BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK
Bildung & Begabung

Aufgaben und Lösungen

2. Runde 2024

Endgültige Fassung

» **KORREKTURKOMMISSION | KARL FEGERT**

» **BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK**

Kortrijker Straße 1, 53177 Bonn | Postfach 20 02 01, 53132 Bonn | Tel.: (02 28) 9 59 15-20, Fax: (02 28) 9 59 15-29
info@mathe-wettbewerbe.de, www.bundeswettbewerb-mathematik.de

Oktober 2024

GEFÖRDERT VOM

Bundesministerium für Bildung und Forschung

STIFTERVERBAND

KULTUSMINISTER KONFERENZ

Aufgabe 1: Bestimme alle Paare (x,y) ganzer Zahlen, die die Gleichung $(x+2)^4 - x^4 = y^3$ erfüllen.

Ergebnis: $(x,y) = (-1;0)$ ist ganzzahlige Lösung der Gleichung und es gibt keine anderen Lösungen.

Bezeichnungen: Mit Quadratzahl bzw. Kubikzahl ist immer das Quadrat bzw. 3. Potenz einer ganzen Zahl gemeint.

1. Beweis:

Teil 1: $(x,y) = (-1;0) \Rightarrow (x,y)$ ist Lösung: Eine Probe zeigt, dass $(-1+2)^4 - (-1)^4 = 1 - 1 = 0 = 0^3$.

Teil 2: (x,y) ist Lösung $\Rightarrow (x,y) = (-1;0)$: Wir verwenden folgenden

HS: Für ganzzahlige a gilt: $a^3 + a$ ist Kubikzahl $\Leftrightarrow a = 0$.

Beweis: Fall 1: $a > 0$: Es gilt $a^3 < a^3 + a < a^3 + 3a^2 + 3a + 1 = (a+1)^3$, d.h. $a^3 + a$ liegt zwischen den aufeinander folgenden Kubikzahlen a^3 und $(a+1)^3$, kann also nicht selbst Kubikzahl sein.

Fall 2: $a < 0$: Wir multiplizieren beide Seiten der Ungleichung aus Fall 1 mit (-1) und erhalten so (man beachte, dass der Faktor negativ ist und sich deshalb das Kleinerzeichen umdreht):

Für ganzzahlige $a > 0$ gilt: $(-a-1)^3 = -(a+1)^3 < -(a^3 + a) = (-a)^3 + (-a) < (-a)^3$;

Nun substituieren wir $a' = -a$, dies ist eindeutig umkehrbar, und erhalten so

Für ganzzahlige $a' < 0$ gilt $(a'-1)^3 < a'^3 + a' < a'^3$,

d.h. $a'^3 + a'$ liegt zwischen den aufeinander folgenden Kubikzahlen $(a'-1)^3$ und a'^3, kann also nicht selbst Kubikzahl sein.

Fall 3: alle übrigen Fälle, also $a = 0$: Offensichtlich ist $a^3 + a = 0^3 + 0 = 0^3 = a^3$.

Sei nun (x,y) eine ganzzahlige Lösung. Äquivalente Umformung ergibt

$$(x+2)^4 - x^4 = y^3 \Leftrightarrow x^4 + 8(x^3 + 3x^2 + 4x + 2) - x^4 = y^3 \Leftrightarrow (x+1)^3 + (x+1) = (y/2)^3 \quad (*)$$

Nun sind $(x+1)^3$ und $(x+1)$ beide ganzzahlig, also muss $(y/2)^3$ ebenfalls ganzzahlig sein; hieraus folgt wiederum, dass $y/2$ ganzzahlig ist, d.h. rechts steht die dritte Potenz einer ganzen Zahl.

Nun substituieren wir $a := x + 1$, also $x := a - 1$; dies ist eindeutig umkehrbar und erhält die Ganzzahligkeit. (*) wird dann zu $a^3 + a = (y/2)^3$. Mit dem Hilfssatz erhalten wir, dass $a = 0$ gilt, d.h. nur für $x = a - 1 = -1$ erhalten wir eine Lösung.

2. Beweis: Eine Probe zeigt sofort, dass das Paar $(x,y) = (-1;0)$ die Gleichung erfüllt. Wir zeigen noch, dass es keine weiteren solche Paare ganzer Zahlen gibt:

Sei (x,y) eine Lösung der Gleichung. Nun gilt

$$(x+2)^4 - x^4 = y^3 \Leftrightarrow (x+1)^3 + (x+1) = (y/2)^3 \Leftrightarrow (x+1)\cdot((x+1)^2 + 1) = (y/2)^3.$$

Da x,y ganzzahlig sind, steht auf der linken Seite dieser Gleichung eine ganze Zahl. Also muss auch auf der rechten Seite $(y/2)^3$ ganzzahlig sein, und das ist nur möglich, wenn $y/2$ ganz ist. Rechts steht also die dritte Potenz einer ganzen Zahl z.

Wir setzen $a := x + 1$, also $x = a - 1$; diese Substitution ist eindeutig umkehrbar und erhält die Ganzzahligkeit. Wir suchen also ganzzahlige a,u für die $a\cdot(a^2+1) = u^3$.

Wäre $u \neq 0$, erhielten wir folgenden Widerspruch: Offensichtlich ist dann $a \neq 0$ und $(a^2+1) \neq 0$: Weiter sind $|a|$ und a^2+1 teilerfremd, d.h. jeder Primfaktor von $|u|^3$ kommt in gleicher Vielfachheit entweder in der Primfaktorzerlegung von $|a|$ oder in der von a^2+1 vor. Damit sind sowohl a^2+1 als auch $|a|$ dritte Potenzen. Nun können wir verschieden schließen:

Variante 1: Wenn $|a|$ dritte Potenz einer ganzen Zahl ist, dann auch a^2. Also sind die beiden aufeinander folgenden Zahlen a^2 und a^2+1 beide dritte Potenzen, und dies ist nur für $a = 0$ möglich. Hieraus folgt $u = 0$ im Widerspruch zur Annahme.

Also ist notwendigerweise $u = 0$, hieraus folgt $a = 0$ oder $a^2 + 1 = 0$, letzteres ist nie der Fall. Also ist $a = 0$, es folgt $x = -1$ und $u = 0$. Eine Probe zeigt, dass $(x,y) = (-1,0)$ tatsächlich Lösung ist.

Variante 2 (mit Kenntnissen über Gaußsche Zahlen): a^2+1 soll dritte Potenz sein, also suchen wir eine ganzzahlige Lösung (z,a) von $z^3 = a^2 + 1$.

Die Gleichung $z^3 = a^2 + 1$ mit $z,a \in \mathbb{Z}$ hat – wie eine Probe bestätigt − eine Lösung, nämlich $(z,a) = (1,0)$

Wir führen die Annahme, es gebe eine Lösung $(z,a) \neq (1;0)$ zum Widerspruch:

Dann ist $z^3 = a^2 + 1 \geq 1$, also auch $z \geq 1$. Aus $z = 1$ folgt sofort $a = 0$, und falls $a \neq 0$, ist $z^3 = a^2 + 1 \geq 2$. In einer Lösung $(z,a) \neq (1;0)$ ist also $z \geq 2$. Wäre $z = 2z'$ gerade, so wäre die linke Seite $z^3 = 8{\cdot}z'^3$ durch 2^3 teilbar. Aber dann ist $a = (2a' + 1)$ ungerade und somit die rechte Seite $a^2 + 1 = (2a' + 1)^2 + 1 = 4(a'^2 + a') + 2$ aber nicht durch 8 teilbar. Es ist also z ungerade, also sogar $z \geq 3$, also $z^3 = a^2 + 1 \geq 27$.

Wir betrachten die Gleichung $z^3 = a^2 + 1 = (a + i)(a - i)$ in $\mathbb{Z}[i]$, $z,a \in \mathbb{Z}$.

