufgaben der 2. Runde 2022

Aufgabe 1

Bestimme alle Quadrupel (a, b, c, d) positiver reeller Zahlen, die die beiden folgenden Gleichungen erfüllen:

$$ab + cd = 8, \quad (1)$$

$$abcd = 8 + a + b + c + d. \quad (2)$$

Aufgabe 2

Auf dem Tisch liegen 2022 Streichhölzer und ein handelsüblicher Spielwürfel, bei dem die Augenzahl a oben liegt. Nun spielen Max und Moritz folgendes Spiel:

Sie nehmen abwechselnd nach folgender Regel Streichhölzer weg, wobei Max beginnt: Wer am Zug ist, kippt den Würfel über eine Kante seiner Wahl und nimmt dann genau so viele Streichhölzer weg, wie die nun oben liegende Seite des Würfels anzeigt. Wer keinen regelgerechten Zug mehr ausführen kann, hat verloren.

Für welche a kann Moritz erzwingen, dass Max verliert?

Anmerkung: Die Richtigkeit der Antwort ist zu begründen.

Hinweis: Auf den Seiten eines handelsüblichen Würfels stehen die Augenzahlen 1 bis 6, wobei die Summe der Augenzahlen auf gegenüber liegenden Seiten stets 7 beträgt.

Aufgabe 3

Im spitzwinkligen Dreieck ABC mit $AC < BC$ seien m_a und m_b die Mittelsenkrechten auf den Seiten BC bzw. AC , ferner M_c der Mittelpunkt der Seite AB . Die Seitenhalbierende CM_c schneide m_a im Punkt S_a und m_b im Punkt S_b ; die Geraden AS_b und BS_a schneiden sich im Punkt K .

Beweise: $\angle ACM_c = \angle KCB$.

Aufgabe 4

In der Ebene seien einige Punkte rot und einige blau gefärbt. Der Abstand zwischen zwei verschiedenen gefärbten Punkten ist immer höchstens 1.

Beweise: Es gibt einen Kreis mit Durchmesser $\sqrt{2}$ derart, dass außerhalb dieses Kreises keine zwei verschieden gefärbte Punkte liegen.

Bitte die Teilnahmebedingungen und wichtigen Hinweise auf der Rückseite beachten!

Teilnahmebedingungen und Hinweise im Überblick

Generelles

■ Die von der Korrekturkommission getroffene Preisentscheidung ist endgültig ("Schiedsrichterentscheidung"). Der Rechtsweg ist ausgeschlossen.

Teilnahmebedingungen

■ **Selbstständigkeitsverpflichtung:** Die auf dem Teilnahmecoupon abgedruckte **Selbstständigkeitserklärung** muss von Ihnen unterschrieben sein. Die Verpflichtung zur Selbstständigkeit gilt in der zweiten Runde für alle Teilnehmenden ausnahmslos. Nicht erst bei der Ausformulierung der Lösungen, sondern auch schon bei der Lösungsfindung ist eine Diskussion über mögliche Lösungswege oder eine Zusammenarbeit mit anderen Personen nicht gestattet. Ein begründeter Verdacht auf Verstoß gegen die Selbstständigkeitsverpflichtung führt zum Ausschluss vom Wettbewerb.

■ **Vertraulichkeit:** Die Aufgabenstellungen sind während der Bearbeitungszeit als vertraulich zu behandeln. Vor dem Einsendeschluss ist also eine Weitergabe, z. B. auch über elektronische Medien, nicht zulässig.

■ **Einsendeschluss: 1. September 2022** (Datum des Poststempels). Verspätet abgesendete Arbeiten können nicht in das Korrekturverfahren einbezogen werden.

Die Teilnehmerarbeiten müssen nicht nur fristgerecht abgeschickt werden, sondern auch spätestens **5 Tage nach Einsendeschluss** in der Geschäftsstelle des Wettbewerbs eingegangen sein. Dann beginnt das Korrekturverfahren, in das nachträglich leider keine Arbeiten mehr einbezogen werden können.

Hinweise zur Lösungsdarstellung

■ Die Beurteilung der Arbeit durch die Korrekturkommission in der zweiten Runde ist besonders streng. Neben der mathematischen Richtigkeit und Vollständigkeit spielen auch Klarheit, Verständlichkeit und Schlüssigkeit der Darstellung bei der Bewertung eine wichtige Rolle. Eine glatte Korrektur der Arbeit soll ohne Anfertigung zusätzlicher Skizzen und ohne Ergänzen von Umformungsschritten möglich sein.

■ Das erste Blatt der Arbeit soll die Angabe der von Ihnen benutzten Hilfsmittel (Literatur, IMO–Training etc.) enthalten. Allerdings ersetzt bei der Verwendung von Formeln bzw. Sätzen, die im Schulbereich nicht geläufig sind, eine solche Erwähnung einen Nachweis nicht.

■ Die Verwendung eines Computers oder eines Taschenrechners ist als Hilfsmittel zur Ideenfindung bzw. Rechenkontrolle zulässig. Für den jeweiligen Nachweis müssen jedoch die wesentlichen Schritte und Resultate ohne diese Hilfsmittel nachvollziehbar und überprüfbar sein.

Technische Hinweise

■ Die Bearbeitungen sollen in der gleichen Form wie in der ersten Runde (also insbesondere Format DIN A4 im DIN C4–Umschlag, 5 cm breiter unbeschriebener Rand, Blätter fortlaufend durchnummeriert, Name oben rechts auf jedem Blatt) eingereicht werden. Achten Sie bitte auf gute Lesbarkeit. Ihre Arbeit sollte maschinengeschrieben sein.

■ Bitte kleben Sie den beiliegenden *Adresscoupon* oben links auf die Rückseite des Umschlags. Legen Sie den Teilnahmecoupon bitte ausgefüllt in den Umschlag. Sollten Angaben auf den Coupons falsch sein oder fehlen, korrigieren bzw. ergänzen Sie diese bitte.

■ Lesen Sie die beiliegende Datenschutzzinformation gründlich durch. Bitte unterschreiben Sie die für die Teilnahme notwendige *Einwilligung Datenschutz* und legen sie Ihrer Arbeit ebenfalls bei.

Senden Sie Ihre Bearbeitungen bitte ausreichend frankiert an:

Bundeswettbewerb Mathematik
Bildung & Begabung gemeinnützige GmbH
Kortrijker Str. 1 ■ 53177 Bonn

Telefon: (0228) 959 15-20
info@bundeswettbewerb-mathematik.de
www.bundeswettbewerb-mathematik.de



Einsendungen auf elektronischem Wege sind nicht möglich.