



Aufgaben und Lösungen

1. Runde 2024

Endgültige Fassung

» **KORREKTURKOMMISSION | KARL FEGERT**

» **BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK**

Kortrijker Straße 1, 53177 Bonn | Postfach 20 02 01, 53132 Bonn | Tel.: (02 28) 9 59 15-20, Fax: (02 28) 9 59 15-29
info@mathe-wettbewerbe.de, www.bundeswettbewerb-mathematik.de

Stand: 14.05.2024

GEFÖRDERT VOM



Bundesministerium
für Bildung
und Forschung



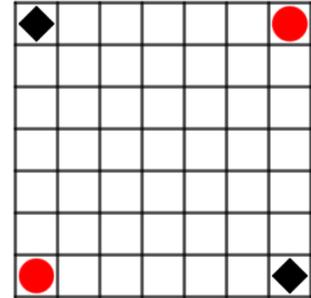
STIFTERVERBAND



KULTUSMINISTER
KONFERENZ



Aufgabe 1: Arthur und Renate¹⁾ spielen auf einem quadratischen Spielbrett, das in 7×7 Spielfelder unterteilt ist. Arthur hat zwei rote Steine, die anfangs im linken unteren und rechten oberen Eckfeld liegen, Renate hat zwei schwarze Steine, die anfangs im linken oberen und rechten unteren Eckfeld liegen. Wer am Zug ist, wählt einen seiner beiden Spielsteine und bewegt ihn in ein waagrecht oder senkrecht benachbartes freies Feld. Arthur und Renate ziehen abwechselnd, Arthur beginnt. Arthur hat gewonnen, wenn seine beiden Steine nach endlich vielen Zügen in waagrecht oder senkrecht benachbarten Feldern liegen.



Kann Renate dies durch geschicktes Ziehen verhindern?

Anmerkung: Die Richtigkeit der Antwort ist zu beweisen

¹⁾ Mit den Namen Arthur und Renate ehren wir Professor Arthur Engel und seine Frau. Arthur Engel (1928 – 2022) hat den Bundeswettbewerb Mathematik mit aus der Taufe gehoben und durch eine Vielzahl von Aufgaben entscheidend geprägt.

Antwort: Renate kann durch geschicktes Ziehen einen Gewinn von Arthur verhindern.

Bezeichnungen: Die Spalten und Zeilen nummerieren wir von links nach rechts bzw. von oben nach unten mit $-3, -2, \dots, +3$, hierdurch ergibt sich eine Bezeichnung der Felder mit Koordinaten.

Die beiden Steine von Renate bezeichnen wir mit R_1 und R_2 , zu Beginn liegt R_1 auf $(-3|3)$ und R_2 auf $(3|-3)$. Die Steine von Arthur bezeichnen wir mit A_1 und A_2 , zu Beginn liegt A_1 auf $(3|3)$ und R_2 auf $(-3|-3)$.

Mit *Gewinnposition* bezeichnen wir eine Situation, bei der die Steine von Arthur in waagrecht oder senkrecht benachbarten Feldern liegen.

1. Beweis (Angabe einer Strategie): "Erhalte das Rechteck".

Renate kann den Sieg mit folgender Strategie verhindern: Wenn Arthur seinen Stein in Richtung einer Spalte (Zeile) verschiebt, dann schiebe deinen Stein, der in der gleichen Zeile (Spalte) liegt, in die gleiche Richtung.

Begründung: Die Ausgangsstellung hat (unter anderem) folgende Eigenschaften: Die Steine von Arthur und Renate liegen jeweils auf den diagonal gegenüberliegenden Ecken eines Rechtecks, dessen Kanten parallel zu einem der beiden Spielfeldränder sind. Insbesondere liegen Arthurs Steine nicht in der gleichen Zeile und auch nicht in der gleichen Spalte. Insbesondere liegen sie auch nicht in unmittelbar nebeneinanderliegenden Feldern, d.h. Arthur hat in einer Stellung mit diesen Eigenschaften nicht gewonnen.

Eine weitere Eigenschaft ist, dass Renate für jeden Stein von Arthur einen ihrer Steine in der gleichen Zeile hat und den anderen in der gleichen Spalte. Deswegen kann Arthur auch nicht so ziehen, dass seine Steine in direkt nebeneinander liegende Felder gelangen, und Renate kann nach einem Zug von Arthur stets wieder nach oben beschriebener Strategie ziehen; dabei spielt auch eine Rolle, dass das Spielfeld selbst rechteckig ist. Sie erreicht so stets wieder eine Stellung mit den genannten Eigenschaften der Ausgangsstellung, insbesondere eine, in der Arthur nicht gewonnen hat.

Variante, ausführlicher, formaler: Eine *ReA-Position* (*Re* für Rechteck, *A* für Arthur ist am Zug) definieren wir folgendermaßen: Arthur ist am Zug, und die vier Spielsteine liegen auf den Ecken eines Rechtecks, dessen Seiten parallel zu den Rändern des Spielfeldes sind. Auf diagonal gegenüberliegenden Ecken liegen Steine der gleichen Person, d.h. A_1 und A_2 liegen nicht in der gleichen Zeile und nicht in der gleichen Spalte, der Stein R_1 liegt in der gleichen Zeile wie A_1 und in der gleichen Spalte wie A_2 , der Stein R_2 liegt in der gleichen Zeile wie A_2 und in der gleichen Spalte wie A_1 .



Wir werden zeigen:

- Eine ReA -Position ist niemals Gewinnposition.
- Aus einer ReA -Position kann Arthur nicht in eine Gewinnposition ziehen und
- Renate kann nach jedem Zug von Arthur, den er aus einer ReA -Position macht, mit ihrem darauf folgenden Zug wieder eine ReA -Position herstellen.

Da zu Beginn offensichtlich eine ReA -Position vorliegt, folgt hieraus sofort, dass Renate einen Gewinn von Arthur verhindern kann.

zu a): Nach Definition liegen in einer ReA -Position die Steine von Arthur nicht in der gleichen Zeile und nicht in der gleichen Spalte, also nicht in zwei waagrecht oder senkrecht benachbarten Feldern.

zu b): Arthur kann mit seinem Zug nur ein waagrecht oder senkrecht benachbartes Feld erreichen. Anders ausgedrückt: Entweder bleibt Arthur mit seinem Stein in der gleichen Zeile und verlässt seine Spalte oder er bleibt in der gleichen Spalte und verlässt seine Zeile. Da er aus einer ReA -Position zieht, kann er dabei nicht in die Zeile oder Spalte seines anderen Steines ziehen, da dort ein Stein von Renate steht. Das wäre aber notwendig, wenn er eine Gewinnposition erreichen möchte.

zu c) Wenn Arthur aus einer ReA -Position gezogen hat, bleibt ein Stein von Renate in der gleichen Zeile bzw. Spalte. Nun kann Renate ihren anderen Stein in die neue Spalte bzw. Zeile ziehen und stellt damit die ReA -Position wieder her. Dieser Zug ist offensichtlich immer möglich. Dabei spielt auch eine Rolle, dass das Spielfeld rechteckig ist.

2. Beweis (Angabe einer Strategie): "Erhalte die Achsensymmetrie"

Die Ausgangsstellung hat (unter anderem) folgende Eigenschaften: Es gibt eine zum rechten Rand des Spielfelds parallele Symmetrieachse, bzgl. derer A_1 symmetrisch zu R_1 liegt und R_2 zu A_2 , ferner liegen A_1 und A_2 auf verschiedenen Seiten dieser Achse. Allein aus diesen Eigenschaften folgt, dass A_1 und A_2 sicher nicht in der gleichen Spalte liegen. Und wenn sie in der gleichen Zeile liegen, liegen – ebenfalls wegen der Symmetriebedingung – auch beide Steine von Renate in dieser Zeile, zusätzlich liegt der Stein von Renate, der näher an der Symmetrieachse liegt, zwischen den beiden Steinen von Arthur. Insbesondere liegt keine Gewinnstellung für Arthur vor.

Auch kann Arthur nicht so ziehen, dass beide Steine in direkt nebeneinanderliegenden Feldern liegen: Wenn Arthur in das Feld in der gleichen Zeile ziehen möchte, muss die Symmetrieachse zwischen beiden Feldern liegen, dann ist aber das Feld mit einem Stein Renates besetzt. Und wenn Arthur in das Feld der gleichen Spalte ziehen möchte, dann muss er über die Symmetrieachse auf ein Feld ziehen, auf dem dann schon ein Stein von Renate liegt. (Verliefe die Symmetrieachse durch das Feld, auf das er zieht, wären wegen Symmetriebedingung auf diesem Feld gleichzeitig Steine von Renate und Arthur, was nicht sein kann.)