Sei $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ ein gemeinsamer Teiler von $(a + i)$ und $(a - i)$, Dann ist α auch ein Teiler von $(a + i) - (a - i) = 2i$, nach bekannten Eigenschaften von $\mathbb{Z}[i]$ ist dann die Norm $N(\alpha)$ von α Teiler von $N(2i) = 4$, also $N(\alpha) \in \{1, 2, 4\}$. Aber $N(\alpha)$ ist auch Teiler von $N((a + i)(a - i)) = N(a^2 + 1) = N(z^3)$. Da z ungerade ist, ist auch $N(z^3)$ ungerade, also auch jeder Teiler von $N(z^3)$, insbesondere $N(\alpha)$. Die einzige Möglichkeit ist also $N(\alpha) = 1$, also ist α eine Einheit in $\mathbb{Z}[i]$.

Nun ist $N(a + i) = N(a - i) = N(z) \geq 3$, und da $(a + i)$ und $(a - i)$ keine gemeinsamen Primteiler in $\mathbb{Z}[i]$ haben und eine Zerlegung in irreduzible Faktoren in $\mathbb{Z}[i]$ eindeutig ist, müssen sowohl $(a + i)$ als auch $(a - i)$ dritte Potenzen sein und keine Einheit. Also gilt $(a + i) = (c + di)^3 = c(c^2 - 3d^2) + d(3c^2 - d^2)i$ für geeignete $c,d \in \mathbb{Z}$ und somit $c(c^2 - 3d^2) = a$ und $d(3c^2 - d^2) = 1$. Aus der letzten Gleichung folgt $|d| = 1$. Für beide möglichen Werte erhalten wir einen Widerspruch: Für $d = 1$ erhalten wir $3c^2 = 2$, was unmöglich ist, für $d = -1$ erhalten wir $c = 0$ und somit $(z,a) = (1,0)$ im Widerspruch zur Annahme $(z,a) \neq (1;0)$.

Hinweis: im Internet findet man Beweise zu dieser Variante unter

https://math.stackexchange.com/questions/955967/does-an-elementary-solution-exist-to-x21-y3

https://mathoverflow.net/questions/39561/is-there-an-elementary-way-to-find-the-integer-solutions-to-x2-y3-1

3. Beweis(−skizze): Sei (x,y) Lösung. Betrachtung $\bmod 7$ und $\bmod 2$ ergibt schnell $y \equiv 0 \bmod 2$, $y \equiv 0 \bmod 7$, $x \equiv -1 \bmod 7$. Es gibt also r,s, sodass $x = 7r - 1$ und $y = (2{\cdot}7)s$. Die Gleichung lautet dann

$$(7r + 1)^4 - (7r - 1)^4 = (7s)^3 \Leftrightarrow 8{\cdot}(7r)^3 + 8{\cdot}(7r) = 8{\cdot}(7s)^3 \Leftrightarrow r(7^2{\cdot}r^2 + 1) = 7^2s^3.$$

Weil $(7^2{\cdot}r^2 + 1)$ und 7^2 teilerfremd sind, ist 7^2 Teiler von r, also gibt es t, sodass $r = 7^2{\cdot}t$ und $x = 7^3t - 1$.

Einsetzen ergibt $7^2{\cdot}t{\cdot}(7^2{\cdot}(7^2{\cdot}t)^2 + 1) = 7^2s^3 \Leftrightarrow t{\cdot}(7^6{\cdot}t^2 + 1) = s^3$. Auch t und $(7^6{\cdot}t^2 + 1)$ sind teilerfremd, ihr Produkt ist eine Dreierpotenz, also sind sowohl $(7^6{\cdot}t^2 + 1)$ als auch t Dreierpotenzen, also auch $7^6{\cdot}t^2$. Dann sind $7^6{\cdot}t^2$ und $(7^6{\cdot}t^2 + 1)$ zwei nicht negative Dreierpotenzen, die sich um 1 unterscheiden. Das einzige solche Paar ist offensichtlich $0^3 + 1 = 1^3$, d.h. $t = 0$ und somit $x = -1$ und $(x,y) = (-1,0)$. Dies ist tatsächlich eine Lösung, wie eine Probe schnell bestätigt, weitere Lösungen gibt es nicht.

Aufgabe 2: Bestimme alle reellen Zahlen r, für die es eine unendliche Folge positiver ganzer Zahlen $a_1, a_2, \ldots$ mit folgenden drei Eigenschaften gibt:

(1) Keine Zahl kommt mehr als einmal als Folgenglied vor.
(2) Die Summe zweier verschiedener Folgenglieder ist nie eine Zweierpotenz.
(3) Es gilt $a_n < r \cdot n$ für alle positiven ganzen Zahlen n.

Ergebnis: Für jede reelle Zahl $r \geq 2$ und nur für diese gibt es eine solche Folge.

Bezeichnungen: Eine Folge, die zur Zahl r die drei Eigenschaften der Aufgabe hat, heiße r−Folge.

Beweis: Teil 1: $\langle a_n \rangle$ ist r−Folge $\Rightarrow$ $r \geq 2$:

Für $k \geq 1$ betrachten wir die Zahlen im Intervall $[1, 2^{k+1}-1]$, dies sind die Zahl 2^k und Zahlen der Form $2^k + i$ und $2^k - i$ mit $1 \leq i \leq 2^k - 1$. In den $2^k - 1$ Zahlenpaaren $(2^k + i, 2^k - i)$ sind beide Zahlen positiv ganz, verschieden und ihre Summe ist 2^{k+1}. Nach Voraussetzung und Bedingung (2) können also nicht beide dieser Zahlen Glieder von $\langle a_n \rangle$ sein. Hieraus folgt, dass es im Intervall $[1, 2^{k+1}-1]$ $(k \geq 1)$ außer 2^k höchstens $2^k - 1$ Zahlen gibt, die Glieder der Folge $\langle a_n \rangle$ sein können, und da mit (1) keine zwei Folgenglieder gleich sind, gibt es in diesem Intervall höchstens 2^k Folgenglieder.

Von den kleinsten $2^k + 1$ Folgengliedern ist also mindestens eines größer oder gleich 2^{k+1}. Es gibt also einen Index $j \leq 2^k + 1$, für den $a_j \geq 2^{k+1}$. Zusammen mit Bedingung (3) erhalten wir also

$$rj > a_j \geq 2^{k+1}, \text{ also } \quad r > \frac{2^{k+1}}{j} \geq \frac{2^{k+1}+2-2}{2^k+1} = 2 - \frac{2}{2^k+1} \text{ für alle } k. \quad (*)$$

Für jedes $r < 2$ kann man nun offensichtlich k so groß wählen, dass die Ungleichung (*) nicht erfüllt ist. Es folgt $r \geq 2$.

Teil 2: $r \geq 2$ $\Rightarrow$ es gibt eine r−Folge:

Wenn für ein gewisses r_0 eine r_0−Folge existiert, dann hat diese Folge alle in der Aufgabenstellung geforderten Eigenschaften auch für jedes $r \geq r_0$. Es genügt also zu zeigen, dass es eine r−Folge für $r = 2$ gibt.

Sei also $r = 2$. Wir definieren eine Folge $\langle a_n \rangle$ von positiven ganzen Zahlen rekursiv nach folgenden Regeln: (bei der Definition erweitern wir den betrachteten Zahlenbereich um die Zahl 0):

(R1) 0 ist kein Folgenglied, 1 ist Folgenglied.

(R2) Wenn von allen nicht−negativen ganzen Zahlen im Intervall $[0,2^k]$ $(k \geq 0)$ festgelegt ist, ob sie Folgenglied sind oder nicht, gelte für die Zahlen im Intervall $[2^k+1, 2^{k+1}]$:
$2^k + i$ $(1 \leq i \leq 2^k)$ ist genau dann Folgenglied, wenn $2^k - i$ kein Folgenglied ist.

(R3) Die Indices der Folge werden der Größe nach auf die Folgenglieder verteilt.

