Aufgaben und Lösungen

1. Runde 2025

Vorläufige Version

für die

Homepage

» KORREKTURKOMMISSION | KARL FEGERT

» BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK

Kortrijker Straße 1, 53177 Bonn | Postfach 20 02 01, 53132 Bonn | Tel.: (02 28) 9 59 15-20, Fax: (02 28) 9 59 15-29
info@bundeswettbewerb-mathematik.de, www.bundeswettbewerb-mathematik.de

März 2025

GEFÖRDERT VOM

Bundesministerium für Bildung und Forschung

STIFTERVERBAND

KULTUSMINISTER KONFERENZ

Aufgabe 1: Fridolin Frosch springt auf der Zahlengerade umher: Er startet bei der Zahl 0, springt in irgendeiner Reihenfolge auf jede der Zahlen 1, 2, … , 9 genau einmal und danach mit seinem letzten Sprung wieder zur Zahl 0 zurück.

Kann die zurückgelegte Gesamtstrecke bei den 10 Sprüngen dabei a) 20, b) 25 Längeneinheiten betragen?

Anmerkungen: Eine Längeneinheit ist der Abstand zwischen 0 und 1 auf der Zahlengerade. Die Richtigkeit der Antwort ist zu beweisen.

Ergebnis: zu a) Ja, die zurückgelegte Gesamtstrecke kann 20 Längeneinheiten betragen.

zu b) Nein, die zurückgelegte Gesamtstrecke kann nicht 25 Längeneinheiten betragen.

1. Beweis zu a): z.B. mit folgender Reihenfolge (in der Zeile darunter sind die zurückgelegten Wegstrecken notiert):

Sprungfolge $0 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 9 \rightarrow 0.$

ergibt Gesamtstrecke $2 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 9 = 20.$

1. Beweis zu b): Jedes Mal, wenn Fridolin die Strecke zwischen zwei aufeinander folgenden Zahlen (diese haben alle die Länge 1) nach rechts überquert, muss er diese Strecke auf dem Rückweg ein zweites Mal überqueren. Also überquert er jede Strecke der Länge 1 eine gerade Anzahl von Malen. Die Summe aller zurückgelegter Strecken der Länge 1 ist also eine Summe von geraden Zahlen, also ist die Maßzahl der zurückgelegten Gesamtstrecke immer geradzahlig. Aber 25 ist nicht geradzahlig.

Variante (formale Rechnung): Die Zahlen, auf die Fridolin springt, seien der Sprungfolge entsprechend mit $a_1, a_2, \dots, a_9$ bezeichnet. Die Maßzahl S der Länge der zurückgelegten Gesamtstrecke betrachten wir $\bmod 2$, es gilt:

$$\begin{aligned}
S &= |0 - a_1| + |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + |a_3 - a_4| + \dots + |a_8 - a_9| + |a_9 - 0| \\
&\equiv |0 - a_1 + 2a_1| + |a_1 - a_2 + 2a_2| + |a_2 - a_3 + 2a_3| + \dots + |a_8 - a_9 + 2a_9| + |a_9| \\
&\equiv |a_1| + |a_1 + a_2| + |a_2 + a_3| + \dots + |a_8 + a_9| + |a_9| \\
&\equiv 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 + \dots + 2a_9 \equiv 0 \bmod 2.
\end{aligned}$$

d.h. S ist geradzahlig. Aber 25 ist nicht geradzahlig.

2. Beweis zu b): Wir kürzen "Weglänge mit (un−)geradzahliger Maßzahl" ab zu "(un−)geradzahlige Länge". Zwei ganze Zahlen haben *gleiche Parität*, wenn beide gerade oder beide ungerade sind, sie haben verschiedene Parität, wenn die eine gerade und die andere ungerade sind.

Addiert man positive ganze Zahlen, so ist die Summe genau dann gerade, wenn die Anzahl der ungeradzahligen Summanden gerade ist. Eine geradzahlige Länge bei einem Sprung erhält man genau dann, wenn die Anfangs− und Endzahl bei diesem Sprung gleiche Parität haben, eine ungeradzahlige Länge erhält man genau dann, wenn Anfangs− und Endzahl verschiedene Parität haben.

Wir teilen die Menge der Zahlen 0, 1, ... , 9 in die Menge G der geraden Zahlen und in die Menge U der ungeraden Zahlen auf. Bei seinen Sprüngen startet Fridolin von einer Zahl von G (nämlich der Zahl 0), springt − nachdem er evtl. einige Male zwischen Zahlen von G hin und her gesprungen ist − auf eine Zahl aus U, nach einigen anderen Sprüngen zwischen Zahlen von U wieder auf eine Zahl von G usw.. Bei jedem Sprung innerhalb der gleichen Menge bleibt die Parität der Zwischensumme der Weglängen gleich, bei jedem Sprung in die jeweils andere Menge wechselt die Parität. Da er mit der Zahl 0 beginnt und bei der Zahl 0 endet, also jeweils in G, gibt es für jeden Sprung von G nach U genau einen Sprung von U nach G, die Anzahl der Paritätswechsel ist also gerade. Da die Weglänge vor dem ersten Sprung 0 ist, also gerade, ist die Endsumme ebenfalls gerade.

3. Beweis zu b) (Vollständige Induktion): Wir zeigen eine Verallgemeinerung:

Für alle positiven ganzen Zahlen n gilt: Wenn Fridolin bei der Zahl 0 startet und dann in irgendeiner Reihenfolge auf jede der Zahlen 1, 2, … , n genau einmal springt und danach mit seinem letzten Sprung wieder zur Zahl 0 zurück, so ist die Maßzahl der Gesamtlänge eine gerade Zahl.

Induktionsanfang: Die Aussage ist richtig für $n = 1$: Die einzige Möglichkeit für Fridolin ist $0 \to 1 \to 0$, hier ist die Maßzahl der Gesamtlänge 2, also gerade.

Induktionsannahme: Die Aussage ist richtig für irgend ein $n_0 \geq 1$, d.h. bei jeder Sprungfolge ist die Maßzahl der Weglänge eine positive ganze gerade Zahl.