Renate kann nun auf jeden Zug von Arthur so antworten, dass wieder eine Stellung mit den genannten Eigenschaften entsteht: Wenn Arthur in Richtung einer Spalte zieht, so zieht sie symmetrisch. Dies ist stets möglich, und die Symmetrieachse bleibt die gleiche. Wenn Arthur in Richtung einer Zeile zieht, so kann sie mindestens einen der folgenden Züge machen: Sie zieht erstens symmetrisch, dann bleibt die Symmetrieachse erhalten. Das ist immer möglich, wenn Arthur nicht auf die Symmetrieachse zieht oder Renate über den Rand des Spielfeldes ziehen müsste. Oder sie zieht zweitens ihren auf der gleichen Seite liegenden Stein in die gleiche Richtung, dabei bewegt sich die Symmetrieachse parallel zum unteren Spielfeldrand um ein halbes Feld, was (nicht nur) in allen anderen Fällen möglich ist.

Variante, ausführlicher, formaler: Eine ASA -Position definieren wir folgendermaßen: Arthur ist am Zug und es gibt vor Arthurs Zug eine Symmetrie-Achse, die parallel zum rechten Rand des Spielfeldes liegt, bezüglich derer R_1 und A_1 symmetrisch liegen und ebenso R_2 und A_2 . Zusätzlich sind A_1 und A_2 in verschiedenen Halbebenen bezüglich dieser Symmetrieachse. Insbesondere liegt kein Stein von Arthur auf einem Feld, durch dessen Mitte die Symmetrieachse verläuft.



Wir werden zeigen:

- a) Eine *ASA*-Position ist keine Gewinnposition,
- b) aus einer *ASA*-Position kann Arthur nicht in eine Gewinnposition ziehen und
- c) Renate kann nach jedem Zug von Arthur aus einer *ASA*-Position mit ihrem Zug wieder eine *ASA*-Position herstellen.

Da zu Beginn offensichtlich eine *ASA*-Position vorliegt, folgt hieraus sofort, dass Renate einen Gewinn von Arthur verhindern kann.

zu a): In einer *ASA*-Position können die beiden Steine von Arthur nicht in senkrecht benachbarten Feldern liegen, da sie nach Definition auf verschiedenen Seiten der senkrecht verlaufenden Symmetrieachse liegen. Wenn beide Steine in der gleichen Zeile liegen, müssen wegen der Symmetriebedingung auch beide Steine von Renate in dieser Zeile liegen und zusätzlich Renates und Arthurs Steine abwechselnd liegen, d.h. Arthurs Steine können nicht in waagrecht benachbarten Feldern liegen.

zu b): A_1 und A_2 liegen auf verschiedenen Seiten der Symmetrieachse. Arthur kann also nur dann einen seiner Steine auf das waagrecht oder senkrecht benachbarte Feld des anderen Steins ziehen, wenn A_1 und A_2 in Feldern liegen, die von verschiedenen Seiten an die Symmetrieachse angrenzen und die in benachbarten Zeilen liegen. Dann sind aber wegen der Symmetriebedingung beide Felder, in die Arthur zum Gewinn ziehen könnte, bereits mit Steinen von Renate besetzt.

zu c) Falls Arthur mit A_i ($i = 1, 2$) aus einer *ASA*-Position einen Zug parallel zur Symmetrieachse auf ein freies Feld macht, kann Renate mit R_i einen symmetrischen Zug machen und damit wieder eine *ASA*-Position herstellen. Und wenn Arthur einen Zug senkrecht zur Symmetrieachse ausführt, kann Renate mindestens einen der folgenden Züge ausführen:

- c₁) Renate zieht R_1 symmetrisch (d.h. in der gleichen Zeile wie A_1 in die Gegenrichtung) und stellt so die *ASA*-Position mit der gleichen Symmetrieachse wieder her. (Dieser Zug ist immer möglich, wenn R_1 nicht auf dem linken Rand des Spielfeldes steht.)
- c₂) Renate zieht R_2 parallel (d.h. in der gleichen Zeile wie A_2 in die gleiche Richtung) und stellt so die *ASA*-Position mit einer um eine halbe Spalte verschobene Symmetrieachse wieder her.

Bemerkung: Renates Strategie könnte so formuliert werden:

Ziehe – wenn möglich – symmetrisch zur senkrechten Symmetrieachse. Wenn das nicht geht, ziehe den anderen Stein so, dass wieder eine Situation mit einer neuen senkrechten Symmetrieachse hergestellt wird.

Oder: Wenn Arthur den Stein A_i ($i \in \{1, 2\}$) in der gleichen Spalte verschiebt, schiebe R_i in die gleiche Richtung. Wenn A_i in der gleichen Zeile verschoben wird, schiebe – falls möglich – R_i in der gleichen Zeile in Gegenrichtung. Falls das nicht möglich ist, schiebe R_j ($i \neq j$) in der gleichen Zeile in die gleiche Richtung.

Wenn die Strategie so formuliert wird, benötigt man das Argument mit der Symmetrieachse nicht. Stattdessen argumentiert man, dass das Vordringen von A_1 über die 4. Spalte hinaus blockiert wird und das Vordringen von A_2 auf die 4. Spalte ebenfalls.



Aufgabe 2: Kann eine Zahl $44\dots 41$, deren Dezimaldarstellung aus einer ungeraden Anzahl von Ziffern 4 gefolgt von einer Ziffer 1 besteht, eine Quadratzahl sein?

Anmerkung: Die Richtigkeit der Antwort ist zu beweisen.

Antwort: Nein, keine der Zahlen $44\dots 41$, deren Dezimaldarstellung aus einer ungeraden Anzahl von Ziffern 4 gefolgt von einer Ziffer 1 besteht, ist eine Quadratzahl.

Gemeinsame Bezeichnungen: Mit a_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, sei die Zahl $44\dots 41$ mit n Ziffern 4 gefolgt von einer Ziffer 1 bezeichnet. Die Aufgabenstellung beschäftigt sich also mit den Zahlen a_{2n-1} , $n \geq 1$, diese Zahlen haben $2n$ Stellen.

1. Beweis: (Herleitung einer Vermutung mit TR, anschließende Bestätigung): Wir berechnen $\sqrt{44\dots 41}$ mit $2k - 1$ Ziffern 4 mit dem Taschenrechner für einige Werte von k und erhalten so die Vermutung, dass für alle $k \geq 1$ stets $\underbrace{66\dots 66^2}_{k \text{ Ziffern } 6} < \underbrace{44\dots 41}_{2k-1 \text{ Ziffern } 4} < \underbrace{66\dots 667^2}_{k-1 \text{ Ziffern } 6}$,

d.h. dass die Zahl $44\dots 41$ (ungerade Anzahl Ziffern 4) stets zwischen zwei aufeinander folgenden Quadratzahlen liegt, also selbst keine Quadratzahl sein kann. Diese Vermutung kann durch einfache Rechnung bestätigt werden: Für $k = 1$ ist tatsächlich $6^2 = 36 < 41 < 49 = 7^2$, und für $k \geq 2$ gilt

$$\begin{aligned} \underbrace{66\dots 66^2}_{k \text{ Ziffern } 6} &= \left(\underbrace{\frac{2}{3} \cdot 99\dots 99}_{k \text{ Ziffern } 9} \right)^2 = \left(\frac{2}{3} \cdot (10^k - 1) \right)^2 = \frac{4}{9} \cdot (10^{2k} - 2 \cdot 10^k + 1) \\ &= \frac{4}{9} \cdot (10^{2k} - 1) - \frac{8}{9} (10^k - 1) = \underbrace{44\dots 4}_{2k \text{ Ziffern } 4} - \underbrace{88\dots 8}_{k \text{ Ziffern } 8} = \underbrace{44\dots 400\dots 0}_{k \text{ Ziffern } 4 \ k \text{ Ziffern } 0} - \underbrace{44\dots 4}_{k \text{ Ziffern } 4} \\ &= \underbrace{44\dots 4355\dots 56}_{k-1 \text{ Ziffern } 4 \ k-1 \text{ Ziffern } 5} < \underbrace{44\dots 41}_{2k-1 \text{ Ziffern } 4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underbrace{66\dots 667^2}_{k-1 \text{ Ziffern } 6} &= \left(\underbrace{66\dots 66+1}_{k \text{ Ziffern } 6} \right)^2 = \underbrace{66\dots 66^2}_{k \text{ Ziffern } 6} + 2 \cdot \underbrace{66\dots 66}_{k \text{ Ziffern } 6} + 1 \\ &= \underbrace{44\dots 4}_{2k \text{ Ziffern } 4} - \underbrace{88\dots 8}_{k \text{ Ziffern } 8} + \underbrace{66\dots 66}_{k \text{ Ziffern } 6} + \underbrace{66\dots 66}_{k \text{ Ziffern } 6} + 1 = \underbrace{44\dots 4}_{2k \text{ Ziffern } 4} + \underbrace{4\dots 4}_{k \text{ Ziffern } 4} + 1 \\ &= \underbrace{44\dots 488\dots 89}_{k \text{ Ziffern } 4 \ k-1 \text{ Ziffern } 8} > \underbrace{44\dots 41}_{2k-1 \text{ Ziffern } 4}. \end{aligned}$$

2. Beweis: Es ist $a_n = \underbrace{4\dots 441}_{n \text{ Ziffern } 4} = \underbrace{4\dots 44, \bar{4} - 3, \bar{4}}_{n+1 \text{ Ziffern } 4} = 10^{n+1} \cdot \frac{4}{9} - \frac{31}{9}$.

