BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK
Bildung & Begabung

Aufgaben und Lösungen

1. Runde 2024

Vorläufige Fassung für die Homepage

Ergänzungen sowie Hinweise auf Fehler in diesen Lösungsbeispielen
sind ausdrücklich erwünscht unter
info@mathe-wettbewerbe.de

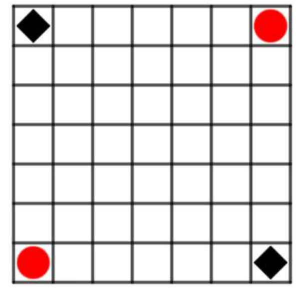
» **KORREKTURKOMMISSION | KARL FEGERT**

» **BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK**
Kortrijker Straße 1, 53177 Bonn | Postfach 20 02 01, 53132 Bonn | Tel.: (02 28) 9 59 15-20, Fax: (02 28) 9 59 15-29
info@mathe-wettbewerbe.de, www.mathe-wettbewerbe.de

Stand: 20.03.2024

GEFÖRDERT VOM
Bundesministerium für Bildung und Forschung
STIFTERVERBAND
KULTUSMINISTER KONFERENZ

Aufgabe 1: Arthur und Renate spielen auf einem quadratischen Spielbrett, das in 7x7 Spielfelder unterteilt ist. Arthur hat zwei rote Steine, die anfangs im linken unteren und rechten oberen Eckfeld liegen, Renate hat zwei schwarze Steine, die anfangs im linken oberen und rechten unteren Eckfeld liegen. Wer am Zug ist, wählt einen seiner beiden Spielsteine und bewegt ihn in ein waagrecht oder senkrecht benachbartes freies Feld. Arthur und Renate ziehen abwechselnd, Arthur beginnt. Arthur hat gewonnen, wenn seine beiden Steine nach endlich vielen Zügen in waagrecht oder senkrecht benachbarten Feldern liegen.



Kann Renate dies durch geschicktes Ziehen verhindern?

Anmerkung: Die Richtigkeit der Antwort ist zu beweisen.

Antwort: Renate kann durch geschicktes Ziehen einen Gewinn von Arthur verhindern.

Bezeichnungen: Die Spalten und Zeilen nummerieren wir von links nach rechts bzw. von oben nach unten mit −3, −2, ... , +3, hierdurch ergibt sich eine Bezeichnung der Felder mit Koordinaten.

Die beiden Steine von Renate bezeichnen wir mit R_1 und R_2, zu Beginn liegt R_1 auf (−3|3) und R_2 auf (3|−3). Die Steine von Arthur bezeichnen wir mit A_1 und A_2, zu Beginn liegt A_1 auf (3|3) und A_2 auf (−3|−3).

Mit *Gewinnposition* bezeichnen wir eine Situation, bei der die Steine von Arthur in waagrecht oder senkrecht benachbarten Feldern liegen.

1. Beweis (Angabe einer Strategie): "Erhalte das Rechteck".

Renate kann den Sieg mit folgender Strategie verhindern:

Wenn Arthur seinen Stein entlang einer Spalte verschiebt, schiebe deinen Stein, der in der gleichen Zeile lag, in die gleiche Richtung, sodass er wieder in der gleichen Zeile wie Arthurs Stein liegt; wenn Arthur entlang einer Zeile verschiebt, schiebe deinen Stein, der in der gleichen Spalte lag, in die gleiche Richtung, sodass er wieder in der gleichen Spalte wie Arthurs Stein liegt.

Begründung: Die Ausgangsstellung hat (unter anderen) folgende Eigenschaften: Die Steine von Arthur und Renate liegen jeweils auf den diagonal gegenüber liegenden Ecken eines Rechtecks, dessen Kanten parallel zu einem der beiden Spielfeldränder sind. Insbesondere liegen Arthurs Steine nicht in der gleichen Zeile und auch nicht in der gleichen Spalte. Insbesondere liegen sie auch nicht in unmittelbar nebeneinander liegenden Feldern, d.h. Arthur hat in einer Stellung mit diesen Eigenschaften nicht gewonnen.

Eine weitere Eigenschaft ist, dass Renate für jeden Stein von Arthur einen ihrer Steine in der gleichen Zeile hat und den anderen in der gleichen Spalte. Deswegen kann Arthur auch nicht so ziehen, dass seine Steine in direkt nebeneinander liegende Felder gelangen, und Renate kann nach einem Zug von Arthur stets wieder nach oben beschriebener Strategie ziehen; dabei spielt auch eine Rolle, dass das Spielfeld selbst rechteckig ist. Sie erreicht so stets wieder eine Stellung mit den genannten Eigenschaften der Ausgangsstellung, insbesondere eine, in der Arthur nicht gewonnen hat.

Variante, ausführlicher, formaler: Eine ReA−*Position* (Re für Rechteck, A für Arthur ist am Zug) definieren wir folgendermaßen: Arthur ist am Zug, und die vier Spielsteine liegen auf den Ecken eines Rechtecks, dessen Seiten parallel zu den Rändern des Spielfeldes sind, und auf diagonal gegenüber liegenden Ecken liegen Steine der gleichen Person, d.h. A_1 und A_2 liegen nicht in der gleichen Zeile und nicht in der gleichen Spalte, der Stein R_1 liegt in der gleichen Zeile wie A_1 und in der gleichen Spalte wie A_2, der Stein R_2 liegt in der gleichen Zeile wie A_2 und in der gleichen Spalte wie A_1.

Wir werden zeigen:

a) Eine ReA−Position ist niemals Gewinnposition.

b) Aus einer ReA−Position kann Arthur nicht in eine Gewinnposition ziehen und

c) Renate kann nach jedem Zug von Arthur, den er aus einer ReA−Position macht, mit ihrem darauf folgenden Zug wieder eine ReA−Position herstellen.

Da zu Beginn offensichtlich eine ReA−Position vorliegt, folgt hieraus sofort, dass Renate einen Gewinn von Arthur verhindern kann.

zu a): Nach Definition liegen in einer ReA−Position die Steine von Arthur nicht in der gleichen Zeile und nicht in der gleichen Spalte, also nicht in zwei waagrecht oder senkrecht benachbarten Feldern.

zu b): Arthur kann mit seinem Zug nur ein waagrecht oder senkrecht benachbartes Feld erreichen. Anders ausgedrückt: Entweder bleibt Arthur mit seinem Stein in der gleichen Zeile und verlässt seine Spalte oder er bleibt in der gleichen Spalte und verlässt seine Zeile. Da er aus einer ReA−Position zieht, kann er dabei nicht in die Zeile oder Spalte seines anderen Steines ziehen, da dort ein Stein von Renate steht. Das wäre aber notwendig, wenn er eine Gewinnposition erreichen möchte.

zu c) Wenn Arthur aus einer ReA−Position gezogen hat, bleibt ein Stein von Renate in der gleichen Zeile bzw. Spalte. Nun kann Renate ihren anderen Stein in die neue Spalte bzw. Zeile ziehen und stellt damit die ReA−Position wieder her. Dieser Zug ist offensichtlich immer möglich, dabei spielt auch eine Rolle, dass das Spielfeld rechteckig ist.