Induktionsschluß: Dann ist die Aussage auch richtig für $n_0 + 1$: Wir betrachten eine beliebige Sprungfolge. In dieser springt Fridolin genau einmal auf die Zahl $n_0 + 1$. Die Zahl, von der er auf die $n_0 + 1$ springt, nennen wir a, die Zahl, auf die er von der $n_0 + 1$ springt, nennen wir b, dabei ist $b \neq a$, $a,b < n_0+1$. Ein Teil der Sprungfolge hat also die Form $\ldots \to a \to n_0 + 1 \to b \to \ldots$. Nun lassen wir die Zahl $n_0 + 1$ aus, erhalten also eine Sprungfolge $\ldots \to a \to b \to \ldots$, hier springt Fridolin −beginnend bei der Zahl 0 − auf jede der Zahlen 1, ... , n_0 genau einmal, es gilt also die Induktionsvoraussetzung, d.h. die Maßzahl der Gesamtlänge ist eine gerade Zahl. Fügt man die $n_0 + 1$ wieder ein, so ändert sich die Gesamtwegstrecke um eine gerade Zahl, nämlich um $2(n_0 + 1 - b)$ wenn $b > a$, oder um $2(n_0 + 1 - a)$, wenn $b < a$.

Bemerkung: Beim 1. und 2. Beweis für b) haben wir nicht benützt, dass Fridolin auf jeder Zahl genau einmal landet. Der zweite Beweis zeigt, dass die Aussage gültig bleibt, wenn nur verlangt wird, dass Fridolin mit dem letzten Sprung auf einer geraden Zahl landet.

Mit dem verwendeten Argument erkennt man auch, dass die kleinstmögliche zurückgelegte Gesamtwegstrecke 18 beträgt: Die Zahl 9 wird mindestens einmal erreicht, jede der 9 Zwischenräume aufeinander folgender Zahlen also mindestens zwei Mal überquert, und es gibt eine Sprungfolge dieser Länge, nämlich $0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 7 \to 8 \to 9 \to 0$.

Die maximal mögliche Gesamtlänge ist 50: Von der Zahl k ($0 \leq k \leq 8$) aus können nur $9 - k$ Zahlen, die größer als k sind, angesprungen werden, also der Abstand zwischen k und k+1 nicht öfters als $9 - k$ Mal in positiver Richtung überquert werden. Aber die Zahl k+1 kann auch nur von k Zahlen, die kleiner sind als k, angesprungen werden, d.h. der Abstand zwischen k und k+1 kann nicht öfters als k Mal in positiver Richtung überquert werden. Die maximale Länge des Gesamtweges ist also sicher nicht größer als $2\cdot(1+2+3+4+5+4+3+2+1) = 50$. Diese Gesamtlänge kann tatsächlich erreicht werden, z.B. durch $0 \to 9 \to 1 \to 8 \to 2 \to 7 \to 3 \to 6 \to 4 \to 5 \to 0$ mit Gesamtlänge $9 + 8 + \ldots + 2 + 1 + 5 = 50$.

Aufgabe 2: Für jede ganze Zahl $n \geq 2$ betrachten wir in der Dezimaldarstellung von $n!$ die letzte von Null verschiedene Ziffer. Die unendliche Folge dieser Ziffern beginnt wegen 2! = **2**, 3! = **6**, 4! = 2**4**, 5! = 1**2**0 und 6! = 7**2**0 mit 2, 6, 4, 2, 2.

Bestimme alle Ziffern, die mindestens einmal in dieser Folge vorkommen und zeige, dass jede dieser Ziffern sogar unendlich oft vorkommt.

Bezeichnungen: Alle Aussagen über Ziffern einer Zahl beziehen sich auf die Dezimaldarstellung dieser Zahl. Den Begriff "Die letzte von Null verschiedene Ziffer von m" kürzen wir ab zu L−Ziffer von m" oder noch kürzer zu "$L(m)$".

Antwort: Für $n \geq 2$ kann $n!$ nur die L−Ziffern 2, 4, 6 und 8 haben, und jede dieser Ziffern kommt unter allen $L(n!)$ unendlich oft vor.

1. Beweis:

Teil 1: In der Folge kommt jede der Zahlen 2, 4, 6, 8 vor und keine anderen:

Es ist 2! = **2**, 3! = **6**, 4! = 2**4**, 9! = 36288**8**0, d.h. in der Folge der $L(n!)$ kommen die Ziffern 2, 4, 6, 8 tatsächlich alle vor.

Um zu zeigen, dass keine anderen L−Ziffern vorkommen, stellen wir zunächst fest, dass das Produkt zweier Faktoren, von denen keine die L−Ziffer 5 hat, die gleiche L−Ziffer hat wie das Produkt der L−Ziffern der beiden Faktoren. Formal ausgedrückt: Für positive ganze Zahlen A,B mit $L(A) = a \neq 5$ und $L(B) = b \neq 5$ ist $L(AB) = L(ab)$. Dies sieht man sofort, wenn man ein solches Produkt mit dem in der Grundschule üblichen Algorithmus berechnet.

Wir benützen folgenden Hilfssatz, den wir weiter unten beweisen:

HS: Für alle $n \geq 2$ enthält die Primfaktorzerlegung von $n!$ mehr Faktoren 2 als Faktoren 5.

Beweis des HS: Wir fassen in der Primfaktorzerlegung von $n!$ die von 2 und 5 verschiedenen Faktoren zu einem positiven ganzzahligen Faktor $R = R(n) \geq 1$ zusammen und erhalten mit dem Hilfssatz

$$n! = 2^z \cdot 5^f \cdot R = (2^{(z-f)} \cdot R) \cdot 10^f,$$

wobei R weder durch 2 noch durch 5 teilbar ist, und nach dem Hilfssatz ist $z > f$.