Die Aufgabenstellung bezieht sich auf Zahlen der Form a_{2n+1} , $n \geq 0$. Es ist also gefragt, ob es ein n gibt, für das die Gleichung

$$p^2 = a_{2n+1} = 10^{2n+2} \cdot \frac{4}{9} - \frac{31}{9}$$

eine ganzzahlige Lösung p hat. Multiplikation beider Seiten mit 9 und Umstellen ergibt die äquivalente Gleichung

$$(2 \cdot 10^{n+1})^2 - (3p)^2 = 31.$$



Die Annahme, dass diese Gleichung eine Lösung hat, kann man auf verschiedene Arten zum Widerspruch führen:

Variante 1: Angenommen, es gäbe ein solches p . Dann ist offensichtlich $3p < 2 \cdot 10^{n+1}$. Die größte durch 3 teilbare Zahl, die kleiner ist als $(2 \cdot 10^{n+1})^2$, ist $(2 \cdot 10^{n+1})^2 - 2$, also gilt $3p \leq 2 \cdot 10^{n+1} - 2$. Eine Abschätzung ergibt sofort den Widerspruch

$$(2 \cdot 10^{n+1})^2 - (3p)^2 \geq (2 \cdot 10^{n+1})^2 - (2 \cdot 10^{n+1} - 2)^2 \geq 8 \cdot 10^{n+1} - 4 \geq 76 > 31.$$

Variante 2: Es gilt

$$(2 \cdot 10^{n+1})^2 - (3p)^2 = 31 \Leftrightarrow [(2 \cdot 10^{n+1}) + (3p)] \cdot [(2 \cdot 10^{n+1}) - (3p)] = 31.$$

Die Zahl 31 ist hier als Produkt zweier ganzzahliger Faktoren dargestellt. Da 31 Primzahl ist, muss ein Faktor 1, der andere Faktor 31 sein. Nun ist $[(2 \cdot 10^{n+1}) + (3p)] > [(2 \cdot 10^{n+1}) - (3p)]$, also ist $[(2 \cdot 10^{n+1}) - (3p)] = 1$ und $[(2 \cdot 10^{n+1}) + (3p)] = 31$. Addition dieser beiden Gleichungen führt zum Widerspruch $4 \cdot 10^{n+1} = 32$, also $10^{n+1} = 8$.

Bemerkung: Diese Beweisführung setzt voraus, dass man mit unendlichen Dezimalbrüchen genau so rechnen kann wie mit endlichen.

Variante (umgeht das Rechnen mit unendlichen Dezimalbrüchen): Falls $\underbrace{4 \dots 441}_{n \text{ Ziffern } 4}$ Quadratzahl ist,

dann auch $3^2 \cdot \underbrace{4 \dots 441}_{n+1 \text{ Ziffern}} = \underbrace{39 \dots 969}_{n+1 \text{ Ziffern}} = (2 \cdot 10^{(n+1)/2})^2 - 31$. Für ungerade n (insbesondere ist dann

$n \geq 1$), ist $(2 \cdot 10^{(n+1)/2})^2$ ganzzahlige Quadratzahl, die nächstkleinere ganzzahlige Quadratzahl ist

$$(2 \cdot 10^{(n+1)/2} - 1)^2 = 4 \cdot 10^{n+1} - 2 \cdot 2 \cdot 10^{(n+1)/2} + 1 \leq (2 \cdot 10^{(n+1)/2} - 1)^2 - 39 \leq (2 \cdot 10^{(n+1)/2})^2 - 31.$$

Damit liegt $\underbrace{4 \dots 441}_{n \text{ Ziffern } 4}$ zwischen zwei aufeinander folgenden Quadratzahlen, kann also selbst nicht Quadratzahl sein.

3. Beweis: Mit a_n , $n \geq 1$, sei die Zahl $44\dots41$ mit n Ziffern 4 gefolgt von einer Ziffer 1 bezeichnet. Die Aufgabenstellung beschäftigt sich also mit den Zahlen a_{2n-1} , $n \geq 1$, diese Zahlen haben $2n$ Stellen. Ferner sei $a := \frac{4}{9}$, also $\sqrt{a} = \frac{2}{3} = 0,\bar{6}$ und $\varepsilon = \varepsilon(n) := \frac{31}{9} \cdot 10^{-2n} = 3,\bar{4} \cdot 10^{-2n}$. Dann ist nach gängigen Regeln für das Rechnen mit periodischen Dezimalbrüchen

$$a_{2n-1} = 44\dots41 = 44\dots4,\bar{4} - 3,\bar{4} = 10^{2n} \left(\frac{4}{9} - \frac{31}{9} \cdot 10^{-2n} \right) = 10^{2n} (a - \varepsilon).$$

Hieraus schließen wir

$$\sqrt{a_{2n-1}} = \sqrt{10^{2n} (a - \varepsilon)} < 10^n \cdot \sqrt{a} = 66\dots66,\bar{6} < 66\dots67,0 \quad \text{mit } n \text{ Ziffern vor dem Komma. (1)}$$

Andererseits gilt allgemein für $a > 0$, $0 < \varepsilon \leq \sqrt{a}$

$$\sqrt{a - \varepsilon} < \sqrt{a - \varepsilon} \Leftrightarrow a - 2\varepsilon\sqrt{a} + \varepsilon^2 < a - \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon < 2\sqrt{a} - 1,$$

Anwendung auf die oben definierten Werte ergibt (es ist $0 < \varepsilon = \frac{31}{9} \cdot 10^{-2n} \leq \sqrt{a} = 10^n \cdot \frac{2}{3}$):

$$\begin{aligned} \sqrt{a_{2n-1}} &= \sqrt{10^{2n} \cdot (a - \varepsilon)} = 10^n \cdot \sqrt{(a - \varepsilon)} > 10^n \cdot (\sqrt{a} - \varepsilon) = 10^n \cdot \frac{2}{3} - \frac{31}{9} \cdot 10^{-n} \\ &> 66\dots66,\bar{6} - 4 \cdot 10^{-n} > 66\dots66 \quad \text{mit } n \text{ Ziffern.} \end{aligned} \quad (2)$$



Aus (1) und (2) schließen wir, dass $66\dots66^2 < a_{2n-1} < 66\dots67^2$, d.h. a_{2n-1} liegt zwischen zwei aufeinander folgenden Quadratzahlen, kann also selbst keine Quadratzahl sein.

4. Beweis (Rest bei Division durch 11): Wir verwenden die bekannte Teilbarkeitsregel für die Zahl 11:

T_{11} : Jede natürliche Zahl n mit der Darstellung $n = z_k z_{k-1} \dots z_2 z_1 z_0$ im Dezimalsystem lässt bei Division durch 11 den gleichen Rest wie ihre alternierende Quersumme

$$aQ(n) := z_0 - z_1 + z_2 - z_3 + z_4 - \dots = \sum_{0 \leq i \leq k} (-1)^i z_i.$$

Beweis: Es ist $10^i \equiv (-1)^i \pmod{11}$, also

$$n = z_0 \cdot 10^0 + z_1 \cdot 10^1 + z_2 \cdot 10^2 + z_3 \cdot 10^3 + \dots + z_k \cdot 10^k \equiv \sum_{0 \leq i \leq k} (-1)^i z_i \pmod{11}$$

Die Zahl $44\dots41$ lässt also den gleichen Rest wie $1 - 4 + (4-4) + \dots + (4-4) = -3 = -1 \cdot 11 + 8$, also 8. Aber keine Quadratzahl lässt den Rest 8, wie man schnell im Kopf nachrechnet: Jede natürliche Zahl n lässt bei Division durch 11 einen der Reste $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5$, also lässt n^2 einen der Reste $0^2 = 0, (\pm 1)^2 = 1, (\pm 2)^2 = 4, (\pm 3)^2 = 9, (\pm 4)^2 = 16 \equiv 5 \pmod{11}, (\pm 5)^2 = 25 \equiv 3 \pmod{11}$, also niemals 8.