Für die weitere Argumentation benützen wir eine Hilfsfunktion f, die auf der Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen definiert ist. Für i ganz, $i \geq 0$ sei

$$f(i) := \begin{cases} +1 & \text{wenn } i \text{ Folgenglied} \\ -1 & \text{wenn } i \text{ kein Folgenglied} \end{cases}$$

Dann beschreibt $S_a(b) := \sum_{j=a}^{b} f(j)$ um wieviel im Intervall $[a,b]$ die Anzahl der Folgenglieder die Anzahl der Nicht−Folgenglieder übertrifft.

Zur Verdeutlichung die ersten Werte in einer Tabelle:

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
f(m)	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1
s1(m)	0	1	2	1	2	3	2	1	2	3	4	3	2	3	2	1	2	3	4	3	4	5	4	3	2
S0(m)	-1	0	1	0	1	2	1	0	1	2	3	2	1	2	1	0	1	2	3	2	3	4	3	2	1

Es sind einige der Werte $f(m)$, $S_0(m)$ und $S_1(m)$ eingetragen, Folgenglieder sind grün hinterlegt.

Die Werte können auch folgendermaßen hergeleitet werden (Begründung im folgenden Text):

- in Zeile $f(m)$: $f(0) = -1$, $f(2^k) = 1$, Werte links von 2^k mit (-1) multiplizieren und rechts von 2^k gespiegelt eintragen; dies folgt unmittelbar aus der Konstruktionsvorschrift.
- in Zeile $S_0(m)$: Zu Werten links von den dicken Trennstrichen 1 addieren und rechts vom dicken Trennstrich gespiegelt eintragen; Begründung siehe unten.

Wir zeigen, dass $\langle a_n \rangle$ eine 2−Folge ist, d.h. alle drei geforderten Eigenschaften für $r = 2$ hat:

Diese Folge $\langle a_n \rangle$ ist offensichtlich wohldefiniert, da bei jeder nicht−negativen ganzen Zahl genau einmal entschieden wird, ob sie Folgenglied ist oder nicht. Das kleinste Folgenglied ist $a_1 = 1 = 2^0$ positiv ganz, im Weiteren kommen nur größere positive ganze Zahlen als Folgenglieder in Betracht, keine zwei Folgenglieder sind gleich. Damit kann man die Folgenglieder entsprechend ihrer Größe mit Indices 1, 2, 3, ... versehen.

Keine Zweierpotenz kann Summe verschiedener Folgenglieder sein: Wäre $2^k = a_m + a_n$ $(k \geq 2)$ mit $a_m \neq a_n$, o.B.d.A. $a_m > a_n$, so wäre $a_m > {}^1/_2 \cdot 2^k = 2^{k-1}$ also $k \geq 2$ und $a_m = 2^{k-1} + i$ mit $1 \leq i < 2^{k-1}-1$. Dann wäre aber auch $a_n = 2^{k-1} - i$ Folgenglied im Widerspruch zur Konstruktionsvorschrift.

Es genügt nun zu zeigen, dass für alle $m \geq 1$ stets $S_0(m) \geq 0$: Dann ist $S_1(m) = S_0(m) - f(0) = S_0(m) + 1 > 0$, d.h. in jedem Intervall $[1,m]$ befinden sich mehr Folgenglieder als Nicht−Folgenglieder, also mehr als ${}^m/_2$ Folgenglieder. Für das größte Folgenglied $a_n \leq m$ gilt dann $n > {}^m/_2 \geq {}^1/_2 \cdot a_n$, also $a_n < 2n$. Induktiv folgt dann, dass alle a_n die Eigenschaft (3) haben.

Für $k \geq 0$ und $1 \leq i \leq 2^k$ ist von beiden Zahlen $2^k + i$ und $2^k - i$ immer genau eine Folgenglied. Es folgt also $f(2^k + i) + f(2^k - i) = -f(2^k - i) + f(2^k - i) = 0$. Für $i = 2^k$ ergibt sich $f(2^{k+1}) = f(2^k + 2^k) = -f(2^k - 2^k) = -f(0) = 1$, also $f(2^k) = 1$ für alle $k \geq 1$, unter Berücksichtigung von R(2) sogar $f(2^k) = 1$ für alle $k \geq 0$. Dies setzen wir zusammen zu

$$\sum_{j=2^k-i}^{2^k+i} f(j) = f(2^k) + \sum_{j=1}^{i} \left(f\left(2^k - j\right) + f\left(2^k + j\right) \right) = f(2^k) + 0 = 1.$$

Für alle $k \geq 0$, $1 \leq i \leq 2^k$ gilt also $S_0(2^k + i - 1) = \sum_{j=0}^{2^k+i-1} f(j) = 1 + \sum_{j=0}^{2^k-(i-1)-1} f(j) = 1 + S_0(2^k - i)$ (*)

Dies heißt: Die Reihe der Zahlen $S_0(m)$ mit $m = 0, 1, 2, \ldots, 2^k-1$ taucht – um 1 vergrößert – in umgekehrter Reihenfolge als Reihe der Zahlen $S_0(m)$ mit $m = 2^k, 2^k + 1, \ldots, 2^{k+1}-1$ auf, (vgl. Tabelle: dies sind die Zahlen in der Zeile $S_0(m)$ links bzw. rechts von dick markierten Grenzlinien der Felder zwischen $m = 2^k-1$ und $m = 2^k$). Nun ist $S_0(0) = -1$ und

für $k = 0$ und $i = 1$ wird (*) zu $S_0(1) = S_0(2^0+1-1) = 1 + S_0(2^0 - 1) = 1 + S_0(0) = 0$,
für $k = 1$ und $i = 1$ wird (*) zu $S_0(2) = S_0(2^1+1-1) = 1 + S_0(2^1 - 1) = 1 + S_0(1) = 1 > 0$,
für $k = 1$ und $i = 2$ wird (*) zu $S_0(3) = S_0(2^1+2-1) = S_0(2^2-1) = 1 + S_0(2^1 - 2) = 1 + S_0(0) = 0$.

d.h. für m aus $[0,2^{1+1}-1[$ ist $S_0(0) = -1$ und mit Ausnahme von $m = 0$ stets $S_0(m) > 0$. Induktiv schließen wir nun, dass für alle $k \geq 0$ stets $S_0(2^{k+1}-1) = -1 + 1 = 0$ und für alle $1 \leq m < 2^{k+1}-1$ sogar $S_0(m) > 0$.

Das war zu zeigen.

2. Beweis für Teil 2: $r \geq 2 \Rightarrow$ es gibt eine r−Folge: Eine r−Folge ist auch für jedes $r' > r$ eine r'−Folge. Es genügt also, die Existenz einer r−Folge für $r = 2$ zu zeigen.

Sei $r = 2$. Die Folge $\langle a_n \rangle$ bestehe aus den positiven ganzen Zahlen

$2^m \cdot (4i + 1)$, m,i ganz, $m,i \geq 0$, die Indices 1, 2, 3, ... seien der Größe nach zugeordnet.

Diese Zuordnung der Indices nach Größe ist folgendermaßen möglich: Die Zahlen der Form $2^m \cdot (4i + 1)$, m,i ganz, $m,i \geq 0$, sind genau die Zahlen, deren Binärdarstellung auf ...010...0 (mit m Endnullen) endet, diese Binärdarstellung gibt eine Ordnung nach Größe vor.

Wir zeigen, dass $\langle a_n \rangle$ die geforderten Eigenschaften hat.

$\langle a_n \rangle$ hat Eigenschaft (1): Die Zuordnung von Zahlen dieser Form zu den möglichen Paaren (m,i) ist offensichtlich eineindeutig, es sind also keine zwei solche Zahlen gleich, die Zuordnung von Indices nach Größe ist also möglich. Es entsteht eine streng monotone Folge $\langle a_n \rangle$, sie ist wohldefiniert.