2. Beweis (Angabe einer Strategie): "Erhalte die Achsensymmetrie"

Die Ausgangsstellung hat (unter anderen) folgende Eigenschaften: Es gibt eine zum rechten Rand des Spielfelds parallele Symmetrieachse, bzgl. derer A_1 symmetrisch zu R_1 liegt und R_2 zu A_2, ferner liegen A_1 und A_2 auf verschiedenen Seiten dieser Achse. Allein aus diesen Eigenschaften folgt, dass A_1 und A_2 sicher nicht in der gleichen Spalte liegen. Und wenn sie in der gleichen Zeile liegen, liegen – ebenfalls wegen der Symmetriebedingung − auch beide Steine von Renate in dieser Zeile, zusätzlich liegt der Stein von Renate, der näher an der Symmetrieachse liegt, zwischen den beiden Steinen von Arthur. Insbesondere liegt keine Gewinnstellung für Arthur vor.

Auch kann Arthur nicht so ziehen, dass beide Steine in direkt nebeneinander liegenden Feldern liegen: Wenn Arthur in das Feld in der gleichen Zeile ziehen möchte, muss die Symmetrieachse zwischen beiden Feldern liegen, dann ist aber das Feld mit einem Stein Renates besetzt. Und wenn Arthur in das Feld der gleichen Spalte ziehen möchte, dann muss er über die Symmetrieachse ziehen auf ein Feld, auf dem dann schon ein Stein von Renate liegt. (Verliefe die Symmetrieachse durch das Feld, auf das er zieht, wären wegen Symmetriebedingung auf diesem Feld Steine von Renate und Arthur gleichzeitig, was nicht sein kann.

Renate kann nun auf jeden Zug von Arthur so antworten, dass wieder eine Stellung mit den genannten Eigenschaften entsteht: Wenn Arthur in Richtung einer Spalte zieht, so zieht sie symmetrisch, dies ist stets möglich und die Symmetrieachse bleibt die gleiche. Wenn Arthur in Richtung einer Zeile zieht, so kann sie mindestens einen der folgenden Züge machen: Sie zieht symmetrisch, dann bleibt die Symmetrieachse erhalten, das ist immer möglich, wenn Arthur nicht auf die Symmetrieachse zieht oder Renate über den Rand des Spielfeldes ziehen müsste. Oder sie zieht ihren auf der gleichen Seite liegenden Stein in die gleiche Richtung, dabei bewegt sich die Symmetrieachse parallel zum unteren Spielfeldrand um ein halbes Feld, dies ist (nicht nur) in allen anderen Fällen möglich.

Variante, ausführlicher, formaler: Eine ASA−*Position* definieren wir folgendermaßen: Arthur ist am Zug und es gibt vor Arthurs Zug eine Symmetrie−Achse, die parallel zum rechten Rand des Spielfeldes liegt, bezüglich derer R_1 und A_1 symmetrisch liegen und ebenso R_2 und A_2, zusätzlich sind A_1 und A_2 in verschiedenen Halbebenen bezüglich dieser Symmetrieachse. Insbesondere liegt kein Stein von Arthur auf einem Feld, durch dessen Mitte die Symmetrieachse verläuft.

Wir werden zeigen:

a) Eine ASA−Position ist keine Gewinnposition,

b). aus einer ASA−Position kann Arthur nicht in eine Gewinnposition ziehen und

c) Renate kann nach jedem Zug von Arthur aus einer ASA−Position mit ihrem Zug wieder eine ASA−Position herstellen.

Da zu Beginn offensichtlich eine ASA−Position vorliegt, folgt hieraus sofort, dass Renate einen Gewinn von Arthur verhindern kann.

zu a): In einer ASA−Position können die beiden Steine von Arthur nicht in senkrecht benachbarten Feldern liegen, da sie nach Definition auf verschiedenen Seiten der senkrecht verlaufenden Symmetrieachse liegen. Wenn beide Steine in der gleichen Zeile liegen, müssen wegen der Symmetriebedingung auch beide Steine von Renate in dieser Zeile liegen und zusätzlich Renates und Arthurs Steine abwechselnd liegen, d.h. Arthurs Steine können nicht in waagrecht benachbarten Feldern liegen.

zu b): A_1 und A_2 liegen auf verschiedenen Seiten der Symmetrieachse. Arthur kann also nur dann einen seiner Steine auf das waagrecht oder senkrecht benachbarte Feld des anderen Steins ziehen, wenn A_1 und A_2 in Feldern liegen, die von verschiedenen Seiten an die Symmetrieachse angrenzen und die in benachbarten Zeilen liegen. Dann sind aber wegen der Symmetriebedingung beide Felder, in die Arthur zum Gewinn ziehen könnte, bereits mit Steinen von Renate besetzt.

zu c) Falls Arthur mit A_i (i = 1, 2) aus einer ASA−Position einen Zug parallel zur Symmetrieachse auf eine freies Feld macht, kann Renate mit R_i einen symmetrischen Zug machen und damit wieder eine ASA−Position herstellen. Und wenn Arthur eine Zug senkrecht zur Symmetrieachse ausführt, kann Renate mindestens einen der folgenden Züge ausführen:

> c_1) Renate zieht R_1 symmetrisch (d.h. in der gleichen Zeile wie A_1 in die Gegenrichtung) und stellt so die ASA−Position mit der gleichen Symmetrieachse wieder her. (Dieser Zug ist immer möglich, wenn R_1 nicht auf dem linken Rand des Spielfeldes steht.)
>
> c_2) Renate zieht R_2 parallel (d.h. in der gleichen Zeile wie A_2 in die gleiche Richtung) und stellt so die ASA−Position mit einer um eine halbe Spalte verschobene Symmetrieache wieder her.

Bemerkung: Renates Strategie könnte so formuliert werden: Wenn Arthur den Stein A_i ($i \in \{1,2\}$) in der gleichen Spalte verschiebt, schiebe R_i in die gleiche Richtung. Wenn A_i in der gleichen Zeile verschoben wird, schiebe R_i in der gleichen Zeile in Gegenrichtung oder R_j ($i \neq j$) in der gleichen Zeile in die gleiche Richtung (es ist stets mindestens einer der beiden Züge möglich).