Bemerkungen: Folgender Ansatz führt möglicherweise in eine Sackgasse: Es ist gefragt, ob

$$z^2 = a_n = \underbrace{4 \dots 441}_{n \text{ Ziffern } 4} = \underbrace{4 \dots 44}_{n+1 \text{ Ziffern } 4} - 3 = 4 \cdot \frac{10^{n+1} - 1}{9} - 3$$

für irgendein n eine ganzzahlige Lösung z hat (wir lassen die Bedingung " n ungerade" zunächst weg). Da z offensichtlich ungerade sein muss, setzen wir $z = 2k + 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} (2k+1)^2 &= 4 \cdot \frac{10^{n+1} - 1}{9} - 3 && | \cdot 9 \\ \Leftrightarrow 9(2k+1)^2 &= 4 \cdot 10^{n+1} - 31 && | -9 \\ \Leftrightarrow (3(2k+1))^2 - 9 &= 4 \cdot 10^{n+1} - 40 \\ \Leftrightarrow (6k+3+3)(6k+3-3) &= 40 \cdot (10^n - 1) \\ \Leftrightarrow (6k+6)(6k) &= 40 \cdot (10^n - 1) && | : (8 \cdot 9) \\ \Leftrightarrow \frac{k(k+1)}{2} &= 5 \cdot \frac{10^n - 1}{9} = \underbrace{5 \dots 55}_{n \text{ Ziffern } 5}. \end{aligned}$$

Unsere Aufgabe wird also zurückgeführt auf die Frage, ob es Dreieckszahlen gibt, deren Dezimaldarstellung aus einer Folge lauter gleicher Ziffern 5 besteht. Eine allgemeinere Suche nach Dreieckszahlen mit Folgen gleicher Ziffern führt zu 1, 3, 6, 55, 66 und 666, eine weitere Suche scheint erfolglos. Die Suche, ob diese Frage schon gelöst ist, führt über eine Eingabe dieser Zahlen in die EOIS¹⁾ zum unten angegebenen Artikel²⁾, in dem behauptet wird, dass dies wirklich die einzigen solchen Dreieckszahlen sind. Der Beweis hierfür ist allerdings fehlerhaft: Dort wird obige Äquivalenzumformung rückwärts geführt (nicht nur für die Ziffer 5) und dann für den Fall $55\dots5$ fälschlich behauptet, dass Quadratzahlen auf höchstens acht Ziffern $\dots44\dots41$ enden können. Eine einfache Suche per Computer (auch mit Excel möglich) ergibt leicht Gegenbeispiele.

¹⁾ <https://oeis.org/search?q=1%2C3%2C6%2C55%2C66%2C666&language=english&go=Search>

²⁾ D. Ballew and R. Weger, Triangular Numbers with Repeated Digits, Proc. S.D. ACAD. Sci., Vol. 51 (1972), p. 52 – 55. <https://www.sdaos.org/wp-content/uploads/pdfs/Vol%2051%201972/72p52.pdf>



Unserem Korrektor Christian Hercher gelang ein Beweis für die Behauptung, dass es außer $a_0 = 1 = 1^2$ und $a_2 = 441 = 21^2$ keine Quadratzahlen der Form $44\dots 41$ mit einer geraden Anzahl Ziffern 4 gibt. Hier eine Skizze:

Analoge Argumentation wie im 2. Beweis führt zur Frage, für welche n es ein p gibt, sodass

$$p^2 = 10^{2n+1} \cdot \frac{4}{9} - \frac{31}{9} \Leftrightarrow (3p)^2 - 10 \cdot (2 \cdot 10^n)^2 = -31,$$

also zur Frage nach ganzzahligen Lösungen der Pellischen Gleichung $x^2 - 10y^2 = -31$ (*) mit der zusätzlichen Nebenbedingung $x = 3p$ und $y = 2 \cdot 10^m$ für geeignete p, m . Eine einfache Betrachtung *mod* 3 zeigt, dass $3|x$ für jede Lösung erfüllt ist. Probieren führt zum Ergebnis, dass $(x, y) = (3, 2)$ und $(x, y) = (63, 20)$ die einzigen Lösungen mit $1 \leq y \leq 33$ sind. Diese führen zu $a_0 = (3/3)^2 = 1$ und $a_2 = (63/3)^2 = 21^2 = 441$. Mit üblichen Lösungsverfahren für Pellische Gleichungen erhält man:

Die verwandte Gleichung $1 = r^2 - 10s^2$ (**) hat eine Lösung $(r, s) = (19, 6)$, d.h. es ist

$$\begin{aligned} -31 \cdot 1 &= \{(x + y\sqrt{10}) \cdot (x - y\sqrt{10})\} \cdot \{(19 + 6\sqrt{10}) \cdot (19 - 6\sqrt{10})\} \\ &= (19x + 6 \cdot 10y)^2 - 10 \cdot (6x + 19y)^2 = (x^*)^2 - 10 \cdot (y^*)^2, \end{aligned}$$

d.h. wenn (x, y) positiv ganzzahlige Lösung von (*) ist, dann ist auch (x^*, y^*) mit $x^* = 19x + 6 \cdot 10y$ und $y^* = 6x + 19y$ positiv ganzzahlige Lösung von (*), zusätzlich ist $x^* > x$ und $y^* > y$. Wir erhalten also durch wiederholtes Anwenden dieser Formel rekursiv unendlich viele positive ganzzahlige Lösungen von (*).

Diese Rekursion lässt sich unter bestimmten Bedingungen umkehren: Sei (x^*, y^*) positiv ganzzahlige Lösung. Dann ist (x', y') mit $x' = 19x^* - 6 \cdot 10y^*$ und $y' = -6x^* + 19y^*$ ganzzahlige Lösung von (*), denn es ist dann $x^* = 19x' + 6 \cdot 10y'$ und $y^* = 6x' + 19y'$. Mit dieser Substitution lässt sich obige Umformung rückwärts durchführen. Allerdings ist dabei $x' < 0$ und $y' < 0$ nicht ausgeschlossen, ebenso wissen wir nicht, ob $y' < y^*$. Wenn aber $60/19 < x^*/y^* < 19/6$, ist $x' > 0$ und $y' > 0$. Gleichzeitig ist dann auch $y' < y$, weil $y' = -6x^* + 19y^* = y^* - 6x^* + 18y^* < y^* \Leftrightarrow x^*/y^* > 3$, was wegen $x^*/y^* > 60/19 > 3$ stets gegeben ist.

Zu jeder Lösung (x^*, y^*) wenden wir diese umgekehrte Rekursion so oft an, bis wir nach endlich vielen Schritten zu einer Lösung (x', y') von (*) kommen, für die $x'/y' \leq 60/19$ (***) oder $x'/y' \geq 19/6$ (****) gilt. Aus (***) folgt

$$-31 = x'^2 - 10y'^2 \leq [(60/19)^2 - 10]y'^2 = -(10/361)y'^2, \text{ also } |y'| \leq 33,$$

der Fall (****) kann nicht eintreten, weil andernfalls $-31 = x'^2 - 10y'^2 \geq [(19/6)^2 - 10]y'^2 > 0$.

Hieraus schließt man, dass jede positive ganzzahlige Lösung von (*) mittels obiger Rekursion aus einer Lösung (x, y) von (*) mit $1 \leq y \leq 33$ generiert werden kann, also nur aus einer der beiden Lösungen $(x_0, y_0) = (3, 2)$ und $(x_0, y_0) = (63, 20)$. Die Werte, die diese Rekursionen ergeben, bestimmt man *mod* 7 und *mod* 8 und stellt fest, dass $8|y_n \Rightarrow 7|y_n$. Da $y_n = 2 \cdot 10^m$ mit $m \geq 3$ stets durch 8 teilbar ist, aber nie durch 7, schließt man, dass y_n niemals von der Form $y_n = 2 \cdot 10^m$ ist. Die Fälle $m \leq 2$ überprüft man von Hand.

Christian Hercher konnte mit analogen Methoden zeigen, dass 1, 3, 6, 55, 66, 666 wirklich die einzigen Dreieckszahlen sind, deren Dezimaldarstellung eine Folge gleicher Ziffern ist.