Weil $z > f$, ist $z - f \geq 1$, also ist $2^{(z-f)}$ ganzzahlig, durch die Primzahl 2 teilbar und sicher nicht durch die Primzahl 5 teilbar. Aber auch R ist nicht durch 5 teilbar, also ist $2^{(z-f)} \cdot R$ durch die 2 teilbar, aber nicht durch 5. Damit hat $2^{(z-f)} \cdot R$ sicher nicht Endziffer 0 und eine der Endziffern 2, 4, 6, 8. Hieraus erhält man $n!$ durch eine Multiplikation mit 10^f, dies entspricht dem Anhängen von f Nullen. Also haben $n!$ und $(2^{(z-f)} \cdot R)$ die gleiche L−Ziffer, also eine der Ziffern 2, 4, 6, 8.

Teil 2: Jede der Ziffern 2, 4, 6 und 8 kommt unendlich oft vor:

Variante 1: Es gilt: Wenn $L(n!)$ gerade und $L(n+1) \neq 5$, dann ist $L(n+1)! = L(L(n!) \cdot L(n+1))$.

Nun können wir leicht zeigen, dass für jedes $k \geq 1$ unter den vier Zahlen $(10^k - 4)!$, $(10^k - 3)!$, $(10^k - 1)!$, und $(10^k + 2)!$ jede der Ziffern 2, 4, 6, und 8 vorkommt.

Wie gerade gezeigt, hat die Zahl $(10^k - 4)!$ für $k \geq 1$ nur eine der L−Ziffern 2, 4, 6 oder 8, und die Zahlen im Intervall $[10^k - 3, 10^k + 2]$ der Reihe nach die L−Ziffern 7, 8, 9, 1, 1 bzw. 2. Mit fortlaufende Multiplikation der L−Ziffer von $(10^k - 4)!$ mit 7, 8, 9 und $(1 \cdot 1 \cdot 2)$ erhält nun man die L−Ziffern der Fakultäten $(10^k - 3)!$, $(10^k - 2)!$, $(10^k - 1)!$ und $(10^k + 2)!$; einfaches Nachrechnen im Kopf bestätigt, dass in jedem Fall jede der Ziffern 2, 4, 6 und 8 auftaucht:

Mögliche L−Ziffer von $(10^k - 4)!$ sind

2:	dann erhält man die L−Ziffern	2·7 = 1**4**,	4·8 = 3**2**,	2·9 = 1**8**,	8·1·1·2 = 1**6**
4:	"	4·7 = 2**8**,	8·8 = 6**4**,	4·9 = 3**6**	6·1·1·2 = 1**2**
6:	"	6·7 = 4**2**,	2·8 = 1**6**,	6·9 = 5**4**,	4·1·1·2 = **8**
8:	"	8·7 = 5**6**,	6·8 = 4**8**,	8·9 = 7**2**,	2·1·1·2 = **4**.

Abschließend stellt man noch fest, dass es unendlich viele verschiedene k gibt und man für verschiedene k auch verschiedene Fakultäten $(10^k-3)!$, $(10^k-2)!$, $(10^k-1)!$ und $(10^k+2)!$ erhält.

Variante 2: Ebenso leicht können wir zeigen, dass für jedes $k \geq 1$ unter den vier Zahlen $(100k+17)!$, $(100k+18)!$, $(100k+19)!$ und $(100k+20)!$ die L−Ziffern 2, 4, 6 und 8 vorkommen: Es ist $L(100k+18) = 8$, $L(100k+19) = 9$ und $L(100k+20) = 2$. Wie eben gezeigt, hat $(100k+17)!$ eine der L−Ziffer $a \in \{2, 4, 6, 8\}$ und somit haben $(100k+18)!$, $(100k+19)!$ und $(100k+20)!$ die gleichen L−Ziffern wie $8 \cdot a$, $8 \cdot 9 \cdot a$, $8 \cdot 9 \cdot 2 \cdot a$. Für $a = 2$ erhält man 6, 4, 8, für $a = 4$ erhält man 2, 8, 6, für $a = 6$ erhält man 8, 2, 4 und für $a = 8$ erhält man 4, 6, 2; in jedem Fall kommen die L−Ziffern 2, 4, 6 und 8 vor.

Nun zum Beweis des Hilfssatzes:

HS: Für $n \geq 2$ enthält die Primfaktorzerlegung von $n!$ mehr Faktoren 2 wie Faktoren 5.

1. Beweis des HS: Den Geschwistern der Fridolin−Frosch−Familie geben wir die Namen 2^m ($m = 1, 2, 3, \ldots$), sie springen über den Zahlenstrahl und hinterlassen auf den Zahlen $1, 2, \ldots, n$ nach folgender Regel so genannte Zweierkleckse: Jeder Frosch 2^m hüpft − beginnend bei 0 − in Schritten der Länge 2^m über den Zahlenstrahl und hinterlässt auf jeder Zahl (und nur auf diesen), auf der er landet, also auf den Zahlen $1 \cdot 2^m$, $2 \cdot 2^m$, $3 \cdot 2^m$, $4 \cdot 2^m, \ldots$, einen Zweierklecks. Jeden solchen Zweierklecks bezeichnen wir zusätzlich nach dem Frosch, der ihn hinterlassen hat, mit 2^m−Klecks. (So sind z.B. auf der Zahl 8 genau drei Zweierkleckse, nämlich ein 2^1−, ein 2^2− und ein 2^3−Klecks.)

So ist auf den durch 2 teilbaren Zahlen (und nur auf diesen) jeweils genau ein 2^1−Klecks. Auf den durch 2 teilbaren Zahlen, die auch durch $4 = 2^2$ teilbar sind (und nur auf diesen), ist zusätzlich jeweils genau ein 2^2−Klecks, usw. Allgemein gilt: Auf jeder Zahl k, die durch 2^r teilbar ist (und nur auf diesen), gibt es mindestens r Zweierkleckse. Ist 2^t die größte Zweierpotenz, die k teilt, so gibt es auf k genau t Zweierkleckse und t ist der Exponent zur Zahl 2 in der Primfaktorzerlegung von k. Damit ist die Gesamtzahl der Zweierkleckse auf den Zahlen $1, 2, \ldots, n$ der Exponent zur Zahl 2 in der Primfaktorzerlegung von $n!$.