Oder: Ziehe – wenn möglich − symmetrisch zur senkrechten Symmetrieachse. Wenn das nicht geht, ziehe den anderen Stein so, dass wieder eine Situation mit einer neuen senkrechten Symmetrieachse hergestellt wird.

Aufgabe 2: Kann eine Zahl 44…41, deren Dezimaldarstellung aus einer ungeraden Anzahl von Ziffern 4 gefolgt von einer Ziffer 1 besteht, eine Quadratzahl sein?

Anmerkung: Die Richtigkeit der Antwort ist zu beweisen.

Gemeinsame Bezeichnungen: Mit a_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, sei die Zahl 44…41 mit n Ziffern 4 gefolgt von einer Ziffer 1 bezeichnet. Die Aufgabenstellung beschäftigt sich also mit den Zahlen a_{2n-1}, $n \geq 1$, diese Zahlen haben $2n$ Stellen.

Antwort: Nein, keine der Zahlen 44…41, deren Dezimaldarstellung aus einer ungeraden Anzahl von Ziffern 4 gefolgt von einer Ziffer 1 besteht, ist eine Quadratzahl.

1. Beweis: (Herleitung einer Vermutung mit TR, anschließende Bestätigung, mit Stoff aus Klasse 4): Wir berechnen $\sqrt{44\ \ldots\ 41}$ mit $2n-1$ Ziffern 4 für einige Werte von n und erhalten so die Vermutung, dass für alle $k \geq 1$ stets $\underbrace{66\ \ldots\ 66}_{k\text{ Ziffern }6}{}^2 < \underbrace{44\ \ldots\ 4}_{2k-1\text{ Ziffern }4}1 < \underbrace{66\ \ldots\ 66}_{k-1\text{ Ziffern }6}7^2$,

d.h. dass die Zahl 44 … 41 (ungerade Anzahl Ziffern 4) stets zwischen zwei aufeinander folgenden Quadratzahlen liegt, also selbst keine Quadratzahl sein kann.

Verifikation: Wir bestätigen die folgende Zeile mit Kopfrechnen: Es gilt

$$6 \cdot \underbrace{66\ \ldots\ 66}_{k\text{ Ziffern }6} = 3\underbrace{99\ \ldots\ 9}_{k-1\text{ Ziffern }9}6 < 4\underbrace{00\ \ldots\ 0}_{k\text{ Ziffern }0} < 4\underbrace{00\ \ldots\ 0}_{k-1\text{ Ziffern }0}2 = 6 \cdot \underbrace{66\ \ldots\ 66}_{k-1\text{ Ziffern }6}7 .$$

Die Berechnung von $66\ldots6^2$ schaut bei üblicher schriftlicher Multiplikation folgendermaßen aus (die abschließende Addition haben wir nicht durchgeführt):

6	6	6		...		6	6	6		*	6	6	6		...		6	6	6

										3	9	9	9		...	9	9	9	6
									3	9	9	9		...	9	9	9	6	
								3	9	9	9		...	9	9	9	6		
									...										
									...										
		3	9	9	9		...	9	9	9	6								

Nun ersetzen wir die Zahlen 399…996 durch die größere Zahl 4000…000:

6	6	6		...		6	6	6		*	6	6	6		...		6	6	6

										4	0	0	0		...	0	0	0	0
									4	0	0	0		...	0	0	0	0	
								4	0	0	0		...	0	0	0	0		
									...										
									...										
		4	0	0	0		...	0	0	0	0								

		4	4	4	4		...	4	4	4	0	0	0		...	0	0	0	0

und erhalten nach Addition die Zahl 44…400…0, diese ist größer als $66...66^2$, d.h. wir wissen nun, dass

$66\ldots66^2 < 44\ldots400\ldots0 < 44\ldots441$ ist.

Berechnet man in gleicher Weise $66\ldots67^2$, so erhält man:

6	6	6		...		6	6	7		*	6	6	6		...		6	6	7

										4	6	6	6		...	6	6	6	9
									4	0	0	0		...	0	0	0	2	
								4	0	0	0		...	0	0	0	2		
									...										
									...										
		4	0	0	0		...	0	0	0	2								

		4	4	4	4		...	4	4	4	8	8	8		...	8	8	8	9

Es ist also $66\ldots67^2 = 444\ldots888\ldots89 > 444\ldots441$, das war zu zeigen.

Bemerkung: Möglicherweise kann man auch (etwas umständlicher!) zeigen, dass

$$\underbrace{66\ \ldots\ 66}_{k\text{ Ziffern }6}{}^2 = \underbrace{44\ \ldots\ 44}_{k-1\text{ Ziffern }4}3\underbrace{55\ \ldots\ 55}_{k-1\text{ Ziffern }5}6 < \underbrace{44\ \ldots\ 44}_{2k-1\text{ Ziffern }4}1, \text{ (mit Sonderfall für } k = 1).$$

2. Beweis: Es ist $a_n = \underbrace{4\ ...\ 44}_{n \text{ Ziffern } 4}1 = \underbrace{4\ \ ...\ \ 44}_{n+1 \text{ Ziffern } 4},\overline{4} - 3,\overline{4} = 10^{n+1}\cdot\frac{4}{9} - \frac{31}{9}$.

Die Aufgabenstellung bezieht sich auf Zahlen der Form a_{2n+1}, $n \geq 0$. Es ist gefragt, ob es ein n gibt, für das die Gleichung $p^2 = 10^{2n+2}\cdot\frac{4}{9} - \frac{31}{9}$ eine ganzzahlige Lösung p hat. Multiplikation beider Seiten mit 9 und Umstellen ergibt die äquivalente Gleichung $(2\cdot 10^{n+1})^2 - (3p)^2 = 31$. Die Annahme, dass diese Gleichung eine Lösung hat, kann man auf verschiedene Arten zum Widerspruch führen:

Variante 1: Angenommen, es gäbe ein solches p. Dann ist offensichtlich $3p < 2\cdot 10^{n+1}$. Die größte durch 3 teilbare Zahl, die kleiner ist als $2\cdot 10^{n+1}$, ist $2\cdot 10^{n+1} - 2$, also gilt $3p \leq 2\cdot 10^{n+1} - 2$. Eine Abschätzung ergibt sofort den Widerspruch

$$(2\cdot 10^{n+1})^2 - (3p)^2 \geq (2\cdot 10^{n+1})^2 - (2\cdot 10^{n+1} - 2)^2 \geq 8 \cdot 10^{n+1} - 4 \geq 76 > 31.$$

Variante 2: Es gilt $(2\cdot 10^{n+1})^2 - (3p)^2 = 31 \Leftrightarrow [(2\cdot 10^{n+1}) + (3p)]\cdot[(2\cdot 10^{n+1}) - (3p)] = 31$. Da 31 Primzahl ist und $[(2\cdot 10^{n+1}) + (3p)] > [(2\cdot 10^{n+1}) - (3p)]$, ist $[(2\cdot 10^{n+1}) - (3p)] = 1$ und $[(2\cdot 10^{n+1}) + (3p)] = 31$. Addition dieser beiden Gleichungen führt zum Widerspruch $4\cdot 10^{n+1} = 32$, also $10^{n+1} = 8$.