Aufgabe 3: Gegeben ist ein Parallelogramm $ABCD$ mit Diagonalschnittpunkt M derart, dass der Umkreis des Dreiecks ABM die Strecke AD in einem von A verschiedenen Punkt E schneidet und der Umkreis des Dreiecks EMD die Strecke BE in einem von E verschiedenen Punkt F schneidet.

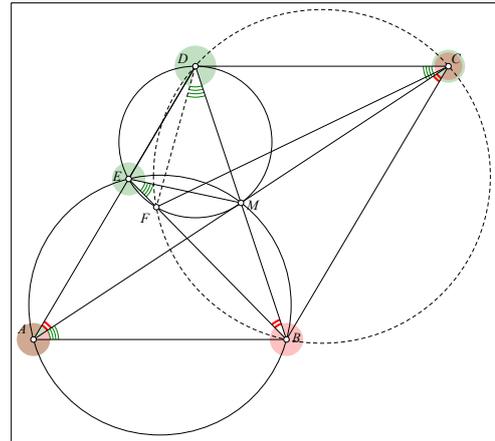
Zeige: Die Winkel $\angle ACB$ und $\angle DCF$ sind gleich groß.

Bemerkung: Die Aussage gilt auch, wenn man schwächer voraussetzt, dass E auf der Geraden AD und F auf der Geraden EB liegt. Die Einschränkung auf die Strecken AD und EB dient dazu, eine längere Diskussion der möglichen Lagebeziehungen zu vermeiden.

1. Beweis (Umfangswinkelsatz, Sehnenviereck): Eine charakteristische Eigenschaft des Parallelogramms ist, dass sich die Diagonalen gegenseitig halbieren. M ist also der Mittelpunkt der Strecke BD .

Wir betrachten zunächst nur das Dreieck ABD und den Mittelpunkt M auf der Seite BD , wobei der Umkreis von Dreieck ABM die Seite AD im Punkt E schneidet.

Da nach Voraussetzung der Punkt E auf der Strecke AD liegt und von A verschieden ist, liegen die Punkte A, B, M und E in dieser Reihenfolge auf dem Umkreis des Dreiecks ABM , außerdem verläuft die Strecke BE durch das Innere des Dreiecks ABD , insbesondere liegt M nicht auf ihr. Nun liegt F auf der Strecke EB und ist von E verschieden, also liegen E, F, M und D in dieser Reihenfolge auf dem Umkreis des Dreiecks EMD . Die Strecke EM ist gemeinsame Sehne dieser beiden Umkreise.



Nun können wir drei Mal den Umfangswinkelsatz anwenden: Es gilt

$$\text{über der Sehne } EM \text{ im Umkreis von } ABM: \angle MAE = \angle MBE$$

$$\text{über der Sehne } MB \text{ im Umkreis von } ABM: \angle BAM = \angle BEM$$

$$\text{über der Sehne } FM \text{ im Umkreis von } EMD: \angle FEM = \angle FDM.$$

Da F im Innern der Strecke BE liegt und M Schnittpunkt der Strecken AC und BD ist, gilt nun mit Winkelsummensatz im Dreieck BDF

$$\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = \angle FDB + \angle DBF = 180^\circ - \angle BFD,$$

d.h. es gilt $\angle BFD + \angle BAD = 180^\circ$.

Mit Umfangswinkelsatz am Umkreis des Dreiecks DFB folgt: Die Punkte C^* auf demjenigen Bogen über der Sehne BD , der den Punkt F nicht enthält, sind genau die Punkte, für die $\angle DC^*B = \angle BAD$ gilt.

Da das Parallelogramm punktsymmetrisch zum Schnittpunkt M der Diagonalen ist, gilt $\angle DCB = \angle BAD$, d.h. die Ecke C liegt auf dem genannten Bogen über der Sehne BD und die Punkte B, C, D und F liegen in dieser Reihenfolge auf dem Umkreis von Dreieck DFB .

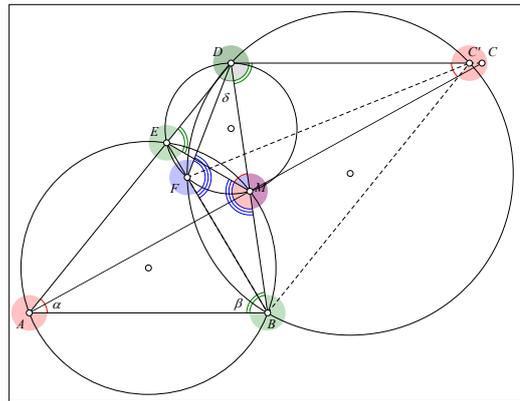
Mit Umfangswinkelsatz über der Sehne DF schließen wir schnell:

$$\angle DCF = \angle DBF = \angle CAD = \angle ACB,$$

das ist die Behauptung.



Variante: Wir betrachten zunächst ein beliebig vorgegebenes Dreieck ABD , die Innenwinkel bei A , B und D seien mit α bzw. β bzw. δ bezeichnet. Weiter wählen wir zwei Punkte E und M auf den Strecken AD bzw. BD , verlangen dabei zunächst nur, dass die Gerade BE den Umkreis von Dreieck EMD in einem Punkt F schneidet, der zwischen E und B liegt. Nun schneiden sich die Trägergeraden der Sehnen DM und EF im Punkt B und mit Sehnen-Tangenten-Satz gilt $\overline{BM} \cdot \overline{BD} = \overline{BF} \cdot \overline{BE}$, also äquivalent $\overline{BM} : \overline{BF} = \overline{BE} : \overline{BD}$. Da zusätzlich $\angle DBF = \angle MBE$, stimmen die Dreiecke DBF und EMB im Verhältnis zweier Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein, sind also ähnlich. Insbesondere gilt $\angle BFD = \angle EMB$.



Nun betrachten wir den Fall, dass E und M auf den Seiten AD bzw. BD zusätzlich die Bedingung erfüllen, dass $ABME$ ein Sehnenviereck ist. Dann ist $\angle BFD = \angle EMB = 180^\circ - \alpha$ und über der Sehne ME gilt nach Umfangswinkelsatz $\angle MAE = \angle MBE = \angle DBF$.

Nun sei C' der von D verschiedene Schnittpunkt des Umkreises von Dreieck DFB mit der Parallelen zu AB durch D . Dann ist $BCDF$ ein Sehnenviereck und mit Umfangswinkelsatz über der Sehne DF gilt $\angle DBF = \angle DCF$.

Für die Innenwinkel im Dreieck $DC'B$ gilt $\angle BDC' = \beta$ (Z-Winkel an den Parallelen $AB \parallel DC'$), und weiter gilt $\angle DC'B = 180^\circ - \angle BFD = 180^\circ - \angle EMB = \alpha$ (das Viereck $FBC'D$ ist Sehnenviereck). Nach Satz von der Innenwinkelsumme im Dreieck muss der dritte Innenwinkel im Dreieck $DC'B$ die Größe δ haben. Also gilt $\angle BAD + \angle CBA = \angle BAD + \angle CBD + \angle DBA = \alpha + \delta + \beta = 180^\circ$ und somit $AD \parallel BC$.

Also ist $ABC'D$ ein Parallelogramm, in dem BD eine Diagonale ist. Da ein Parallelogramm punktsymmetrisch zum Diagonalschnittpunkt ist, gilt $\angle AC'B = \angle C'AD$.

Wenn wir also M so wählen, dass M der Mittelpunkt von BD ist, so ist M der Diagonalschnittpunkt im Parallelogramm $ABC'D$ und es gilt $\angle C'AD = \angle MAE = \angle MBE = \angle DBF = \angle DCF$.

Schließlich stellen wir fest, dass es genau einen Punkt C auf der Parallelen zu AB durch D gibt, für den $ABCD$ ein Parallelogramm mit Diagonale BD ist. Es ist also $C = C'$.

Bemerkung: Wenn M auf BD und E auf AD so liegen, dass $ABME$ eine Sehnenviereck ist, schließt die Strecke EM mit den Seiten AD und BD die Winkel β bzw. α ein. Das Bild der Geraden EM bei Spiegelung an der Winkelhalbierenden ist also parallel zu AB , deswegen wird EM auch als "Antiparallele" bezeichnet. Man kann mit einfacher Winkeljagd im Dreieck EMD zeigen, dass der Mittelpunkt des Umkreises von Dreieck EMD auf der Höhe h_d des Dreiecks ABD liegt, d.h. dass DC die Tangente an den Umkreis von Dreieck ABD ist.