Analog hinterlassen die 5^m−Frösche auf den Zahlen $1, 2, \ldots, n$ ihre 5^1−Kleckse, 5^2−Kleckse, ... Die Gesamtzahl aller dieser Fünferkleckse ist der Exponent zur Zahl 5 in der Primfaktorzerlegung von $n!$.

Unter vier aufeinander folgenden Zahlen sind stets zwei Zahlen, die durch 2 teilbar sind und eine davon ist sogar durch 4 teilbar. Zu jeder Zahl $s \leq n$ mit einem 5^1−Klecks – das sind die Vielfachen von 5 − gibt es also unter den Zahlen $s-1$, $s-2$, $s-3$ und $s-4$ zwei mit einem 2^1−Klecks, von denen eine auch einen 2^2−Klecks hat. Die Gesamtzahl der 2^1− und 2^2−Zweierkleckse unter den Zahlen $1, 2, \ldots, n$ ist also mindestens drei Mal so groß wie die Zahl der 5^1−Kleckse. (Wir haben dabei berücksichtigt, dass bei der Zählung keine der Zahlen doppelt vorkommt. Die Abschätzung ist nicht scharf, weil es auch Zahlen gibt, die außer einem 5^1−Klecks auch Zweierkleckse haben.)

Nun betrachten wir die Zahlen t mit 5^2−Klecksen, das sind die Vielfachen von $5^2 = 25$. Unter den $24 = 5^2 - 1$ aufeinander folgenden Zahlen $t-1$, $t-2, \ldots, t-24$ sind mindestens zwei Zahlen (manchmal sogar drei), die durch $8 = 2^3$ teilbar sind, und mindestens eine davon ist sogar durch $16 = 2^4$ teilbar (manchmal sogar zwei). Analog können wir schließen, dass unter den Zahlen $1, 2, \ldots, n$ also die Gesamtzahl der 2^3−Kleckse und 2^4−Kleckse mindestens drei Mal so groß ist wie die Anzahl der 5^2−Kleckse.

Analoge Schlussweise mit höheren Exponenten ergibt: Für alle $r \geq 1$ ist die Gesamtzahl der 2^{2r-1}−Kleckse und 2^{2r}−Kleckse mindestens drei Mal so groß wie die Anzahl der 5^r−Kleckse.

Formal kann man das so schreiben: Es gibt eindeutig bestimmte ganze nicht−negative Zahlen d, p und R, wobei R weder durch 2 noch durch 5 teilbar ist, für die $n! = 2^d \cdot 5^p \cdot R$. Dann gilt für $n \geq 2$ sogar schärfer als behauptet $d \geq 3p$, und für $n \geq 6$ sogar $d > 3p$.

2. Beweis des HS: Wir verwenden einen weiteren sofort einsichtigen Hilfssatz:

HS: Sei $m = 5^p \cdot S$ mit $p \geq 1$ und S nicht durch 5 teilbar. Dann gibt es im Intervall $[5^p \cdot (S-1)+1, 5^p \cdot S - 1]$ genau $5^p - 1$ aufeinander folgende positive ganze Zahlen. Darunter sind mindestens $\lfloor (5^p - 1) : 2^p \rfloor$

$= \lfloor (2{,}5)^p - (1/2)^p \rfloor$ aufeinander folgende Zahlen Vielfache von 2^p, d.h. Zahlen der Form $s \cdot 2^p$, $(s+1)\cdot 2^p$, $(s+2)\cdot 2^p$, ... mit geeignetem positiv ganzzahligem s. Davon sind die mit ungeradem $s+i$ nicht durch 2^{p+1} teilbar, die mit geradem $s+i$ sind durch 2^{p+1} teilbar, nur die mit durch 5 teilbarem $s+i$ sind durch 5 teilbar.

Für $p = 1$ ist $\lfloor (5^p - 1) : 2^p \rfloor = 2$, d.h. das Intervall $[5^p\cdot(S-1)+1\ ,\ 5^p\cdot S - 1\ ]$ besteht aus den vier Zahlen $5S-4$, $5S-3$, $5S-2$, $5S-1$; keine davon ist durch 5 teilbar, und zwei dieser Zahlen sind durch 2^1 teilbar, eine davon nicht durch 2^2.

Für $p \ge 2$ ist $\lfloor (5^p - 1) : 2^p \rfloor = \lfloor (5:2)^p - 1:2^p \rfloor \ge \lfloor 6{,}25 - 0{,}25 \rfloor = 6$, d.h. im Intervall $[5^p\cdot(S-1)+1\ ,\ 5^p\cdot S - 1\ ]$ gibt es mindestens sechs Zahlen, der Form $s\cdot 2^p$, $(s+1)\cdot 2^p$, $(s+2)\cdot 2^p$, ... , $(s+6)\cdot 2^p$, die durch 2^p teilbar sind, davon sind drei nicht durch 2^{p+1} teilbar und von diesen drei sicher eine nicht durch 5.

Nun ordnen wir jeder Zahl $m = 5^p \cdot S$ die kleinste Zahl $Z(m)$ im Intervall $[5^p\cdot(S-1)+1\ ,\ 5^p\cdot S - 1\ ]$ zu, die durch 2^p, aber nicht durch 2^{p+1} und auch nicht durch 5 teilbar ist. Wie oben gezeigt, exisitiert eine solche Zahl $Z(m)$, und da es im Intervall $[5^p\cdot(S-1)+1\ ,\ 5^p\cdot S - 1\ ]$ keine weitere Zahl gibt, die Vielfaches von 5^p gibt, werden auch verschiedenen Zahlen m verschiedene Zahlen $Z(m)$ zugeordnet. Diese Zuordnung zeigt, dass die Primfaktorzerlegung von $n!$ mindestens soviele Faktoren 2 wie Faktoren 5 besitzt.

Aber es gibt noch Faktoren 2, die von dieser Zuordnung nicht erfasst sind: Für alle $p \ge 1$ gilt $2^{p+1} \le 4^p < 5^p$. Zu jeder Zahl $5^p \le n$ gibt es also eine Zweierpotenz $2^{p+1} < 5^p < n$. Die größte Zweierpotenz unter den Zahlen $1, 2, \ldots, n$ wurde also bei dieser Zuordnung nicht erfasst. Somit haben wir nachgewiesen, dass es in der Primfaktorzerlegung von $n!$ mehr Faktoren 2 als Faktoren 5 gibt.