Bemerkung: Diese Beweisführung setzt voraus, dass man mit unendlichen Dezimalbrüchen genau so rechnen kann wie mit endlichen.

Variante (umgeht das Rechnen mit unendlichen Dezimalbrüchen): Falls $\underbrace{4\ ...\ ...\ 44}_{n \text{ Ziffern } 4}1$ Quadratzahl, dann auch $3^2 \cdot 4 \ldots 441 = \underbrace{39\ ...\ 96}_{n+1 \text{ Ziffern}}9 = \left(2\cdot 10^{(n+1)/2}\right)^2 - 31$. Für ungerade n (insbesondere ist dann $n \geq 1$), ist $\left(2\cdot 10^{(n+1)/2}\right)^2$ ganzzahlige Quadratzahl, die nächstkleinere ganzzahlige Quadratzahl ist

$$\left(2\cdot 10^{(n+1)/2} - 1\right)^2 = 4\cdot 10^{n+1} - 2\cdot 2\cdot 10^{(n+1)/2} + 1 \leq \left(2\cdot 10^{(n+1)/2}\right)^2 - 39 < \left(2\cdot 10^{(n+1)/2}\right)^2 - 31.$$

Damit liegt $\underbrace{4\ ...\ ...\ 44}_{n \text{ Ziffern } 4}1$ zwischen zwei aufeinander folgenden Quadratzahlen, kann also selbst nicht Quadratzahl sein.

3. Beweis: Mit a_n, $n \geq 1$, sei die Zahl 44…41 mit n Ziffern 4 gefolgt von einer Ziffer 1 bezeichnet. Die Aufgabenstellung beschäftigt sich also mit den Zahlen a_{2n-1}, $n \geq 1$, diese Zahlen haben $2n$ Stellen. Ferner sei $a := \frac{4}{9}$, also $\sqrt{a} = \frac{2}{3} = 0,\overline{6}$ und $\varepsilon = \varepsilon(n) := \frac{31}{9}\cdot 10^{-2n} = 3,\overline{4}\cdot 10^{-2n}$. Dann ist nach gängigen Regeln für das Rechnen mit periodischen Dezimalbrüchen

$$a_{2n-1} = 44\ldots 41 = 44\ldots 4,\overline{4} - 3,\overline{4} = 10^{2n}\left(\frac{4}{9} - \frac{31}{9}\cdot 10^{-2n}\right) = 10^{2n}(a - \varepsilon) \quad .$$

Hieraus schließen wir

$$\sqrt{a_{2n-1}} = \sqrt{10^{2n}(a-\varepsilon)} < 10^n \cdot \sqrt{a} = 66\ldots 66,\overline{6} < 66\ldots 67,0 \text{ mit } n \text{ Ziffern vor dem Komma.} \quad (1)$$

Andererseits gilt allgemein für $a > 0$, $0 < \varepsilon \leq \sqrt{a}$

$$\sqrt{a} - \varepsilon < \sqrt{a - \varepsilon} \Leftrightarrow a - 2\varepsilon\sqrt{a} + \varepsilon^2 < a - \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon < 2\sqrt{a} - 1,$$

Anwendung auf die oben definierten Werte ergibt (es ist $0 < \varepsilon = \frac{31}{9}\cdot 10^{-2n} \leq \sqrt{a} = 10^n \cdot \frac{2}{3}$):

$$\sqrt{a_{2n-1}} = \sqrt{10^{2n}\cdot(a-\varepsilon)} = 10^n \cdot \sqrt{(a-\varepsilon)} > 10^n \cdot \left(\sqrt{a} - \varepsilon\right) = 10^n \cdot \frac{2}{3} - \frac{31}{9}\cdot 10^{-n}$$

$> \quad 66...66,\overline{6} - 4\cdot 10^{-n} \; > \; 66...66$ mit n Ziffern. (2)

Aus (1) und (2) schließen wir, dass $66...66^2 < a_{2n-1} < 66...67^2$, d.h. a_{2n-1} liegt zwischen zwei aufeinander folgenden Quadratzahlen, kann also selbst keine Quadratzahl sein.

4. Beweis (Rest bei Division durch 11): Wir verwenden die bekannte Teilbarkeitsregel für die Zahl 11:

T_{11}: Jede natürliche Zahl n mit der Darstellung $n = z_k z_{k-1} \; \ldots \; z_2 z_1 z_0$ im Dezimalsystem lässt bei Division durch 11 den gleichen Rest wie ihre alternierende Quersumme

$$aQ(n) \; := \; z_0 - z_1 + z_2 - z_3 + z_4 - \ldots = \sum_{0\le i\le k} (-1)^i z_i \, .$$

Beweis: Es ist $10^i \equiv (-1)^i \bmod 11$, also

$$n = z_0 \cdot 10^0 + z_1 \cdot 10^1 + z_2 \cdot 10^2 + z_3 \cdot 10^3 + \ldots \equiv \sum_{0\le i\le k} (-1)^i z_i \bmod 11$$

Die Zahl 44… 41 lässt also den gleichen Rest wie $1 - 4 + (4-4) + (4-4) + \ldots = -3 = -1 \cdot 11 + 8$, also 8. Aber keine Quadratzahl lässt den Rest 8, wie man schnell im Kopf nachrechnet: Jede natürliche Zahl n hat einen der Reste 0, ±1, ±2, ±3, ±4, ±5, also hat n^2 einen der Reste $0^2 = 0$, $(\pm1)^2 = 1$, $(\pm2)^2 = 4$, $(\pm3)^2 = 9$, $(\pm4)^2 = 16 \equiv 5 \bmod 11$, $(\pm5)^2 = 25 \equiv 3 \bmod 11$, also niemals 8.