2. Beweis (Ähnlichkeit von Dreiecken): Wir werden zeigen, dass die Dreiecke BCM und FCD ähnlich sind. Dann gilt – es liegt ja M auf der Strecke AC – wie gewünscht $\angle ACB = \angle MCB = \angle DCF$.

Zunächst zeigen wir hierzu, dass auch die Dreiecke ABM und DFM ähnlich sind, dazu argumentieren wir mit Sehnenviereck $ABME$ im Umkreis des Dreiecks ABM und Sehnenviereck $EFMD$ im Umkreis des Dreiecks EMD :

Im Sehnenviereck $ABME$ ergänzen sich die gegenüberliegenden Winkel bei E und bei B zu 180° , d.h. der "Außenwinkel" $\angle MED$ des Vierecks $ABME$ bei E ist so groß wie der Innenwinkel $\angle MBA$ an der gegenüberliegenden Ecke B . Zusammen mit dem Umfangswinkelsatz über der Sehne MD des Umkreises von EMD gilt also $\angle MBA = \angle MED = \angle MFD$, und in den genannten Sehnenvierecken gilt $\angle BAM = \angle BEM = \angle FEM = \angle FDM$.

Also stimmen in den Dreiecken ABM und DFM die Innenwinkel nicht nur bei B und F überein, sondern auch bei A und D , d.h. sie sind ähnlich.

(Bei dieser Argumentation wurde noch nicht verwendet, dass M der Mittelpunkt von BD ist, auch ist die Lage von C bis hier noch nicht relevant.)

Im Folgenden benötigen wir die Voraussetzung, dass $ABCD$ ein Parallelogramm ist. Insbesondere ist $AB \parallel CD$ und somit $\angle DBA = \angle BDC$. In den Dreiecken BCM und FCD können wir nun schließen:

$$\angle BMC = \angle BAM + \angle MBA \quad (\text{Außenwinkelsatz im Dreieck } ABM), \text{ und}$$

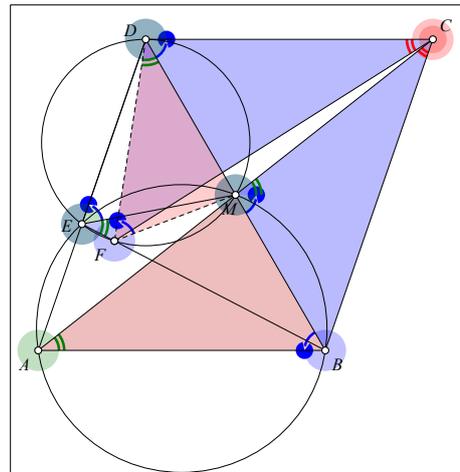
$$\angle FDC = \angle FDM + \angle BDC = \angle BAM + \angle DBA = \angle BMC \quad (\text{Wechselwinkel an } AB \parallel CD).$$

d.h. die Dreiecke BCM und FCD haben bei M und D die gleichen Innenwinkel. Es genügt nun nachzuweisen, dass $MC : MB = CD : DF$.

Weil nun $ABCD$ ein Parallelogramm ist, folgt insbesondere $MC = MA$ ¹⁾, $MD = MB$ ²⁾, $DC = AB$ ³⁾, $\angle MBA = \angle DBA = \angle BDC$ ⁴⁾, zusätzlich verwenden wir von oben, dass die Dreiecke ABM und DFM ähnlich sind.⁵⁾ Dies verwenden wir in folgender Gleichungskette:

$$MC : MB \stackrel{1)}{=} MA : MB \stackrel{5)}{=} MD : MF \stackrel{2)}{=} MB : MF \stackrel{5)}{=} AB : DF \stackrel{3)}{=} CD : DF,$$

das war zu zeigen.





Aufgabe 4: Für positive ganze Zahlen p, q und r sind $p \cdot q \cdot r$ Einheitswürfel gegeben. Durch jeden dieser Würfel wird ein Loch entlang einer Raumdiagonalen gebohrt, anschließend werden die Würfel an einem sehr dünnen Faden mit Länge $p \cdot q \cdot r \cdot \sqrt{3}$ wie eine Perlenschnur aufgefädelt. Nun sollen die Einheitswürfel zu einem Quader mit den Seitenlängen p, q und r zusammengelegt werden, ohne dass der Faden zerreißt.

a) Für welche Zahlen p, q und r ist dies möglich?

b) Für welche Zahlen p, q und r ist dies so möglich, dass Anfang und Ende des Fadens zusammenfallen?

Anmerkung: Die Richtigkeit der Antwort ist zu beweisen.

Bezeichnungen: "Raumdiagonalen, entlang derer das Loch gebohrt wurde", verkürzen wir zu "Lochdiagonale".

Ein Zusammenlegen der aufgefädelten Einheitswürfel, das die oben genannten Bedingungen erfüllt, nennen wir *zulässig*.

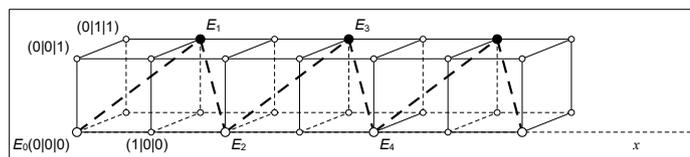
Antwort: a) Für jedes Tripel (p, q, r) positiver ganzer Zahlen gibt es ein zulässiges Zusammenlegen.
 b) Für jedes Tripel (p, q, r) positiver ganzer Zahlen, bei dem wenigstens zwei der Zahlen p, q, r gerade sind und nur für diese gibt es ein zulässiges Zusammenlegen, bei dem Anfangs- und Endpunkt des Fadens zusammenfallen.

1. Beweis: Die Würfel bezeichnen wir in der Reihenfolge des Auffädels mit $W_1, W_2, \dots, W_{(pqr)}$. Da die Länge der Raumdiagonale des Einheitswürfels $\sqrt{3}$ ist und genau pqr Würfel aufgefädelt werden, hat die Perlenschnur kein "Spiel", d.h. der Endpunkt der Lochdiagonalen eines Würfels ist gleichzeitig Anfangspunkt der Lochdiagonalen des in der Kette folgenden Würfels. Die Ecken der Würfel, durch die die Perlenschnur verläuft, bezeichnen wir fortlaufend mit $E_0, E_1, \dots, E_{(pqr)}$. Dabei ist nicht ausgeschlossen, dass die Schnur eine Ecke mehrfach durchläuft.

Bei unseren Betrachtungen legen wir stets einen der Einheitswürfel der Kette so in ein dreidimensionales kartesisches Achsenkreuz, dass die Endpunkte der Lochdiagonalen die Koordinaten $(0|0|0)$ und $(1|1|1)$ haben und jede Kante parallel zu einer der Koordinatenachsen ist. Wenn man die Würfel zu einem Quader mit Kantenlängen p, q, r zusammenlegen will, muss man notwendigerweise auch alle anderen Würfel so legen, dass jede Kante parallel zu einer der Koordinatenachsen ist. Dann sind die Koordinaten aller Ecken der Einheitswürfel ganzzahlig.

Verfolgen wir nun den Verlauf der Schnur von einer Ecke E_i zur nächsten Ecke E_{i+1} , so stellen wir fest, dass sich jede Koordinate um genau 1 verändert. Insbesondere sind bei Ecken mit geradem Index alle drei Koordinaten ganzzahlig und gerade, und bei Ecken mit ungeradem Index sind alle Koordinaten ganzzahlig und ungerade.

Eine *s*-*Stange* sei eine Anordnung von s hintereinander auf der Schnur aufgefädelten Einheitswürfeln, die einen Quader mit Seitenlängen $s, 1, 1$ bilden (vgl. Figur mit $s = 6$, Anfangsecke $E(0|0|0)$, Ecken mit geraden Koordinaten weiß, Schnur dick gestrichelt dargestellt.). Eine solche Stange kann offensichtlich für alle s gebildet werden, ohne dass der Faden zerreißt. Wir stellen fest, dass für ungerade s Eintritts- und Austrittspunkt der Schnur die Ecken einer Raumdiagonalen des Quaders sind, für gerade s liegen Ein- und Austrittspunkt an einer Kante der Länge s .



Eine *st*-*Platte* sei analog eine Anordnung von st hintereinander aufgefädelten Einheitswürfeln, die einen Quader mit den Kantenlängen $s, t, 1$ bilden. Liegt diese Platte zwischen den Ebenen $z = h$ und $z = h + 1$, sprechen wir von einer *st*-Platte in Höhe h . Für welche s, t eine solche Platte gebildet werden kann, ohne dass die Schnur zerreißt, werden wir weiter unten zeigen.