Variante: In der Primfaktorzerlegung von $n!$ ziehen wir nun die Produkte $m\cdot Z(m) = 10^p$ vor, es ist also $n! = 2^t \cdot 2^p \cdot 5^p \cdot R = 2^t \cdot 10^p \cdot R$ mit $t \ge 1$ und R weder durch 2 noch durch 5 teilbar. Offensichtlich entsteht $n!$ aus $2^t \cdot R$ durch Anhängen von p Ziffern 0. Da $2^t \cdot R$ nicht durch 5 teilbar ist, hat diese Zahl nicht Endziffer 0, d.h. die letzte Ziffer dieser Zahl ist identisch mit der letzten von Null verschiedene Endziffer von $n!$. Da $t \ge 1$, ist $2^t \cdot 10^p \cdot R$ gerade, ist also eine der Ziffern 2, 4, 6 oder 8.

3. Beweis (Formulierung des obigen Beweises mit Formeln):

Der Exponent $e(p)$ zur Primzahl p der Primfaktorzerlegung von $n!$ berechnet sich zu (das ist die Übersetzung der Froschkleckse in eine mathematisch abstrakte Formulierung und kommt in der Fachliteratur häufig vor):

$$e(p) = \left\lfloor \frac{n}{p^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^4} \right\rfloor + \ldots$$

Damit ist für $2 \le n \le 4$ offensichtlich $0 = e(5) < 1 \le e(2) = 3$, und für $n \ge 5$ ist

$$\begin{aligned} e(2) - e(5) &= \left\lfloor \frac{n}{2^1} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{5^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{5^3} \right\rfloor + \ldots - \\ &= \left\lfloor \frac{\frac{5^1}{2^1}\cdot n}{\frac{5^1}{2^1}\cdot 2^1} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{5^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\frac{5^2}{2^2} n}{\frac{5^2}{2^2} 2^2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\frac{5^3}{2^3} n}{\frac{5^3}{2^3} 2^3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{5^3} \right\rfloor + \ldots - \\ &= \left\lfloor (2{,}5)^1 \cdot \frac{n}{5^1} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{5^1} \right\rfloor + \left\lfloor (2{,}5)^2 \cdot \frac{n}{5^2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor (2{,}5)^3 \frac{n}{5^3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{5^3} \right\rfloor + \ldots - \\ &\ge 2 \cdot \left\lfloor \frac{n}{5^1} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{5^1} \right\rfloor + 2 \cdot \left\lfloor \frac{n}{5^2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{5^2} \right\rfloor + 2 \cdot \left\lfloor \frac{n}{5^3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{5^3} \right\rfloor + \ldots - \quad = e(5) \ge 1. \end{aligned}$$

Man kann $e(2) - e(5)$ schärfer abschätzen über die Formel $\left(\left\lfloor \frac{n}{2^{2p-1}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^{2p}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{5^p} \right\rfloor \right) > 0$.

Vergleiche auch

https://math.stackexchange.com/questions/3335933/last-non-zero-digit-in-20

https://www.matheboard.de/archive/437101/thread.html

4. Beweis (für "nur 2,4,6,8 kommen vor", induktiv):

L−Ziffern sind stets von 0 verschieden, d.h. die Menge der geraden L−Ziffern ist {2, 4, 6, 8.}.

HS: Seien $L(A) = a \neq 5$ und $L(B) = b \neq 5$. Dann ist $L(AB) = L(ab)$.

(*) Insbesondere hat $L(AB)$ dann gerade L−Ziffer, wenn $a \neq 5$ und $b \neq 5$ und wenigstens eine der Zahlen a oder b gerade ist.

Wir werden folgende Aussagen beweisen:

(1) Hat $(5m)!$ ($m \geq 1$) eine gerade L−Ziffer, dann auch $(5m+i)!$ mit $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

(2) Hat $m!$ ($m \geq 1$) nicht 5 als L−Ziffer, dann hat $(5m)!$ eine gerade L−Ziffer.

Da die L−Ziffern von $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$ und $(5\cdot 1)! = 5! = 120$ alle gerade sind, können wir durch mehrfache Anwendung von (1) und (2) induktiv schließen, dass $n!$ für alle $n > 5$ eine gerade L−Ziffer hat.

Nachweis von (1): Nach Voraussetzung ist die L−Ziffer von $(5m)!$ gerade, die L−Ziffern der Zahlen $5m+i$ sind 1, 2, 3, 4, oder 6, 7, 8, 9, also alle verschieden von 5. Die Aussage folgt also mit (*).

Nachweis von (2): Zur Bestimmung der L−Ziffer von $(5m)!$ fassen wir im Produkt $(5m)!$ solche Faktoren zusammen, die Vielfache von 5 sind und solche, die nicht Vielfache von 5 sind. So erhält man

$$(5m)! = \prod_{5\mid k, k\leq 5m} k \cdot \prod_{5\nmid k,\, k<5m} k = \prod_{k=1}^{m}(5k) \cdot \prod_{5\nmid k,\, k<5m} k = 5^m \cdot \prod_{k\leq m} k \cdot \prod_{5\nmid k,\, k<5m} k = 5^m \cdot m! \cdot \prod_{5\nmid k,\, k<5m} k\,.$$

Das Produkt $\prod_{5\nmid k,\, k<5m} k$ kann man aufteilen in m Produkte zu je 4 Faktoren, die aufeinander folgende Zahlen sind und entweder die Endziffern 1, 2, 3 und 4 haben oder die Endziffern 6, 7, 8 und 9. Keiner dieser Faktoren ist durch 5 teilbar. Weiter sind in jedem Produkt zwei Zahlen mit geraden Endziffern, von diesen beiden Zahlen ist stets eine durch 2, aber nicht durch 4 teilbar, die andere durch 4 (oder eine höhere Zweierpotenz). Jedes dieser Produkte ist also Vielfaches von $8 = 2^3$, aber nicht Vielfaches von 5, kann also dargestellt werden als $2^3\cdot R'$, wobei R' nicht durch 5 teilbar ist, also keine Endziffer 5 hat.