Bemerkung: Interessant ist, dass es außer $a_0 = 1 = 1^2$ und $a_2 = 441 = 21^2$ keine Quadratzahlen der Form 44…41 mit einer geraden Anzahl Ziffern 4 gibt. Unserem Korrektor Christian Hercher verdanke ich hierfür einen Beweis, den ich hier skizziere:

Analoge Argumentation wie im 2. Beweis führt zur notwendigen Bedingung

$$p^2 = 10^{2n+1} \cdot \frac{4}{9} - \frac{31}{9} \;\Leftrightarrow\; (3p)^2 - 10 \cdot (2\cdot 10^n)^2 = -31,$$

also zur Frage nach Lösungen der Pellschen Gleichung $x^2 - 10y^2 = -31$ (*) mit der zusätzlichen Nebenbedingung $3|x$ und $y = 2 \cdot 10^m$ für geeignetes m. Eine einfache Betrachtung *mod* 3 zeigt, dass $3|x$ für jede Lösung erfüllt ist. Probieren führt zum Ergebnis, dass $(x,y) = (3,2)$ und $(x,y) = (63,20)$ die einzigen Lösungen mit $1 \le y \le 33$ sind. Diese führen zu $a_0 = 1 = 1^2$ und $a_2 = 441 = 21^2$. Mit üblichen Lösungsverfahren für Pellsche Gleichungen erhält man:

Die verwandte Gleichung $1 = r^2 - 10s^2$ (**) hat eine Lösung $(r,s) = (19,6)$, also liefert die Rekursion $x_{n+1} = 19x_n + 6\cdot 10\cdot y_n$, $y_{n+1} = 6x_n + 19y_n$ aus den Startwerten $(x_0,y_0) = (3,2)$ und $(x_0,y_0) = (63,20)$ zu unendlich viele Lösungen von (*), wobei stets $y_{n+1} > y_n$ ist. Umgekehrt liefert jede Lösung $(x|y)$ von (*) mittels der (eindeutig bestimmten!) Umkehrung der Rekursion über $x' = 19x - 60y$, $y' = -6x + 19y$ eine Lösung (x',y') von (*) mit $y' < y$. Dabei ist aber $x' > 0$ und $y' > 0$ nur gegeben, wenn ${}^{60}/_{19} < {}^{x}/_{y} < {}^{19}/_{6}$. Mehrmalige Anwendung führt also für jede Lösung (x,y) zu einer Lösung (x',y') von (*), für die ${}^{x'}/_{y'} \le {}^{60}/_{19}$ (***) oder ${}^{x'}/_{y'} \ge {}^{19}/_{6}$ (****) gilt. Aus (***) folgt

$$-31 = x'^2 - 10y'^2 \;\le\; [({}^{60}/_{19})^2 - 10]\cdot y'^2 = -({}^{10}/_{361})y'^2, \text{ also } |\,y'\,| \le 33,$$

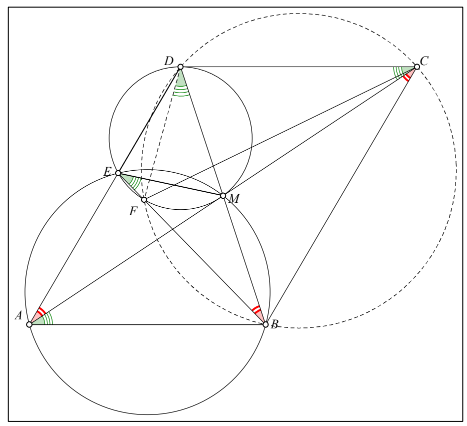
der Fall (****) kann nicht eintreten, weil andernfalls $-31 = x'^2 - 10y'^2 \ge [({}^{19}/_{6})^2 - 10]\cdot y'^2 = \; > \; 0$.

Hieraus schließt man, dass jede Lösung von (*) mittels obiger Rekursion aus einer Lösung (x,y) von (*) mit $1 \le y \le 33$ generiert werden kann, also nur aus den beiden Lösungen $(x_0,y_0) = (3,2)$ und $(x_0,y_0) = (63,20)$. Die Werte, die diese Rekursionen ergeben, bestimmt man $\bmod 7$ und $\bmod 8$ und stellt fest, dass y_n genau dann durch 8 teilbar ist, wenn y_n auch durch 7 teilbar ist. Hieraus schließt man, dass y_n niemals von der Form $y_n = 2\cdot 10^m$ mit $m \ge 3$ ist. Die Fälle $m \le 2$ überprüft man von Hand.

Aufgabe 3: Gegeben ist ein Parallelogramm $ABCD$ mit Diagonalenschnittpunkt M derart, dass der Umkreis des Dreiecks ABM die Strecke AD in einem von A verschiedenen Punkt E schneidet und der Umkreis des Dreiecks EMD die Strecke BE in einem von E verschiedenen Punkt F schneidet.

Zeige: Die Winkel $\angle ACB$ und $\angle DCF$ sind gleich groß.

Bemerkung: Die Aussage gilt auch, wenn man schwächer voraussetzt, dass E auf der Geraden AD und F auf der Geraden EB liegt. Die Einschränkung auf die Strecken AD und EB dient dazu, eine längere Diskussion der möglichen Lagebeziehungen zu vermeiden.



1. Beweis (Umfangswinkelsatz, Sehnenviereck): Eine charakteristische Eigenschaft des Parallelogramms ist, dass sich die Diagonalen gegenseitig halbieren. M ist also der Mittelpunkt der Strecke BD.

Wir betrachten zunächst nur das Dreieck ABD und den Mittelpunkt M auf der Seite BD, wobei der Umkreis von Dreieck ABM die Seite AD im Punkt E schneidet. (Die Eigenschaft, dass M Mittelpunkt von AC ist, benötigen wir erst später.)

Da nach Voraussetzung der Punkt E auf der Strecke AD liegt und von A verschieden ist, liegen die Punkted A, B, M und E in dieser Reihenfolge auf dem Umkreis des Dreiecks ABM, außerdem verläuft die Strecke BE durch das Innere des Dreiecks ABD, insbesondere liegt M nicht auf ihr. Nun liegt F auf der Strecke EB und ist von E verschieden, also liegen E, F, M und D in dieser Reihenfolge auf dem Umkreis des Dreiecks EMD. Die Strecke EM ist gemeinsame Sehne dieser beiden Umkreise.

Nun können wir drei Mal den Umfangswinkelsatz anwenden: Es gilt

über der Sehne EM im Umkreis von ABM: $\angle MAE = \angle MBE$

über der Sehne MB im Umkreis von ABM: $\angle BAM = \angle BEM$

über der Sehne FM im Umkreis von EMD: $\angle FEM = \angle FDM$.

Da F im Innern der Strecke BE liegt und M Schnittpunkt der Strecken AC und BD ist, gilt nun mit Winkelsummensatz im Dreieck BDF

$$\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = \angle FDB + \angle DBF = 180° - \angle BFD,$$

d.h. es gilt $\angle BFD + \angle BAD = 180°$.

Mit Umfangswinkelsatz am Umkreis des Dreiecks DFB folgt: Die Punkte C^* auf demjenigen Bogen über der Sehne BD, der den Punkt F nicht enthält, sind genau die Punkte, für die $\angle DC^*B = \angle BAD$.