$\langle a_n \rangle$ hat Eigenschaft (2): Weil 2 kein Teiler von $(4i + 1)$ ist, ist $2^m \cdot (4i + 1)$ genau dann eine Zweierpotenz, wenn $(4i + 1) = 1$, also wenn $i = 0$. Die Darstellung jeder Zweierpotenz im Binärsystem besteht also aus einer einzigen Ziffer 1 gefolgt von m Nullen ($m \geq 0$), das sind genau die Folgenglieder für $i = 0$. Alle Zahlen, die keine Zweierpotenz sind, haben mindestens zwei Ziffern 1.

Für $i \geq 1$ ist $4i + 1 > 4$. Wenn $i \geq 1$, hat also die Darstellung von $4i + 1$ mindestens drei Ziffern, sie endet mit dem Ziffernblock 01, davor ist ein weiterer Block Ziffern mit mindestens einer weiteren Ziffer 1. Multiplikation mit 2^m entspricht dem Anhängen von m Ziffern 0 rechts. Die Darstellung jeder Zahl $2^m \cdot (4i + 1)$ mit $i \geq 1$ endet also mit m Nullen ($m \geq 0$), davor der Ziffernblock 01, davor ein weiterer Block mit mindestens einer weiteren Ziffer 1.

Wir addieren Folgenglieder $2^m \cdot (4i + 1) = ...010...0|_2$ und $2^k \cdot (4j + 1) = ...010...0|_2$ mit m bzw. k Endnullen, o.B.d.A. $m \geq k$. Die Pünktchen zu Beginn stehen für eine geeignete, evtl. leere Folge von Ziffern 0 oder 1, die Pünktchen am Ende für Ziffern 0. Für $m = k + 1$ erhalten wir $...0110...0|_2$ mit k Endnullen, für $m \geq k + 2$ erhalten wir $10...010...0|_2$, ebenfalls mit k Endnullen, in jedem Fall eine Zahl mit mindestens zwei Ziffern 1. Für $m = k$ erhalten wir als Summe $...0100...0|_2$ mit $k + 1$ Endnullen; die Ziffer 0 vor der Ziffer 1 kann auch eine führende Ziffer 0 sein. Weitere Ziffern 1 hat diese Zahl nur, wenn auch einer der beiden Summanden eine weitere Ziffer 1 hat. Also kann die Summe zweier Zahlen aus A nur dann Zweierpotenz sein, wenn $m = k$ und $i = j = 0$, d.h. wenn die beiden Zahlen gleich sind und beide eine Zweierpotenz. Die Summe zweier verschiedener Zahlen aus A ist also nie eine Zweierpotenz.

$\langle a_n \rangle$ hat für $r = 2$ die Eigenschaft (3): In der Menge der positiven ganzen Zahlen ist die Komplementärmenge zu A die Menge B der positiven ganzen Zahlen der Form $2^m \cdot (4i + 3)$ mit $m,i \geq 0$. Jeder Zahl $a = 2^m \cdot (4i + 1)$ aus A ordnen wir die Zahl $b(a) = 2^m \cdot (4i + 3)$ aus B zu, diese Zuordnung ist umkehrbar eindeutig und für alle $m,i \geq 0$ gilt $2^m \cdot (4i + 3) > 2^m \cdot (4i + 1)$, also $b(a) > a$.

Nun betrachten wir ein Intervall $[1,a_n]$, es enthält a_n positive ganze Zahlen. Insbesondere ist auch die kleinste Zahl der Folge, nämlich $a_1 = 2^0 \cdot (4 \cdot 0 + 1) = 1$ gleichzeitig kleinste Zahl in diesem Intervall. Weil $\langle a_n \rangle$ streng monoton ist, ist n die Anzahl Folgenglieder a_i in diesem Intervall. Weil nun stets $b(a) > a$, enthält $[1,a_n]$ höchstens die Zahlen $b(a_i)$ für $i < n$. Damit ist in jedem Intervall $[1,a_n]$ mit $a_n \in A$ die Anzahl Zahlen aus A – also n − größer als die Anzahl der Zahlen aus B, insbesondere ist also $n > {}^1/_2 \cdot a_n$. Dies ist gleichbedeutend mit $a(n) < 2n = rn$.

Bemerkungen: Es ist $b(a) - a = 2^m \cdot (4i + 3) - 2^m \cdot (4i + 1) = 2^{m+1}$.

Die im 1. und 2. Beweis angegebenen Folgen sind identisch; sie sind in der OEIS zu finden unter A091072. Die Folge der $f(m)$ (oder auch die Reihe, bei der −1 durch 0 ersetzt wird), findet man unter A034947 und wird u.a. auf A005811 verwiesen, mit entsprechenden Literaturhinweisen (z.B. "paper folding sequence".) https://oeis.org/A091072

Die Folge A001481 (https://oeis.org/A001481) ist definiert als Folge der nach Größe geordneten Zahlen, die als Summe zweier Quadratzahlen dargestellt werden können, wobei die Zahl 0^2 als Summand zugelassen ist. Dies sind bekanntlich die Zahlen, in deren Primfaktorenzerlegung alle Primfaktoren der Form $4m+3$ mit geradem Exponenten auftreten. Damit hat jede Zahl außer 0 dieser Folge die Form $2^k \cdot (4i+1)$, ist also Element auch von A091072. Lässt man die Zahl 0 weg, ist A001481 also Teilfolge von A091072. Sie ist sogar echte Teilfolge, weil A091072 zusätzlich solche Zahlen enthält, deren Primfaktorzerlegung Primfaktoren der Form $(4m+3)$ mit ungerader Vielfachheit enthält, aber bei denen die Gesamtzahl der Vielfachheiten solcher Primfaktoren gerade ist. (21 = 3·7 ist die kleinste Zahl, die in A091072, aber nicht in A001481 ist). Auf der Seite von A001481 stellt J. Lowell die Vermutung auf, dass die Summe zweier verschiedener Folgenglieder niemals eine Zweierpotenz ist. Mit der Lösung unserer Aufgabe ist diese Vermutung nun bewiesen.

Gelegentlich wurde im Teil 1 die Existenz einer Folge $\langle a_n \rangle$ angenommen und $r < 2$ zum Widerspruch geführt. Dabei wurde oft "o.B.d.A. angenommen, dass diese Folge streng monoton ist" mit der nicht ausreichenden Begründung, dass man "die Elemente paarweise umordnen kann, ohne die Bedingungen der Aufgabe zu verändern." Es gibt Gegenbeispiele von Folgen, bei denen ein solches paarweises Umordnen nicht dazu führt, dass die Folge monoton wird.

Aufgabe 3: Gegeben ist ein Dreieck ABC. Durch jeden Punkt P im Innern dieses Dreiecks können die Parallelen zu den drei Seiten des Dreiecks gezeichnet werden. Diese zerlegen das Dreieck ABC in drei Dreiecke und drei Vierecke.

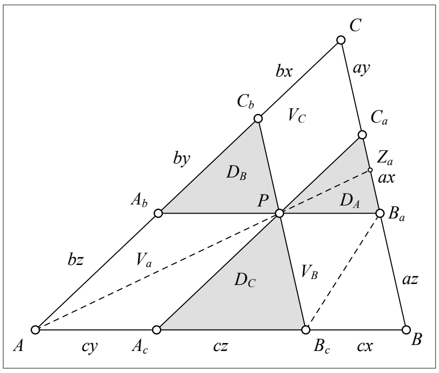
Dasjenige Viereck, das A als Eckpunkt besitzt, habe den Flächeninhalt V_A und dasjenige Dreieck, bei dem eine Seite auf der Strecke BC liegt, habe den Flächeninhalt D_A. Analog sind V_B und D_B bzw. sind V_C und D_C definiert.

Bestimme alle Werte, die der Term $\frac{D_A}{V_A}+\frac{D_B}{V_B}+\frac{D_C}{V_C}$ annehmen kann.

Ergebnis: In jedem Dreieck ist $W = W(P) := \frac{D_A}{V_A}+\frac{D_B}{V_B}+\frac{D_C}{V_C} \geq \frac{3}{2}$, jeder dieser Werte kann angenommen werden.