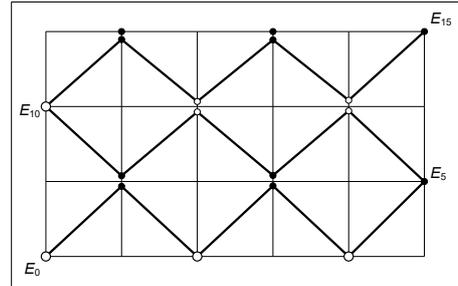


zu a) (Angabe einer Konstruktion für beliebige p, q, r):

Fall 1: Mindestens zwei der Zahlen p, q, r sind ungerade, o.B.d.A. seien p, q beide ungerade, r beliebig.

Der Quader im kartesischen Achsenkreuz, der durch die Ecken $(0|0|0)$, $(p|0|0)$, $(0|q|0)$, $(0|0|r)$ definiert ist, hat die Kantenlängen p, q, r . Diesen füllen wir folgendermaßen mit den Würfeln auf der Perlenschnur:

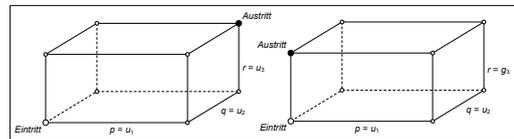
Aus den Würfeln W_1, W_2, \dots, W_p bilden wir eine p -Stange und legen sie so in diesen Quader, dass $E_0 = (0|0|0)$ und die restlichen Würfel entlang der Kante zwischen den Ecken $(0|0|0)$ und $(p|0|0)$ liegen. Da p ungerade ist, hat E_p nun die Koordinaten $(p|1|1)$ (vgl. Figur). Wir können nun die p -Stange als einen Quader mit Seitenlängen 1, 1 und p betrachten, durch den ein Faden durch Anfangs- und Endpunkt einer Raumdiagonalen führt.



Genauso, wie wir vorher p Einheitswürfel (dies sind ja auch Quader, bei dem ein Faden durch Anfangs- und Endpunkt einer Raumdiagonalen führt) entlang der positiven x -Achse zusammengelegt haben, können wir nun q solche p -Stangen entlang der positiven y -Achse legen, ohne dass die Schnur zerreißt (vgl. Figur, sie stellt die Draufsicht dar mit $p = 5, q = 3$, schwarze Punkte stehen für Punkte mit z -Koordinate 1, weiße für Punkte mit z -Koordinate 0. Die Schnur (genauer: die Projektion der Schnur auf die Bodenfläche) wird durch die dicke Linie dargestellt). Die Schnur durchläuft dabei der Reihe nach die Ecken $E_0(0|0|0), E_p(p|1|1), E_{2p}(0|2|0), E_{3p}(p|3|1), \dots$, und da pq ungerade ist, ist die letzte Ecke $E_{pq}(p|q|1)$.

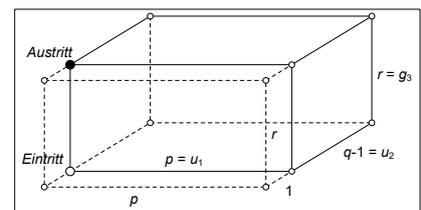
Es entsteht also eine pq -Platte in Höhe 0, dies ist wieder ein Quader, bei dem der Faden durch Anfangs- und Endpunkt einer Raumdiagonalen geführt wird. Nun bilden wir mit den nächsten pq Einheitswürfeln eine weitere pq -Platte, und da die z -Koordinate von E_{pq} um eins größer ist als die z -Koordinate von E_0 , kann man diese auf die soeben gebildete Platte als pq -Platte der Höhe 1 legen ohne den Faden zu zerreißen. Der Endpunkt der Schnur ist nun $(0|0|2)$. Dies wiederholen wir, bis der Quader mit r Platten vollständig gefüllt ist.

Zusammenfassend stellen wir fest: Für p, q ungerade und r beliebig, können wir die Würfelkette so zusammenlegen, dass die Würfel einen Quader mit den Kantenlängen p, q, r bilden. Ist dabei r ungerade, liegen Eintritt und Austritt der Schnur auf einer Raumdiagonalen des Quaders, und ist r gerade, sind Eintritts- und Austrittspunkt die Endpunkte einer Kante der Länge r .



Fall 2: Genau eine der Zahlen ist ungerade, o.B.d.A. seien p ungerade, q und r beide gerade.

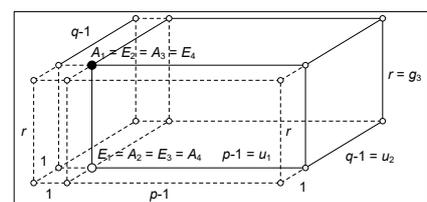
Nun ist $q-1$ ungerade, wir können also wie im Fall 1 beschrieben die ersten $p(q-1)r$ Würfel der Würfelkette zu einem Quader mit den Kantenlängen $p, (q-1)$ und r zusammenlegen, dabei liegen Eintritt und Austritt der Schnur an einer Kante der Länge r wie in der Figur mit weißem und schwarzem Punkt dargestellt.



Mit den restlichen pr Würfeln legen wir einen Quader mit Seitenlängen $p, 1$ und r zusammen. Da p und 1 ungerade, aber r gerade ist, ist dies möglich mit dem im Fall 1 beschriebenen Algorithmus. Weil die Austrittsecke des $p \times (q-1) \times r$ -Quaders identisch ist mit der Eintrittsecke des $p \times 1 \times r$ -Quaders, können wir die beiden Quader zu einem $p \times q \times r$ -Quader zusammenlegen. Zusätzlich stellen wir fest, dass dabei der Endpunkt der Schnur mit dem Anfangspunkt der Schnur zusammenfällt.

Fall 3: Alle restlichen Fälle, also alle drei Zahlen sind gerade.

Es sind $p-1$ und $q-1$ beide ungerade, also können wir nach den Algorithmen im Fall 1 die ersten $(p-1)(q-1)r$ Würfel der Würfelkette zu einem ersten Quader mit den Kantenlängen $(p-1), (q-1)$ und r zusammenlegen (Eintritts- und Austrittspunkt der Schnur sind in der Figur mit E_1 bzw. A_1 bezeichnet). Anschließend legen wir nach Algorithmus in Fall 2 die folgenden Würfel so zusammen, dass eine $(p-1)r$ -Platte entsteht, die wir so an den ersten Quader anlegen, dass ein Quader mit Kantenlängen $p-1, q, r$ entsteht. Da $p-1$ gerade, ist der Austrittspunkt nun E_1 . Den Algorithmus des Falls 2 wenden wir nun



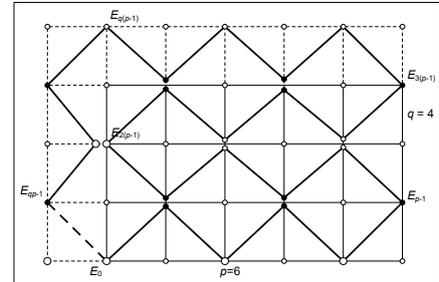


noch zwei Mal an auf die in der Figur eingezeichneten Quader mit den Längen $1, q-1, r$ sowie $1, 1, r$; dabei wechselt der Austrittspunkt von E_1 zu A_1 und von dort wieder zurück zu E_1 .

Zusammenfassend stellen wir fest, dass das zulässige Zusammenlegen der Würfelkette für alle p, q, r möglich ist, und dass, wenn mindestens zwei der Zahlen p, q, r gerade sind, dies auf eine Art möglich ist, bei der Anfangs- und Endpunkt der Schnur zusammenfallen.

Variante (skizziert, fasst Fall 2 und 3 zusammen): Mindestens zwei der Zahlen p, q, r seien gerade, o.B.d.A. sei p, q gerade, r beliebig:

Die ersten $(p-1)(q-1)$ Würfel legen wir wie in Fall 1 in $q-1$ $(p-1)$ -Stangen zu einer $(p-1)(q-1)$ -Platte und ergänzen dies durch die nächsten $p+q-2$ Würfeln zu einer pq -Platte, bei der der letzte Eckwürfel fehlt; die Lage der einzelnen Würfel ist durch die Projektion der Lochdiagonalen (schwarze Linie) vorgegeben. (weiße Punkte in Ebene $z=0$, schwarze Punkte in Ebene $z=1$).