Mit A *=* B drücken wir aus, dass A und B gleiche L−Ziffer haben. Somit ist für alle $m = 1, 2, ...$

$$(5m)! = 5^m \cdot m! \cdot 2^{3m}\cdot R = 10^m \cdot 2^{2m} \cdot R \cdot m! \;\text{*=*}\; 1 \cdot 2^{2m} \cdot R \cdot m! \;\text{*=*}\; 2^{2m} \cdot R \cdot m!$$

Nun hat 2^{2m} für ungerade m stets die gerade Endziffern 4 und für gerade m die gerade Endziffer 6, und R hat eine Endziffer verschieden von 0 und 5. Wenn also $m!$ nicht 5 als L−Ziffer hat, folgt mit (*) die Aussage.

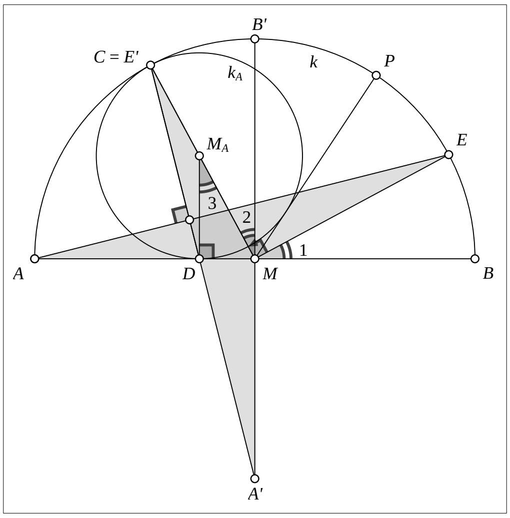
Bemerkung: Mit dieser Argumentation können wir rekursiv die L−Ziffer von $n!$ bestimmen; wir benützen dabei, dass 2^m und 2^k die gleichen Endziffern besitzen, wenn $k,m \geq 1$ und $k \equiv m \bmod 4$. Es ist z.B. (mit *=* drücken wir aus, dass die linke und die rechte Seite die gleich L−Ziffer haben):

$$377! = (5\cdot 75)! \cdot 376 \cdot 377 \;\text{*=*}\; 2^{75} \cdot 75! \cdot 6\cdot 7 \;\text{*=*}\; 2^3 \cdot (5\cdot 15)! \cdot 2 \;\text{*=*}\; 2^4 \cdot 2^{15} \cdot (15)!$$
$$= 2^{4+3\cdot 4+3} \cdot (5\cdot 3)! \;\text{*=*}\; 2^3 \cdot 2^3 \cdot 3! \;\text{*=*}\; 2^2 \cdot 6 \;\text{*=*}\; 4.$$

Aufgabe 3: Gegeben ist ein Halbkreis k über der Strecke AB mit Mittelpunkt M und ein von A und B verschiedener Punkt P auf k.

Der Kreis k_A berührt k im Punkt C, die Strecke MA im Punkt D und außerdem die Strecke MP. Der Kreis k_B berührt k im Punkt E und außerdem die Strecken MB und MP.

Beweise: Die Geraden AE und CD stehen senkrecht aufeinander.



1. Beweis Den Mittelpunkt von k_A bezeichnen wir mit M_A.

Da k_A die Strecke AB in D berührt, ist $M_AD \perp AB$, und da k_A den Kreis k im Punkt C berührt, liegen M, M_A und C auf einer Geraden. Weiter liegen A und E auf einem Kreis um M, also ist das Dreieck AME gleichschenklig mit Basis AE, und da D und C auf einem Kreis um M_A liegen, ist Dreieck DM_AC gleichschenklig mit Bais CD.

Weil k_A die Schenkel des Winkels $\angle PMA$ berührt, liegt M_A auf der Winkelhalbierenden von $\angle PMA$, also auch der Punkt C, analog begründen wir, dass E auf der Winkelhalbierenden von $\angle BMP$ liegt. Also gilt

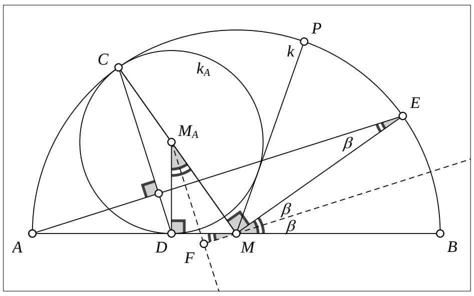
$$\angle EMC = \angle EMP + \angle PMC = {}^1/_2\angle BMP + {}^1/_2\angle PMA$$
$$= {}^1/_2\angle BMA = {}^1/_2 \cdot 180° = 90°.$$

Es folgt, dass D zwischen A und M liegt.

Nun drehen wir das Dreieck AME und die Strecke AB um den Winkel $\angle EMC = 90°$ gegen den Uhrzeigersinn um M. Dabei bleibt der Punkt M fest, der Punkte E kommt auf den Punkt C, der Punkt A auf einen Punkt A', für den $\angle AMA' = 90°$ gilt, dabei sind C und A' in verschiedenen Halbebenen bezgl. der Geraden AB, und schließlich der Punkt B auf einen Punkt B' auf k derart, dass $B'M \perp AB$, also $B'M \parallel M_AD$ gilt.

Nach Wechselwinkelsatz ist nun $\angle DM_AM = \angle B'MM_A = \angle B'MC = \angle B'ME' = \angle BME$, d.h. die Dreiecke AME und CM_AD haben bei M bzw. M_A den gleichen Außenwinkel, also auch den gleichen Innenwinkel. Da diese beiden Dreiecke auch beide gleichschenklig sind, sind nun auch die übrigen Winkel alle gleich.

Damit sind alle entsprechenden Seiten dieser Dreiecke parallel, insbesondere ist auch $DC \parallel A'C$. Da $A'C$ durch Drehung um 90° aus AE entstanden ist, gilt also auch $CD \perp AE$.