Bezeichnungen: Die Seitenlängen des Dreiecks ABC seien wie üblich mit a, b, c bezeichnet. Im Text verkürzen wir "Dreieck mit Flächeninhalt D_A" zu "Dreieck D_A", analog verfahren wir mit D_B, ... , V_C.

1. Beweis (zentrische Streckung): Die Seiten des Dreieck D_A sind parallel zu den Seiten des Dreiecks ABC, also sind sie zueinander ähnlich. Weil P ein innerer Punkt des Dreiecks ABC ist, gibt es eine zentrische Streckung mit Streckfaktor x ($0 < x < 1$) und Zentrum Z_a auf der Strecke BC, die das Dreieck ABC in das Dreieck D_A überführt. Die Bilder von B und C bei dieser Streckung seien B_a bzw. C_a, dies sind die Ecken von Dreieck D_A, die auf der Seite BC liegen. Analog seien y und z die Streckfaktoren, die das Dreieck ABC auf das Dreieck D_B mit den Ecken A_b und C_b auf AC bzw. auf das Dreieck D_C mit den Ecken A_c und B_c auf AB abbilden.



O.B.d.A. habe das Dreieck ABC den Flächeninhalt 1. Nach bekannten Sätzen zur Ähnlichkeit von Dreiecken gilt

$$D_A = x^2,\ D_B = y^2,\ D_c = z^2.$$

Die Strecke BC hat die Länge a, die Parallelen durch P zu den Seiten AB und AC teilen sie in drei Teilstrecken BB_a, B_aC_a und C_aC auf. Die Strecke B_aC_a hat die Länge ax. Im Viereck V_B sind nach Konstruktion gegenüberliegende Seiten parallel, es ist also ein Parallelogramm. Also hat die Seite BB_a des Parallelogramms V_B die Länge az, denn sie ist parallel und gleichlang wie Seite B_cP im Dreieck D_C. Analog schließen wir, dass die Strecke C_aC die Länge ay hat. Es ist also $a = az + ax + ay$, hieraus folgt

$$x + y + z = 1.$$

Wir verwenden die Flächeninhaltsformel $|ABC| = {}^1\!/_2 \cdot ac \cdot \sin(\beta)$. Eine Seite des Parallelogramms V_B hat die Länge az, die andere cx. Da die Innenwinkel von V_B und Dreieck ABC bei der Ecke B übereinstimmen, hat das Dreieck B_cBB_a den Flächeninhalt ${}^1\!/_2 \cdot az \cdot cx \cdot sin(\beta) = {}^1\!/_2 \cdot xz \cdot ac \cdot sin(\beta) = xz \cdot |ABC| = xz$. Das Parallelogramm V_B hat dann den doppelten Flächeninhalt, also $2xz$. Also gilt

$$V_B = 2xz,\ V_A = 2yz,\ V_C = 2xy$$

Jede Zerlegung der Seite BC in drei Teilstrecken im Verhältnis $x : y : z$ mit $x + y + z = 1$ ist eindeutig, ebenso die Konstruktion eines Punktes P als Schnittpunkt der Parallelen zu AB bzw. AC durch die Teilpunkte. Also ist die Zuordnung zwischen den Punkten P im Innern des Dreiecks und dem von ihm nach obiger Herleitung erzeugten Zahlentripeln (x,y,z) mit $x + y + z = 1$ umkehrbar eindeutig. Damit ist die Fragestellung äquivalent zur Frage, welche Werte der Ausdruck

$$W = W(x,x,z) := \frac{x^2}{2zy}+\frac{y^2}{2zx}+\frac{z^2}{2xy} \quad \text{mit Nebenbedingung } x,y,z > 0;\ x + y + z = 1$$

annehmen kann. Zum Nachweis zeigen wir zwei Dinge:

(1) Zu jedem Wert im Intervall [3/2;∞) gibt es einen Punkt P im Innern des Dreiecks:

Wir wählen $0 < x < 1$ und dazu $y = z = \frac{1}{2}(1-x)$, dann sind die Bedingungen $x + y + z = 1$ und $0 < x,y,z < 1$ erfüllt. Dann erhalten wir

$$W = \frac{D_A}{V_A}+\frac{D_B}{V_B}+\frac{D_C}{V_C} = \frac{x^2}{2\cdot\frac{1}{4}\cdot(1-x)^2}+2\cdot\frac{\frac{1}{4}\cdot(1-x)^2}{2x\cdot\frac{1}{2}\cdot(1-x)} = \frac{2x^2}{(1-x)^2}+\frac{(1-x)}{2x}.$$

Für $x = 1/3$ erhalten wir $W = 2/9 : 4/9 + 2/3 : 2/3 = 3/2$.

(Interessant, aber für den Beweis unnötig ist: Der zugehörige Punkt P liegt auf der Seitenhalbierenden s_a, für $x = 1/3$ erhält man den Schwerpunkt des Dreiecks.)

Die Funktion $W(x)$ ist im ganzen Intervall]0,1[definiert und stetig, beide Summanden sind positiv, für $x\to1$ geht der erste Summand gegen unendlich, für $x\to0$ geht der zweite Summand gegen unendlich, nimmt also nach Zwischenwertsatz mindestens alle Werte im Intervall [3/2;∞[an.

(2) Es gibt keinen Punkt im Innern des Dreiecks, für den $W < 3/2$ ist:

Variante 1: Bekanntlich ist das arithmetische Mittel aus drei positiven Zahlen größer oder gleich dem geometrischen Mittel dieser Zahlen, also ist

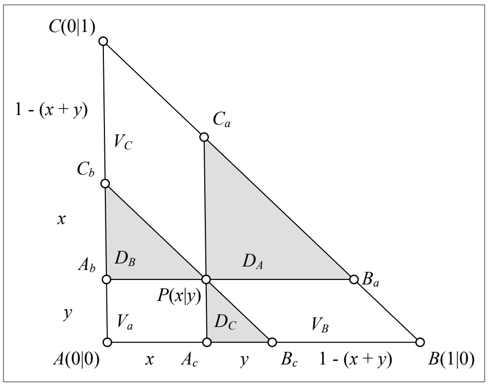
$$W = \frac{x^2}{2zy}+\frac{y^2}{2zx}+\frac{z^2}{2xy} \geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{x^2}{2zy}\cdot\frac{y^2}{2zx}\cdot\frac{z^2}{2xy}} = 3\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{3}{2}.$$

Variante 2: Berechne $W - 3/2$, setze $z = 1 - (x + y)$, weise nach, dass $W - 3/2 \geq 0$ (vgl. 2. Beweis).

Interessantes Nebenergebnis: Es ist $(az + ax)/a = z + x$ der Streckfaktor der zentrischen Streckung von A. Die Summe der drei Streckfaktoren ist also für alle Lagen von P konstant $z + x + x + y + y + z = 2$.

2. Beweis: (affine Geometrie): Wir lösen die Aufgabe zunächst für ein spezielles Dreieck mit Koordinaten-Geometrie im kartesischen Achsenkreuz. Die Koordinaten der Ecken des Dreiecks und des Punktes P seien

$A(0|0)$, $B(1|0)$, $C(0|1)$, $P(x,y)$ mit $x,y > 0$ und $x + y < 1$.



Die Koordinaten der Schnittpunkte von Dreieckseiten und Parallelen durch P können aus der Zeichnung abgelesen und die angegebenen Streckenlängen leicht verifiziert werden. Offensichtlich liegt P für die erlaubten x und y im Innern des Dreiecks.