Erst jetzt benötigen wir die Eigenschaft, dass M der Diagonalenschnittpunkt des Parallelogramms $ABCD$ ist. Da das Parallelogramm punktsymmetrisch zum Schnittpunkt der Diagonalen ist, gilt $\angle DCB = \angle BAD$, d.h. die Ecke C liegt auf dem genannten Bogen über der Sehne BD und die Punkte B, C, D und F liegen in dieser Reihenfolge auf dem Umkreis von Dreieck DFB.

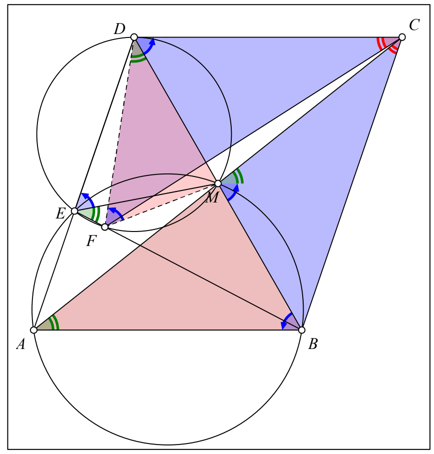
Mit Umfangswinkelsatz über der Sehne DF schließen wir schnell:

$$\angle DCF = \angle DBF = \angle CAD = \angle ACB,$$

das ist die Behauptung.

2. Beweis (Ähnlichkeit von Dreiecken): Wir werden zeigen, dass die Dreiecke BCM und FCD ähnlich sind. Dann gilt – es liegt ja M auf der Strecke AC − wie gewünscht $\angle ACB = \angle MCB = \angle DCF$.

Zunächst zeigen wir hierzu, dass auch die Dreiecke ABM und DFM ählich sind, dazu argumentieren wir mit Sehnenviereck $ABME$ im Umkreis des Dreiecks ABM und Sehnenviereck $EFMD$ im Umkreis des Dreiecks EMD:



Im Sehnenviereck $ABME$ ergänzen sich die gegenüber liegenden Winkel bei E und bei B zu 180°, d.h. der "Außenwinkel" $\angle MED$ des Vierecks $ABME$ bei E ist so groß wie der Innenwinkel $\angle MBA$ an der gegenüber liegenden Ecke B. Zusammen mit dem Umfangswinkelsatz über der Sehne MD des Umkreises von EMD gilt also

$$\angle MBA = \angle MED = \angle MFD.$$

Weiter gilt in den genannten Sehnenvierecken

$$\angle BAM = \angle BEM = \angle FEM = \angle FDM.$$

Also sind in den Dreiecken ABM und DFM die Innenwinkel nicht nur bei B und F gleich, sondern auch bei A und D, d.h. sie sind nach "www" ähnlich.

(Bei dieser Argumentation wurde noch nicht verwendet, dass M der Mittelpunkt von BD ist, auch ist die Lage von C bis hier noch nicht relevant.)

Im Folgenden benötigen wir die Voraussetzung, dass $ABCD$ ein Parallelogramm ist. Insbesondere ist $AB \parallel CD$ und somit $\angle DBA = \angle BDC$. In den Dreiecken BCM und FCD können wir nun schließen:

$\angle BMC = \angle BAM + \angle MBA$ (Außenwinkelsatz im Dreieck ABM) und

$\angle FDC = \angle FDM + \angle BDC = \angle BAM + \angle DBA = \angle BMC$ (Wechselwinkel an $AB \parallel CD$).

d.h. die Dreiecke BCM und FCD haben bei M und D die gleichen Innenwinkel. Es genügt nun nachzuweisen, dass $MC : MB = CD : DF$.

Hierzu benötigen wir, dass $ABCD$ ein Parallelogramm ist. Deswegen gilt insbesondere $MC = MA$ [1], $MD = MB$ [2], $DC = AB$ [3], $\angle MBA = \angle DBA = \angle BDC$ [4], zusätzlich verwenden wir von oben, dass die Dreiecke ABM und DFM ähnlich sind.[5] Dies verwenden wir in folgender Gleichungskette:

$$MC : MB \overset{1)}{=} MA : MB \overset{5)}{=} MD : MF \overset{2)}{=} MB : MF \overset{5)}{=} AB : DF \overset{3)}{=} CD : DF,$$

das war zu zeigen.

Aufgabe 4: Für positive ganze Zahlen p, q und r sind $p{\cdot}q{\cdot}r$ Einheitswürfel gegeben. Durch jeden dieser Würfel wird ein Loch entlang einer Raumdiagonalen gebohrt, anschließend werden die Würfel an einem sehr dünnen Faden mit Länge $p \cdot q \cdot r {\cdot} \sqrt{3}$ wie eine Perlenschnur aufgefädelt. Nun sollen die Einheitswürfel zu einem Quader mit den Seitenlängen p, q und r zusammengelegt werden, ohne dass der Faden zerreißt.

a) Für welche Zahlen p, q und r ist dies möglich?

b) Für welche Zahlen p, q und r ist dies so möglich, dass Anfang und Ende des Fadens zusammenfallen?

Anmerkung: Die Richtigkeit der Antwort ist zu beweisen.

Bezeichnungen: "Raumdiagonalen, entlang derer das Loch gebohrt wurde" verkürzen wir zu "Lochdiagonale".

Ein Zusammenlegen der aufgefädelten Einheitswürfel, das die oben genannten Bedingungen erfüllt, nennen wir ***zulässig***.

Antwort: a) Für jedes Tripel (p,q,r) positiver ganzer Zahlen gibt es ein zulässiges Zusammenlegen.

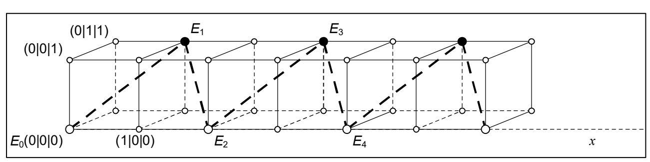
b) Für jedes Tripel (p,q,r) positiver ganzer Zahlen, bei dem wenigstens zwei der Zahlen p, q , r gerade sind und nur für diese gibt es ein zulässiges Zusammenlegen, bei dem Anfangs− und Endpunkt des Fadens zusammenfallen.

Beweis: Die Würfel bezeichnen wir in der Reihenfolge des Auffädelns mit W_1, W_2, ... , $W_{(pqr)}$. Da die Länge der Raumdiagonale des Einheitswürfels $\sqrt{3}$ ist und genau pqr Würfel aufgefädelt werden, hat die Perlenschnur kein "Spiel", d.h. der Endpunkt der Lochdiagonalen eines Würfels ist gleichzeitig Anfangspunkt der Lochdiagonalen des in der Kette folgenden Würfels. Die Ecken der Würfel, durch die die Perlenschnur verläuft, bezeichnen wir fortlaufend mit E_0, E_1, ... , $E_{(pqr)}$. Dabei ist nicht ausgeschlossen, dass die Schnur eine Ecke mehrfach durchläuft.