Nun sind $pq-1$ Würfel zusammengelegt. Wenn $r=1$, nehmen wir W_{pq} und legen ihn wie gestrichelt angedeutet in die Ebene $z=0$ und sind fertig. Der Endpunkt des Fadens fällt nun mit E_0 zusammen. Wenn $r > 1$, legen wir die nächsten $pq-1$ Würfel in Ebene $z=1$ und folgen dabei wieder der schwarzen Linie, aber in umgekehrter Reihenfolge, bis wir wieder die Position über E_0 erreichen, von da an wieder eine Ebene höher wieder zurück zu E_{pq-1} usw., bis wir die Höhe r erreicht haben. Wenn r ungerade ist, sind wir über E_{qp-1} angekommen, wenn r gerade ist, über E_0 . In beiden Fällen formen wir mit den restlichen r Würfeln eine r -Stange. Diese passt genau in die Lücke über dem bisher freigebliebenen Feld. Man macht sich auch leicht klar, dass der Endpunkt des Fadens in beiden Fällen wieder E_0 ist.

zu b) Die Konstruktion im Fall 2 und 3 aus Teil a) zeigt, dass der Endpunkt des Fadens mit dem Anfangspunkt zusammenfallen kann, wenn mindestens zwei Koordinaten gerade sind.

Es bleibt zu zeigen, dass dies in allen anderen Fällen nicht möglich ist.

Fall 1: Alle drei Zahlen p, q, r sind ungerade: Läuft man entlang des Fadens die Ecken der Würfel ab, so wechselt bei jeder Ecke jede der drei Koordinaten von gerade zu ungerade bzw. umgekehrt. Verläuft also der Faden zum zweiten Mal an der gleichen Ecke (dies ist insbesondere der Fall, wenn Anfangs- und Endpunkt des Fadens identisch sind), so muss er insgesamt eine gerade Anzahl von Würfeln durchlaufen haben, d.h. die Anzahl der durchlaufenen Würfel – nämlich $p \cdot q \cdot r$ – muss gerade sein. Dies ist nur möglich, wenn von den Zahlen p, q, r mindestens eine gerade ist.

Fall 2 (der schließt den Fall 1 mit ein): Mindestens zwei der drei Zahlen sind ungerade: O.B.d.A. seien p und q ungerade.

Wir betrachten eine Schicht Würfel, die parallel zu den Kanten der Länge p und q ist. Diese hat pq Würfel, also ungeradzahlig viele. Weiter betrachten wir die ebenfalls zu den Kanten der Länge p und q parallele Ebene, die diese Würfel mittig durchschneidet. Die $p \cdot q$ Lochdiagonalen in diesen Würfeln durchqueren alle diese Ebenen genau einmal, d.h. auch der Faden durchquert diese Ebene eine ungerade Anzahl mal (hier wird nicht vorausgesetzt, dass diese Durchquerungen unmittelbar aufeinander folgen, ohne dass dazwischen andere parallele Ebenen durchquert werden). Damit liegen Anfangs- und Endpunkt dieses Fadens in verschiedenen Halbräumen bzgl. dieser Ebene, die beiden Punkte können also nicht zusammenfallen.

Variante (knapp formuliert, vgl. auch 2. Beweis): Wir betrachten die Seitenfläche des Quaders mit den ungeraden Seitenlängen p und q und das durch die Würfecken in dieser Fläche definierte Koordinatengitter. Wir wählen einen Würfel aus und von ihm diejenige Ecke in der Seitenfläche, durch die die Schnur verläuft und geben dieser Ecke die Koordinaten $(0|0)$ (die anderen Ecken haben dann evtl. negative Koordinaten). Wie oben beschrieben, durchläuft nun die Schnur diejenigen Ecken der Würfel in der Seitenfläche, bei denen beide Koordinaten gerade sind. Da p und q beide ungerade sind, gibt es nun sicher eine Ecke des Quaders in dieser Seitenfläche, bei der beide Koordinaten gerade sind. Da in so einer Ecke nur eine Raumdiagonale endet, endet dann auch der Faden in dieser Ecke, d.h. es ist unmöglich, dass Anfangs- und Endpunkt des Fadens zusammenfallen.



2. Beweis (graphentheoretisch, reiner Existenzbeweis): Seien M_g und M_u die Menge aller Gitterpunkte im dreidimensionalen Achsenkreuz, bei denen alle drei Koordinaten gerade bzw. alle drei Koordinaten ungerade sind, und $M = M_g \cup M_u$. Übrigens ist $M_g \cap M_u = \emptyset$.

In Gedanken füllen wir das dreidimensionale Achsenkreuz zunächst lückenlos mit unendlich vielen solchen Einheitswürfeln derart, dass die Ecken der Einheitswürfel ganzzahlige Koordinaten haben. Dabei achten wir zusätzlich darauf, dass bei jedem Würfel die durchbohrte Raumdiagonale eine Ecke aus M_g mit einer Ecke aus M_u verbindet. Dies ist offensichtlich auf genau eine Art möglich.

Nun kommen an jeder Ecke aus M genau 8 Raumdiagonalen zusammen, und man kann zwei beliebige Ecken aus M über einen Weg entlang dieser Raumdiagonalen erreichen.

Dieses Gebilde kann man nun als zusammenhängenden Graphen deuten, bei dem die durchbohrten Raumdiagonalen die Kanten sind und die Knoten die Ecken aus M . Jeder Knoten hat den Grad 8.

Nun schneiden wir entlang der Gitterflächen aus diesem Gebilde einen Quader mit Kantenlängen p , q , r heraus. Der dabei entstehende Teilgraph ist weiter zusammenhängend, der Grad aller Knoten im Innern des Quaders ist weiter 8, der Grad von Knoten, die auf einer Seitenfläche, aber nicht auf einer Kante liegen, ist nun 4, der Grad von Knoten, die auf einer Kante, aber nicht in einer Ecke liegen ist 2, die Knoten auf einer Ecke haben Grad 1 und sind die einzigen Knoten mit ungeradem Grad.

Gelingt es nun, den Quader so herauszuschneiden, dass es keine Knoten in einer Ecke des Quaders gibt, so hat jeder Knoten einen geradzahigen Grad. Nach bekannter Theorie der Eulerschen Graphen besitzt ein solcher Graph einen Eulerkreis, d.h. einen Weg entlang der Kanten, der jede Kante genau einmal durchläuft und bei dem Anfangs- und Endpunkt zusammenfällt. Entlang dieses Weges fädeln wir nun einen Faden durch die Raumdiagonalen und verknoten ihn. Er durchläuft genau pqr Einheitswürfel, seine Gesamtlänge ist offensichtlich $pqr\sqrt{3}$, der Anfangs- und der Endpunkt sind identisch.

Dies können wir machen, wenn von p , q und r mindestens 2 Zahlen gerade sind: O.B.d.A. seien p , q gerade. Wir schneiden so aus, dass die Ecken des Quaders $(1,0,0)$, $(p+1,0,0)$, $(p+1,q,0)$, $(1,q,0)$, $(1,0,r)$, $(p+1,0,r)$, $(p+1,q,r)$, $(1,q,r)$ sind. Jede dieser Ecken hat eine gerade und eine ungerade Koordinate, keine ist also aus M .

Gelingt es, den Quader so herauszuschneiden, dass genau zwei Knoten in den Ecken des Quaders liegen, so hat der Graph genau zwei Knoten mit ungeradem Grad. Nach gleicher Theorie besitzt der Graph einen Eulerweg, d.h. einen Weg entlang der Kanten des Graphen, der jede Kante genau einmal durchläuft. Entlang dieses Weges fädeln wir nun einen Faden durch die Raumdiagonalen und verknoten ihn, die Gesamtlänge ist wieder $pqr\sqrt{3}$.

Dies können wir für alle anderen Werte von p, q, r machen, d.h. wenn von p , q und r mindestens 2 Zahlen ungerade sind. Sind dies o.B.d.A. p und q , so schneiden wir aus, dass die Ecken des Quaders $(0,0,0)$, $(p,0,0)$, $(p,q,0)$, $(0,q,0)$, $(0,0,r)$, $(p,0,r)$, (p,q,r) , $(0,q,r)$. Ist nun r gerade, so sind genau die Ecken $(0,0,0)$ und $(0,0,r)$ aus M , ist r ungerade, so sind dies die Ecken $(0,0,0)$ und (p,q,r) .

Bemerkung: Formal ist dieser Beweis unvollständig, da nicht auf die Frage eingegangen wird, ob die Kette nach dem Verknoten zu einem Quader zusammengelegt werden kann. Da andererseits nicht genau vorgeschrieben wurde, wie das Auffädeln und das Verknoten zu geschehen hat, wurde bei einem Fehlen diesbezüglicher Argumente nicht abgewertet.