Da jedes Dreieck aus diesem speziellen Dreieck durch Parallelstreckung und anschließende Scherung gewonnen werden kann und dabei bekanntlich Flächenverhältnisse invariant sind, gelten unten hergeleitete Aussagen für W für alle möglichen Dreiecke. Es gilt

$$W = \frac{D_A}{V_A}+\frac{D_B}{V_B}+\frac{D_C}{V_C} = \frac{\left(1-(x+y)\right)^2}{2xy}+\frac{x^2}{2y\left(1-(x+y)\right)}+\frac{y^2}{2x\left(1-(x+y)\right)}$$

$$= \frac{\left(1-(x+y)\right)^3+x^3+y^3}{2xy\left(1-(x+y)\right)} = T(x,y).$$

Es ist $T(1/3,1/3) = \dfrac{3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3}{2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3} = \dfrac{3}{2}$; außerdem ist $T(x,y)$ für alle Werte $x,y > 0$ und $0 < x + y < 1$ definiert, verändert sich stetig mit x und y; und für $x \to 0$ nimmt $T(x,y)$ beliebig große Werte an, ebenso für $y \to 0$

und auch für $(x + y) \to 1$. Der Term W nimmt also alle Werte im Intervall $[3/2,\infty)$ an, wenn x und y alle erlaubten Werte annehmen.

Nun zeigen wir noch, dass W keine kleineren Werte annimmt, d.h. dass $W - 3/2 \ge 0$ für alle Punkte P:

$$W - \frac{3}{2} = \frac{\left(1-(x+y)\right)^3 + x^3 + y^3 - 3xy\left(1-(x+y)\right)}{2xy\left(1-(x+y)\right)},$$

in diesem Ausdruck ist im Definitionsbereich für x und y der Nenner sicher stets positiv. Es genügt also zu zeigen, dass der Zähler für diese Werte nicht negativ wird. Es gilt

$$\begin{aligned}\text{Zähler} &= 1^3 - 3(x+y) + 3(x+y)^2 - (x+y)^3 \quad + \quad x^3 + y^3 \quad - \quad 3xy(1-(x+y))\\ &= 1 - 3(x+y) + 3x^2 + 6xy + 3y^2 - x^3 - 3x^2y - 3xy^2 - y^3 + \quad x^3 + y^3 - 3xy + 3x^2y + 3xy^2\\ &= 1 - 3x - 3y + 3x^2 + 3xy + 3y^2;\end{aligned}$$

nun substituieren wir $x = 1/3 + r$, $y = 1/3 + s$, $-1/3 < r,s < 2/3$, $r + s < 1/3$:

$$\begin{aligned}&= 1 - 3(1/3 + r) - 3(1/3 + s) + 3(1/3 + r)^2 + 3(1/3 + r)(1/3 + s) + 3(1/3 + s)^2\\ &= 1 - 1 - 3r - 1 - 3s + 1/3 + 2r + 3r^2 + 1/3 + r + s + 3rs + 1/3 + 2s + 3s^2\\ &= 0 + 3(r^2 + rs + s^2) \qquad = 3\,[(r+s)^2 - rs] \quad \ge 0.\end{aligned}$$

Wenn $rs > 0$, können wir im vorletzten Term ablesen, dass $W - 3/2 > 0$, und wenn $rs < 0$, können wir dies im letzten Term ablesen, und wenn $rs = 0$ ist, also $r = 0$ oder $s = 0$ ist, dann lesen wir ab, dass $W - 3/2 \ge 0$ ist mit Gleichheit genau dann, wenn $r = s = 0$.

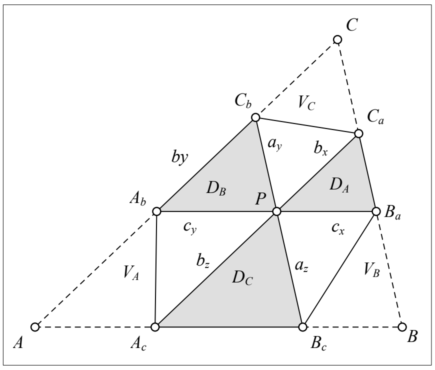
Variante: Anwendung der Ungleichung $AM \ge GM$, vgl. 1. Beweis.

Bemerkung: Für $rs \ge 0$ gilt $\quad 1/3(r^2 + rs + s^2) = \dfrac{1}{3}\left(2\dfrac{r^2+s^2}{2} + \sqrt{r^2s^2}\right) = \dfrac{2\cdot AM(r^2,s^2) + 1\cdot GM(r^2,s^2)}{2+1}$,

das ist das mit 2 bzw. 1 gewichtete arithmetische Mittel aus AM und GM von r^2 und s^2.

Gelegentlich habe ich diesen Ausdruck auch als "Pyramidenstumpfmittel" bezeichnet: Ein Pyramidenstumpf, dessen Grund− und Deckflächen den Flächeninhalt r^2 bzw. s^2 haben, hat den gleichen Rauminhalt wie ein Quader gleicher Höhe, bei dem Grund und Deckfläche den "mittleren" Flächeninhalt $1/3(r^2 + rs + s^2)$ haben. Dieser Term spielt auch eine Rolle bei *BWM 1999.1 Aufgabe 3.*

3. Beweis: Es sei $a_y := \overline{PC_b}$ (in Anlehnung an den 1. Beweis, die Bezeichnung hat hier keinen Bezug zur tatsächlichen Länge der Seite BC und Größe des Streckfaktors y); analog seien die Längen der anderen Streckenabschnitte von P bezeichnet.



Nach bekannter Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks ist $D_B = 1/2 \cdot a_y \cdot c_y \cdot \sin(\angle C_bPA_b)$. Das Viereck V_B ist ein Parallelogramm, wird also durch die Strecke B_cB_a in zwei flächengleiche Teildreiecke zerlegt. Also ist

$$V_B = a_z \cdot c_x \cdot \sin(\angle B_cPB_a).$$

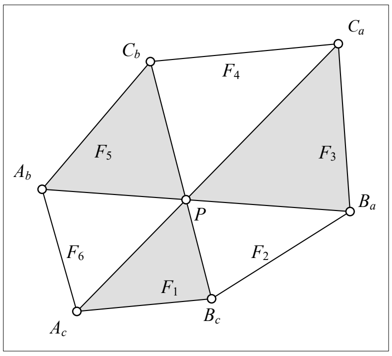
Die in den beiden Formeln genannten Winkel sind Scheitelwinkel, also gleich, die sin−Werte kürzen sich bei der Berechnung des Verhältnisses. So erhalten wir

$$2W = \frac{2D_A}{V_A} + \frac{2D_B}{V_B} + \frac{2D_C}{V_C} = \frac{b_xc_x}{b_zc_y} + \frac{c_ya_y}{c_xa_z} + \frac{a_zb_z}{a_yb_x}$$

Das Produkt der drei Summanden hat offensichtlich den Wert 1, d.h. ihr geometrisches Mittel ist $\sqrt[3]{1} = 1$. Nach Mittelungleichung $GM \le AM$ ist dann $2W \ge 3$, also $W \ge 3/2$.

Dass W jeden Wert größer oder gleich $3/2$ annimmt, zeigen wir wie in den anderen Beweisen.

Bemerkung: Im 3. Beweis haben wir nur benützt, dass die Vierecke durch die Diagonale, die nicht durch P verläuft, in zwei flächengleiche Teildreiecke zerlegt werden können. Das Argument, dass das Viereck ein Parallelogramm ist, ist hierfür hinreichend, aber nicht notwendig. Damit kann man die Argumentation beziehen auf ein Sechseck $A_cB_cB_aC_aC_bA_b$, dessen Diagonalen sich in einem gemeinsamen Punkt P schneiden, diese Diagonalen müssen nicht parallel zu irgendwelchen Seiten sein. Somit haben wir einen allgemeineren Satz bewiesen:



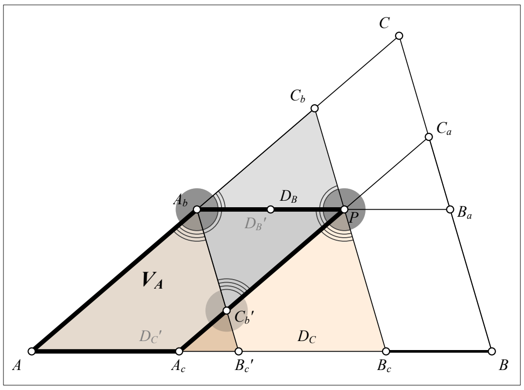
Satz: Gegeben sei ein Sechseck $A_cB_cB_aC_aC_bA_b$, dessen Diagonalen sich in einem gemeinsamen inneren Punkt P schneiden; die Flächeninhalte der dadurch entstandenen Teildreiecke seien gegen den Uhrzeigersinn fortlaufend mit F_1, F_2, … , F_6 bezeichnet. Dann gilt:

$$W := \frac{F_1}{F_4} + \frac{F_3}{F_6} + \frac{F_5}{F_2} \ge 3 \quad \text{und auch} \quad W^* := \frac{F_4}{F_1} + \frac{F_6}{F_3} + \frac{F_2}{F_5} \ge 3,$$

dabei gibt es zu jedem $W \in [3, \infty)$ ein solches Sechseck mit diesem Wert: Der Wert 3 wird tatsächlich angenommen, nämlich in einem solchen Sechseck, bei dem die Flächeninhalte gegenüber liegender Dreiecke alle gleich sind, d.h. wenn jeder Summand den Wert 1 hat; dies ist z.B. im regelmäßigen Sechseck der Fall. Auch alle Werte > 3 können angenommen werden. Hierzu verschiebt man z.B. A_c und B_c entlang der Strahlen B_aP und C_bP nach außen, dann wird $F_1 : F_4$ beliebig groß und damit auch W.

4. Beweis (Abschätzung mit Flächenverwandlung):

Wir verschieben das Dreieck D_C um den Vektor $\overrightarrow{PA_b} = \overrightarrow{A_cA}$ und erhalten so das Dreieck D_C' mit den Ecken $A' = A$, $P' = P$ und der dritten Ecke B_c', diese liegt auf der Strecke AB und es ist $A_bB_c' \parallel PB_c = C_bP$. Weiter spiegeln wir das Dreieck D_B am Mittelpunkt der Strecke A_bP und erhalten so das Dreieck DB' mit den Ecken $P' = A_b$, $A_b' = P$ und der dritten Ecke C_b' es ist $A_bC_b' \parallel PC_b$ und $PC_b' \parallel A_bC_b$, also liegt C_b' auf dem Strahl $[PA_c$.



Nun ist aber auch $A_bC_b' \parallel A_bB_c'$, die beiden Geraden sind also identisch. Damit überdecken die Dreiecke D_C' und D_B' das Parallelogramm V_A im Bereich der Ecken A, A_b und P vollständig, und die Ecke A_c wird von Dreieck D_C' oder Dreieck D_B' überdeckt, je nachdem ob A_c zwischen A und B_c' liegt oder B_c' zwischen A und A_c. In jedem Fall ist $V_A \le D_B + D_C$, wobei stets auch Gleichheit eintreten kann. Analog schließen wir, dass $V_B \le D_C + D_A$ und $V_C \le D_A + D_B$.

Damit können wir weiter abschätzen, mit den Substitutionen $D_A = a$, $D_B = b$, $D_C = c$, $a + b = r$, $b + c = s$, $c + a = t$, also $a = {}^1/_2(r - s + t)$, $b = {}^1/_2(r + s - t)$, $c = {}^1/_2(-r + t + s)$, erhalten wir zusammen mit der bekannten Tatsache, dass für alle positiven u,v stets ${}^u/_v + {}^v/_u \ge 2$:

$$\begin{aligned} W &= \frac{D_A}{V_A} + \frac{D_B}{V_B} + \frac{D_C}{V_C} \ge \frac{D_A}{D_B + D_C} + \frac{D_B}{D_C + D_A} + \frac{D_C}{D_A + D_B} = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{r-s+t}{s} + \frac{r+s-t}{t} + \frac{-r+s+t}{r}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{r}{s} + \frac{s}{r} + \frac{s}{t} + \frac{t}{s} + \frac{t}{r} + \frac{r}{t} - 3\right) \\ &\ge \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Dass W jeden Wert größer als ${}^3/_2$ annimmt, zeigen wir wie in den anderen Beweisen.

Aufgabe 4: In Sikinien gibt es 2024 Städte. Zwischen manchen von ihnen gibt es direkte, in beiden Richtungen nutzbare Flugverbindungen. Dabei hat keine Stadt mit allen 2023 anderen Städten eine direkte Flugverbindung. Es ist aber bekannt, dass für eine bestimmte positive ganze Zahl n gilt: Zu beliebigen n Städten in Sikinien gibt es stets eine andere Stadt, die mit jeder dieser n Städte eine direkte Flugverbindung hat.

Bestimme den größten Wert, den n unter diesen Bedingungen annehmen kann.

Ergebnis: Der größte Wert, den n annehmen kann, ist $n = 1011$.

Bezeichnungen: "direkte, in beiden Richtungen nutzbare Flugverbindung" kürzen wir ab zu "Flugverbindung". Wenn die Stadt A keine Flugverbindung zu Stadt B hat, nennen wir A ein *Nichtziel* von B und B *Nichtziel* von A. Ein Flugplan, bei dem jede Stadt ein Nichtziel hat, heiße *zulässig*.

Sei M eine Teilmenge der Städte und $H \notin M$ eine Stadt, die mit jeder Stadt von M eine Flugverbindung hat. Dann nennen wir H einen *Hub* von M. Offensichtlich gilt: Ein Hub von M ist auch Hub von jeder Teilmenge von M, wenn M keinen Hub hat, dann hat auch jede Obermenge von M keinen Hub.

1. Beweis: Es genügt zwei Dinge zu zeigen:

(1) Für die 2024 Städte kann man einen zulässigen Flugplan konstruieren derart, dass es zu jeder n−elementigen Teilmenge M der Städte mit $n \le 1011$ Städten einen Hub von M gibt:

Die 2024 Städte werden mit $S_1, S_2, \dots, S_{2024}$ bezeichnet, also mit S_{2k-1} und S_{2k} für $k = 1, 2, \dots, 1012$. Für jedes $1 \le k \le 1012$ gelte: Die Städte S_{2k-1} und S_{2k} seien gegenseitige Nichtziele, sonst existieren zwischen allen anderen Städten Flugverbindungen. Somit hat jede Stadt ein Nichtziel, dieser Flugplan ist also zulässig.

Zu jeder Teilmenge M mit höchsten 1011 Städten gibt es nun nach Schubfachprinzip mindestens einen der 1012 Werte von k, sodass weder S_{2k-1} noch S_{2k} in M sind. Beide diese Städte sind dann ein Hub von M.

(2) Bei jedem zulässigen Flugplan zwischen den 2024 Städten können wir eine Teilmenge M mit $n = 1012$ Städten konstruieren, für die es keinen Hub gibt:

Wir beschreiben einen beliebig vorgegebenen zulässigen Flugplan für die 2024 Städte durch einen Graphen: Die Städte seien die Knoten, zwei Knoten seien genau dann durch eine Kante verbunden, wenn − entgegen der naheliegenden Definition − zwischen den zugehörigen Städten <u>keine</u> Flugverbindung besteht. (Vorsicht: Das Wort "verbinden" hat nun im Graphen und im Problem gegenteilige Bedeutung!) Da der Flugplan zulässig ist, gibt es von jedem Knoten zu mindestens einem anderen Knoten eine Kante, d.h. jede Zusammenhangskomponente des Graphen besteht aus mindestens zwei Knoten. Ein Knoten K ist dann ein Hub zu einer Menge M von Knoten, wenn er mit keinem Knoten aus M über eine einzelne Kante verbunden ist.

Gibt es im Graphen einen Kreis, entfernen wir aus diesem Kreis eine beliebige Kante, dadurch verschwindet der Kreis. Es geht dann immer noch von jedem Knoten mindestens eine Kante aus, der Flugplan bleibt also zulässig. Dem Streichen einer Kante entspricht die Herstellung einer zusätzlichen Flugverbindung, damit wird kein möglicher Hub zerstört, höchstens ein zusätzlicher Hub erstellt. Auf diese Art entfernen wir alle Kreise, dies ist möglich, weil wir nur endlich viele Knoten haben. In jeder Zusammenhangskomponente bleibt bei dieser Operation der Zusammenhang bestehen.