Bei unseren Betrachtungen legen wir stets einen der Einheitswürfel der Kette so in ein dreidimensionales kartesisches Achsenkreuz, dass die Endpunkte der Lochdiagonalen die Koordinaten (0|0|0) und (1|1|1) haben und jede Kante parallel zu einer der Koordinatenachsen ist. Wenn man die Würfel zu einem Quader mit Kantenlängen p,q,r zusammenlegen will, muss man notwendigerweise auch alle anderen Würfel so legen, dass jede Kante parallel zu einer der Koordinatenachsen ist. Dann sind die Koordinaten aller Ecken der Einheitswürfel ganzzahlig.

Verfolgen wir nun den Verlauf der Schnur von einer Ecke E_i zur nächsten Ecke E_{i+1}, so stellen wir fest, dass sich jede Koordinate um genau 1 verändert. Insbesondere sind bei Ecken mit geradem Index alle drei Koordinaten ganzzahlig und gerade und bei Ecken mit ungeradem Index sind alle Koordinaten ganzzahlig und ungerade.

Eine s−*Stange* sei eine Anordnung von s hintereinander auf der Schnur aufgefädelten Einheitswürfeln, die einen Quader mit Seitenlängen s,1,1 bilden (vgl. Figur mit $s = 6$, Anfangsecke E(0|0|0), Ecken mit geraden Koordinaten weiß, Schnur dick gestrichelt dargestellt.). Eine solche Stange kann offensichtlich für alle s gebildet werden, ohne dass der Faden zerreißt. Wir stellen fest, dass für ungerade s Eintritts− und Austrittspunkt der Schnur die Ecken einer Raumdiagonalen des Quaders sind, für gerade s liegen Ein− und Austrittspunkt an einer Kante der Länge s.



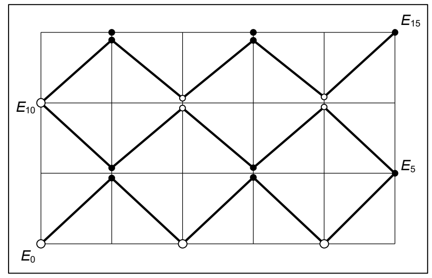
Eine st−*Platte* sei analog eine Anordnung von st hintereinander aufgefädelten Einheitswürfeln, die einen Quader mit den Kantenlängen s,t,1 bilden. Liegt diese Platte zwischen den Ebenen $z = h$ und $z = h + 1$, sprechen wir von einer st−Platte in Höhe h. Für welche s,t eine solche Platte gebildet werden kann, ohne dass die Schnur zerreißt, werden wir weiter unten zeigen.

zu a) (Angabe einer Konstruktion für beliebige p,q,r):

Fall 1: Mindestens zwei der Zahlen p,q,r sind ungerade, o.B.d.A. seien p,q beide ungerade, r beliebig.

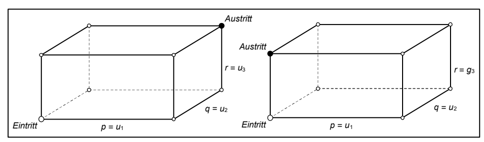
Der Quader im kartesischen Achsenkreuz, der durch die Ecken (0|0|0), (p|0|0), (0|q|0), (0|0|r) definiert ist, hat die Kantenlängen p, q, r. Diesen füllen wir folgendermaßen mit den Würfeln auf der Perlenschnur:

Aus den Würfeln W_1, W_2, ... , W_p bilden wir eine p−Stange und legen sie so in diesen Quader, dass E_0 = (0|0|0) und die restlichen Würfel entlang der Kante zwischen den Ecken (0|0|0) und (p|0|0) liegen. Da p ungerade ist, hat E_p nun die Koordinaten (p|1|1) (vgl. Figur). Wir können nun die p−Stange als einen Quader mit Seitenlängen 1, 1 und p betrachten, durch den ein Faden durch Anfangs− und Endpunkt einer Raumdiagonalen führt.



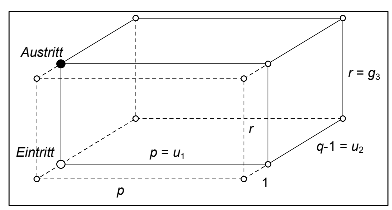
Genau so, wie wir vorher p Einheitswürfel (dies sind ja auch Quader, bei dem ein Faden durch Anfangs− und Endpunkt einer Raumdiagonalen führt) entlang der positiven x−Achse zusammengelegt haben, können wir nun q solche p−Stangen entlang der positiven y−Achse legen ohne dass die Schnur zerreißt (vgl. Figur, sie stellt die Draufsicht dar mit p = 5, q = 3, schwarze Punkte stehen für Punkte mit z−Koordinate 1, weiße für Punkte mit z−Koordinate 0, die Schnur (genauer: die Projektion der Schnur auf die Bodenfläche) wird durch die dicke Linie dargestellt). Die Schnur durchläuft dabei der Reihe nach die Ecken E_0(0|0|0), E_p(p|1|1), E_{2p}(0|2|0), E_{3p}(p|3|1,), ... , und da pq ungerade ist, ist die letzte Ecke E_{pq}(p|q|1).

Es entsteht also eine pq−Platte in Höhe 0, dies ist wieder ein Quader, bei dem der Faden durch Anfangs− und Endpunkt einer Raumdiagonalen geführt wird. Nun bilden wir mit den nächsten pq Einheitswürfeln eine weitere pq−Platte, und da die z−Koordinate von E_{pq} um eins größer ist als die z−Koordinate von E_0, kann man diese auf die soeben gebildete Platte als pq−Platte der Höhe 1 legen ohne den Faden zu zerreißen. Der Endpunkt der Schnur ist nun (0|0|2). Dies wiederholen wir, bis der Quader mit r Platten vollständig gefüllt ist.



Zusammenfassend stellen wir fest: Für p, q ungerade und r beliebig, können wir die Schnur so zusammenlegen, dass die Würfel einen Quader mit den Kantenlängen p, q, r bilden. Ist dabei r ungerade, liegen Eintritt und Austritt der Schnur auf einer Raumdiagonalen des Quaders, und ist r gerade, sind Eintritts− und Austrittspunkt die Endpunkte einer Kante der Länge r.

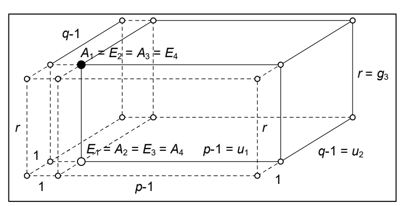
Fall 2: Genau eine der Zahlen ist ungerade, o.B.d.A. seien p ungerade, q und r beide gerade.