2. Beweis: Den Mittelpunkt von k_A bezeichnen wir mit M_A, den Winkel $\angle AEM$ mit β, den (sicher existierenden) Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\angle BME$ und $\angle DM_AM$ mit F.

Da A und E Punkte auf dem gleichen Kreis um M liegen, ist das Dreieck AME gleichschenklig mit Basis AE. Für die Basiswinkel gilt $\angle MAE = \angle AEM = \beta$, und für den Außenwinkel gilt $\angle BME = 2\beta$. Nach Wechselwinkelsatz ist nun die Winkelhalbierende von $\angle BME$ parallel zur Basis AE. Mit analogen Argumenten zeigen wir, dass das Dreieck DM_AC gleichschenklig mit Basis CD ist und dass die Winkelhalbierende des Außenwinkels $\angle DM_AM$ parallel zur Basis CD ist. Es genügt also zu zeigen, dass diese beiden Winkelhalbierenden sich rechtwinklig schneiden.

Weil k_A und k sich im Punkt C berühren, liegen M, M_A und C auf einer Geraden. Weil zusätzliche k_A die Halbgeraden [MA und [MP berührt, ist diese Gerade MC Winkelhalbierende von $\angle PMA$. Mit analoger Argumentation schließen wir, dass ME Winkelhalbierende von $\angle BMP$ ist. Hieraus folgt

$$\angle EMC = \angle EMP + \angle PMC = {}^1/_2\angle BMP + {}^1/_2\angle PMA = {}^1/_2\angle BMA = {}^1/_2 \cdot 180° = 90°.$$

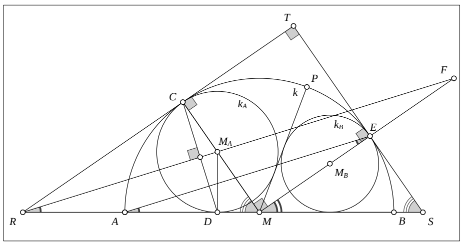
Hieraus folgt übrigens auch, dass der Punkt D zwischen A und M liegt und die Winkelhalbierende von $\angle DM_AM$ schneidet die Strecke DM, d.h. die Lagebeziehungen sind so wie in der Figur dargestellt.

Da k_A die Gerade AM im Punkt D berührt, ist $\angle MDM_A = 90°$, d.h. mit Satz von der Innenwinkelsumme im Dreieck M_ADM gilt

$$\angle DM_AM = 180° - (90° + \angle M_AMD) = 180° - (90° + 180° - (90° + \angle BME) = \angle BME = 2\beta$$

Die Gerade M_AF halbiert nach Konstruktion den Winkel $\angle DM_AM$, und nach Wechselwinkelsatz ist $\angle DMF = \beta$. Also gilt im Dreieck FMM_A wieder mit Satz von der Innenwinkelsumme

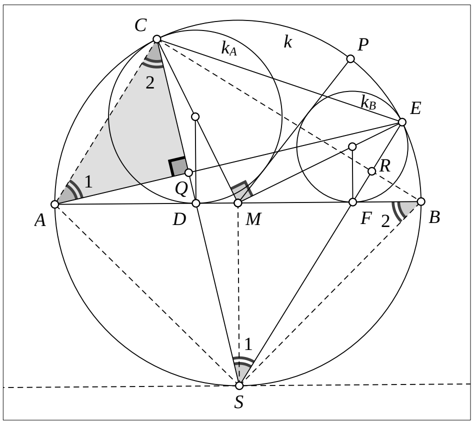
$$\angle MFM_A = 180° - \angle FM_AM - \angle M_AMF = 180° - \beta - (\angle M_AMD + \angle DMF)$$
$$= 180° - \beta - (180° - 2\beta - 90° + \beta) = 90°,$$ das war zu zeigen.



3. Beweis (Winkeljagd): Den Mittelpunkt von k_A bezeichnen wir mit M_A. Aus Symmetriegründen liegen die Punkte M, M_A und C auf der Winkelhalbierenden von $\angle PMA$, und die Punkte M, M_B und E liegen auf der Winkelhalbierenden von $\angle BMP$. Also ist $\angle EMC = {}^1/_2 (\angle BMP + \angle PMA) = 90°$.

Die Tangenten an k_A in C schneide die Gerade AB im Punkt R, die Tangente an k_B in E schneide AB in S, der Schnittpunkt der beiden Tangenten sei T. Nach bekanntem Lehrsatz stehen die beiden Tangenten senkrecht auf den zugehörigen Berührradien, d.h. es ist $MC \perp RT$ und $ME \perp ST$. Außerdem liegt M_A auf der Winkelhalbierende von $\angle MRT = \angle SRT$ und diese Winkelhalbierende steht senkrecht auf der Sehne zwischen den Berührpunkten, d.h. es ist $RM_A \perp CD$.

Nun ist $METC$ ein Viereck mit drei rechten Innenwinkeln, in dem zusätzlich die beiden von M ausgehenden Seiten gleich lang sind, es ist $METC$ also ein Quadrat. Es folgt $CT \parallel ME$, gleichbedeutend mit $RT \parallel ME$, und schließlich $\angle SME = \angle SRT$ (Stufenwinkel!). Da $\angle SMF$ Außenwinkel im gleichschenkligen Dreieck AMF ist, ist $\angle MAE = {}^1/_2\angle SME = {}^1/_2\angle MRT$. Nach Stufenwinkelsatz sind nun AE und die Winkelhalbierende von $\angle SRT$ parallel, d.h. das Lot CD auf die Winkelhalbierende ist auch ein Lot auf AE. Das war zu zeigen.



4. Beweis (Umfangswinkelsatz): Den Schnittpunkt von CD und AE nennen wir Q.

Da k_A die Strahlen $[MA$ und $[MP$ berührt, ist C der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\angle PMA$ mit k. Analog schließen wir, dass E der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\angle BMP$ mit dem Kreis k ist. Somit ist $\angle EMC = {}^1/_2 \cdot (\angle BME + \angle PMA) = {}^1/_2 \cdot 180° = 90°$.