In jeder Zusammenhangskomponente färben wir Knoten nach folgender Regel: Wir färben einen beliebigen Knoten blau, die daran anliegenden rot, die benachbarten wieder blau usw., bis alle Knoten gefärbt sind. Diese Farbzuweisung ist nach der Wahl des ersten Knotens eindeutig, da es keine Kreise mehr gibt. Wenn es nun mehr rote als blaue Knoten gibt, färben wir um: rot wird zu blau, blau zu rot. Im gesamten Graph gibt es nun mindestens so viele blaue wie rote Knoten, entlang jeden Weges im Graph haben wir abwechselnd rote und blaue Knoten.

Sei nun M die Menge aller roten Knoten, also $|M| \le \frac{1}{2} \cdot 2024 = 1012$. Jede Kante, die von einem blauen Knoten ausgeht, endet an einem roten Knoten. Also kann kein blauer Knoten ein Hub von M sein. Damit haben wir eine Menge von höchstens $n = 1012$ Städten konstruiert, für die es keinen Hub gibt. Da dann auch jede Obermenge von M keinen Hub hat, gibt es für alle $n \geq 1012$ eine solche Menge.

2. Beweis: Die Existenz eines zulässigen Flugplans für $n \leq 1011$ weisen wir wie im 1. Beweis nach.

Weiter führen wir die Annahme, es gebe für 2024 Städte einen Flugplan mit den Eigenschaften

(N) Jede der 2024 Städte hat ein Nichtziel.

(H) Zu jeder Menge M von 1012 Städten gibt es einen Hub $H \notin M$

zum Widerspruch, indem wir eine besondere Menge von 1012 Städten konstruieren.

Hierzu wählen wir 1012 beliebige Städte aus, unter denen allerdings ein Paar von Nichtzielen sein muss, nach Annahme (N) ist dies möglich. Diese 1012 Städte nennen wir A−Städte, die restlichen 1012 Städte nennen wir B−Städte.

Nun weisen wir schrittweise den A−Städten und auch den B−Städten der Reihe nach Indices 1, 2, 3, ... , 1011 derart zu, dass nach der Zuweisung der Indices 1, 2, ... , k gilt:

(1) $A_1, A_2, \ldots, A_k$ sind mit allen B−Städten verbunden,
(2) $B_1, B_2, \ldots, B_k$ sind mit allen A−Städten verbunden,

(3) Zu jeder Stadt A_i ($i \leq k$) mit Index gibt es eine A−Stadt ohne Index, die Nichtziel von A_i ist
(4) Zu jeder Stadt B_i ($i \leq k$) mit Index gibt es eine B−Stadt ohne Index, die Nichtziel von B_i ist.

(5) Alle Städte mit Index sind untereinander verbunden.

Mit folgendem Algorithmus ist dies tatsächlich möglich:

Zu Beginn sei kein Index verteilt.

Nach Annahme (H) gibt es für die 1012 B−Städte einen Hub. Nach Definition des Hubs kann dies keine B−Stadt sein, der Hub ist also eine A−Stadt, wir geben ihr den Index 1. Nun ist A_1 mit jeder B−Stadt verbunden, also muss das Nichtziel von A_1 eine der A−Städte ohne Index sein.

Aber auch für die 1012 A−Städte gibt es einen Hub. Nach Definition des Hubs kann dies keine A−Stadt sein, der Hub ist also eine B−Stadt, wir geben ihr ebenfalls den Index 1. Nun ist B_1 mit jeder A−Stadt verbunden, also muss das Nichtziel von B_1 eine der B−Städte ohne Index sein.

Für $k = 1$ sind also die Eigenschaften (1) bis (5) erfüllt.

Seien für die A−Städte und B−Städte die Indices 1, ... , k für ein $k \geq 1$, $k \leq 1010$ so verteilt, dass obige Bedingungen erfüllt sind. Wir zeigen dann, dass man auch den Index $k + 1$ so zuordnen kann, dass (1) bis (5) erfüllt ist. Hierzu fassen wir alle B−Städte ohne Index und alle A−Städte mit Index zu einer Menge zusammen, diese nennen wir $M_B(k)$, analog sei $M_A(k)$ die Menge der B−Städte mit Index und A−Städte ohne Index.

Es gibt gleich viele A−Städte wie B−Städte, auch ist die Anzahl der Städte mit Index unter den A−Städten und unter den B−Städten gleich, also hat $M_B(k)$ ebenfalls 1012 Elemente. Es gibt also nach Annahme zu $M_B(k)$ einen Hub $H \notin M_B(k)$. Dieser Hub ist also eine B−Stadt mit Index oder eine A−Stadt ohne Index. H kann aber nicht eine B−Stadt mit Index sein, da es zu jeder B−Stadt mit Index ein Nichtziel unter den B−Städten ohne Index gibt. Also ist H eine A−Stadt ohne Index, nach Konstruktion hat diese eine Verbindung zu jeder A−Stadt mit Index.

Aber auch $M_A(k)$ hat 1012 Elemente. Mit analoger Argumentation gibt es zu $M_A(k)$ einen Hub unter den B−Städten ohne Index und dieser Hub hat Verbindung zu allen B−Städten mit Index. Diesen beiden Hubs weisen wir nun den Index $k + 1$ zu.

Nun sind alle Eigenschaften (1) bis (5) auch für $k + 1$ erfüllt, mit "unvollständiger Induktion" gilt dies also für alle $k \geq 1011$.

Nun besteht auch $M_B(1011)$ aus 1012 Städten, nämlich aus den Städten $A_1, \ldots, A_{1011}$ und der letzten B−Stadt ohne Index, sie heiße B^*. Ein Hub zu $M_B(1011)$ muss also die letzte A−Stadt ohne Index sein. Diese ist dann nicht nur mit B^* verbunden, sondern nach (1) auch mit allen Städten mit Index, d.h. sie ist mit allen Städten verbunden, hat also kein Nichtziel im Widerspruch zu (N).

3. Beweis (Widerspruchsbeweis, letztlich die gleichen Gedanken wie im 2. Beweis, mit Graphentheorie kürzer formuliert):

Wie im 1. Beweis zeigen wir, dass es für $n = 2011$ einen zulässigen Flugplan gibt.

Annahme: Es gibt einen zulässigen Flugplan für $n \geq 1012$.

Diesen beschreiben wir durch einen Graphen G. Die Städte seien die Knoten, und anders als im 1. Beweis seien zwei Knoten genau dann durch eine Kante verbunden, wenn zwischen ihnen eine Flugverbindung besteht. Weil es zu jeder Stadt ein Nichtziel gibt, ist dieser Graph nicht vollständig, d.h. es gibt Knotenpaare, die nicht durch eine Kante verbunden sind.

Die Menge der vollständigen Teilgraphen von G ist nicht leer, denn jeder Knoten für sich ist ein vollständiger Teilgraph. Es gibt also einen vollständigen Teilgraphen K_m von G mit maximaler Anzahl m von Knoten, $2 \leq m \leq 2023$.

Wäre nun $m \leq n$, hätte K_m nach Voraussetzung einen Hub $v \in G \backslash K_m$. Dann wäre aber $K_m \cup \{v\}$ ein vollständiger Teilgraph von G mit m+1 Elementen im Widerspruch zur Maximalität von m.

Aber auch $m > n \geq 1012$ kann nicht sein. Denn dann hat $G \backslash K_m$ höchstens $1011 < n < m$ Knoten. Also gibt es zu $G \backslash K_m$ einen Hub $u \notin G \backslash K_m$, also $u \in K_m$. Nun ist u mit allen Knoten aus K_m und allen Knoten aus $G \backslash K_m$ verbunden, hat also kein Nichtziel im Widerspruch zur Voraussetzung.