Nun ist q−1 ungerade, wir können also wie im Fall 1 beschrieben die ersten $p(q−1)r$ Würfeln der Schnur zu einem Quader mit den Kantenlängen p, (q−1) und r zusammenlegen, dabei liegen Eintritt und Austritt der Schnur an einer Kante der Länge r wie in der Figur mit weißem und schwarzem Punkt dargestellt.

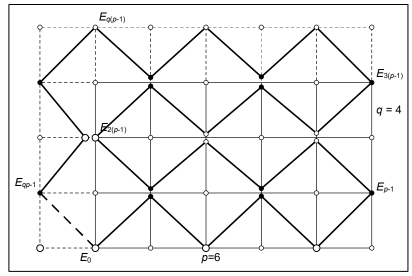
Mit den restlichen pr Würfeln legen wir einen Quader mit Seitenlängen p, 1 und r zusammen. Da p und 1 ungerade, aber r gerade ist, ist dies möglich mit dem im Fall 1 beschriebenen Algorithmus. Weil die Austrittsecke des p x (q−1) x r − Quaders identisch ist mit der Eintrittsecke des p x 1 x r – Quaders, können wir die beiden Quader zu einem p x q x r − Quader zusammenlegen. Zusätzlich stellen wir fest, dass dabei der Endpunkt der Schnur mit dem Anfangspunkt der Schnur zusammenfällt.

Fall 3: Alle restlichen Fälle, also alle drei Zahlen sind gerade.



Es sind p−1 und q−1 beide ungerade, also können wir nach den Algorithmen im Fall 1 die ersten (p−1)(q−1)r Würfel der Schnur zu einem ersten Quader mit den Kantenlängen, (p−1), (q−1) und r zusammenlegen (Eintritts− und Austrittspunkt der Schnur sind in der Figur mit E_1 bzw. A_1 bezeichnet). Anschließend legen wir nach Algorithmus in Fall 2 die folgenden Würfel so zusammen, dass eine (p−1)r−Platte entsteht, die wir so an den ersten Quader anlegen, dass ein Quader mit Kantenlängen p−1, q, r entsteht. Da p−1 gerade, ist der Austrittspunkt nun E_1. Den Algorithmus des Fall 2 wenden wir nun noch zwei Mal an auf die in der Figur eingezeichneten Quader mit den Längen $1,q-1,r$ sowie $1,1,r$; dabei wechselt der Austrittspunkt von E_1 zu A_1 und von dort wieder zurück zu E_1.

Zusammenfassend stellen wir fest, dass das zulässige Zusammenlegen der Schnur für alle p,q,r möglich ist, und dass, wenn mindestens zwei der Zahlen p,q,r gerade sind, dies auf eine Art möglich ist, bei der Anfangs− und Endpunkt der Schnur zusammenfallen.



Variante (skizziert, fasst Fall 2 und 3 zusammen): Mindestens zwei der Zahlen p,q,r seien gerade, o.B.d.A. sei p,q gerade, r beliebig:

Die ersten $(p-1)(q-1)$ Würfel legen wir wie in Fall 1 in $q-1$ $(p-1)$−Stangen zu einer $(p-1)(q-1)$−Platte und ergänzen dies durch die nächsten $p + q - 2$ Würfeln zu einer pq−Platte, bei der der letzte Eckwürfel fehlt; die Lage der einzelnen Würfel ist durch die Projektion der Lochdiagonalen (schwarze Linie) vorgegeben. (weiße Punkte in Ebene $z = 0$, schwarze Punkte in Ebene $z = 1$). Nun sind $pq - 1$ Würfel zusammengelegt. Wenn $r = 1$, nehmen wir W_{pq} und legen ihn wie gestrichelt angedeutet in die Ebene $z = 0$ und sind fertig; der Endpunkt des Fadens fällt nun mit E_0 zusammen. Wenn $r > 1$, legen wir die nächsten $pq - 1$ Würfel in Ebene $z = 1$ und folgen dabei wieder der schwarzen Linie, aber in umgekehrte Reihenfolge, bis wir wieder die Position über E_0 erreichen, von da an wieder eine Ebene höher wieder zurück zu E_{pq-1} usw, bis wir die Höhe r erreicht haben. Wenn r ungerade ist, sind wir über E_{qp-1} angekommen, wenn r gerade ist, über E_0. In beiden Fällen formen wir mit den restlichen r Würfeln eine r−Stange, diese passt genau in die Lücke über dem bisher freigebliebenem Feld. Man macht sich auch leicht klar, dass der Endpunkt des Fadens in beiden Fällen wieder E_0 ist.

zu b) Die Konstruktion im Fall 2 und 3 aus Teil a) zeigt, dass der Endpunkt des Fadens mit dem Anfangspunkt zusammenfallen kann, wenn mindestens zwei Koordinaten gerade sind.

Es bleibt zu zeigen, dass dies in allen anderen Fällen nicht möglich ist.

Fall 1: Alle drei Zahlen p, q, r sind ungerade: Läuft man entlang des Fadens die Ecken der Würfel ab, so wechselt bei jeder Ecke jede der drei Koordinaten von gerade zu ungerade bzw. umgekehrt. Verläuft also der Faden zum zweiten Mal an der gleichen Ecke (dies ist insbesondere der Fall, wenn Anfangs− und Endpunkt des Fadens identisch sind), so muss er insgesamt eine gerade Anzahl von Würfeln durchlaufen haben, d.h. die Anzahl der durchlaufenen Würfel − nämlich $p \cdot q \cdot r$ − muss gerade sein. Dies ist nur möglich, wenn von den Zahlen p, q, r mindestens eine gerade ist.

Fall 2 (der schließt den Fall 1 mit ein): Mindestens zwei der drei Zahlen sind ungerade: O.B.d.A. seien p und q ungerade.

Wir betrachten eine Schicht Würfel, die parallel zu den Kanten der Länge p und q ist, diese hat pq Würfel, also ungeradzahlig viele. Weiter betrachten wir die ebenfalls zu den Kanten der Länge p und q parallele Ebene, die diese Würfel mittig durchschneidet. Die $p \cdot q$ Lochdiagonalen in diesen Würfeln durchqueren alle diese Ebene genau einmal, d.h. auch der Faden durchquert diese Ebene eine ungerade Anzahl mal (hier wird nicht vorausgesetzt, dass diese Durchquerungen unmittelbar aufeinander folgen, ohne dass dazwischen andere parallele Ebenen durchquert werden). Damit liegen Anfangs− und Endpunkt dieses Fadens in verschiedenen Halbräumen bzgl. dieser Ebene, die beiden Punkte können also nicht zusammenfallen.