Da k_A den Kreis k im Punkt C berührt, gibt es eine zentrische Streckung mit Zentrum C, die k_A in den durch k definierten Vollkreis k^* überführt. Die Tangente an k_A in D ist die Gerade AB, diese wird in eine dazu parallele Tangente an k^* überführt, also die Tangente im "Südpol von k^* in Bezug auf den Durchmesser AB", d.h. in denjenigen Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von AB mit k^*, der nicht auf k liegt. Hieraus folgt, dass die Punkte C, Q, D und S auf einer Geraden liegen. Analog überführt eine zentrische Streckung von E den Kreis k_B in k^*, und die Punkte E und S sowie der Berührpunkt von k_B am Strahl $[MB$ liegen auf einer Geraden.

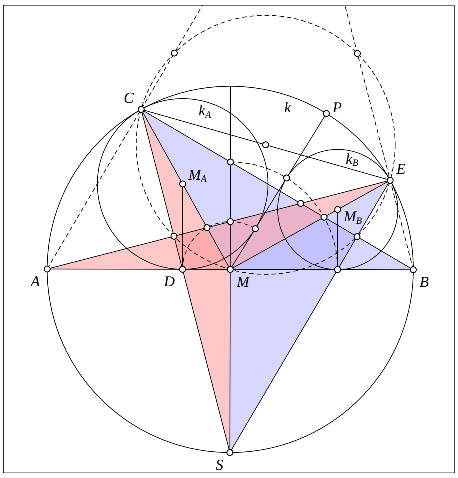
Nun können wir schnell mit Umfangswinkelsatz in k^* zwei Innenwinkel im Dreieck AQC bestimmen:

$$\angle EAC = \angle ESC = {}^1/_2\angle EMC = 45°, \quad \angle ACS = \angle ABS = {}^1/_2\angle AMS = 45°.$$

Für den dritten Innenwinkel erhalten wir $\angle CQA = 180° - 2 \cdot 45° = 90°$. Das war zu zeigen.

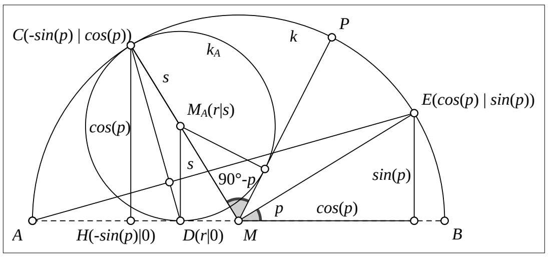
Bemerkungen: Die Angaben der Figur sind symmetrisch in A und B, d.h. auch die Gerade BC steht senkrecht auf der Verbindungsgeraden der beiden Berührpunkte von k_B mit k bzw. $[MB$.

Der Beweis zeigt eine Möglichkeit auf, wie man nach Vorgabe von P die Mittelpunkte und übrigen Berührpunkte von k_A und k_B konstruieren kann: C und E sind die Schnittpunkte der jeweiligen Winkelhalbierenden mit k, der Berührpunkt D ist der Schnittpunkt der Geraden SC mit AB. Der Mittelpunkt M_A ist Schnittpunkt des Lotes in D auf AB mit MC, der Berührpunkt von k_A mit MP ist der Schnittpunkt des Kreises um M durch D.



Die Figur bietet auch Raum für weitere Erkundigungen: Die Gerade AE und BC sind Höhen sowohl im Dreieck SEC also auch im Dreieck, das durch AB, AC und BE definiert ist. Der Schnittpunkt von AE und BC ist in beiden Dreiecken der Höhenschnittpunkt. Der Thaleskreis über CE ist der FEUERBACHKREIS des letztgenannten Dreiecks, d.h. die Abschnitte auf AE und CE von A bzw. C bis zu diesem Höhenschnittpunkt werden von diesem Kreis halbiert. Die Figur enthält weitere vier rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke, etliche Punkt liegen auf drei Linien. Die untersuchten Schnittpunkte haben den gleichen Abstand von AB.

Die der Aufgabe zugrunde liegende Figur (Halbkreis, geteilt in zwei Sektoren, in denen Inkreise liegen) war auch Grundlage für die 3. Aufgabe in der 2. Runde des Bundeswettbewerbs 1997. Dort war zu zeigen, dass der Abstand der Berührpunkte von k_A und k_B auf AB nach unten durch $2r(\sqrt{(2)} - 1)$ scharf abgeschätzt werden kann.



5. Beweis (Trigonometrie, letztlich Rechnung mit Koordinaten): Wir legen wir ein kartesisches Koordinatensystem so über die Figur, dass M der Ursprung ist und $[MB$ die positive x−Achse; die Einheiten wählen wir so, dass $B(1|0)$ und $A(-1|0)$.

Sei $M_A(r|s)$ der Mittelpunkt von k_A, und $\varphi := {}^1/_2\angle BMP$ (in der Figur mit p bezeichnet, sorry).

Aus Symmetriegründen liegen die Punkte C und M_A auf der Winkelhalbierenden von $\angle PMA$, der Punkt E auf der Winkelhalbierenden von $\angle BMP$. Dann ist

$$\angle BMC = \varphi + {}^1/_2(180° - 2(\varphi)) = \varphi + 90°.$$

Insbesondere ist $\varphi < 90°$, also $\tan(\varphi) > 0$; und die Punkte E, C und D haben die Koordinaten $E(\cos(\varphi)|\sin(\varphi))$, $C(\cos(\varphi + 90°)|\sin(\varphi) + 90°) = C(-\sin(\varphi)|\cos(\varphi))$ und $D(r|0)$.

Der Fußpunkt des Lotes von C auf AB sei H, offensichtlich sind seine Koordinaten $H(-\sin(\varphi)|0)$. Es ist AB gemeinsames Lot von CH und M_AD, also $CH \parallel M_AD$, also bildet die zentrische Streckung $(M;r/\sin(\varphi))$ den Punkt C auf M_A ab und es gilt $s/(-r) = \cos(\varphi)/\sin(\varphi)$, d.h. $s = -r\cdot\cos(\varphi)/\sin(\varphi) = -r/\tan(\varphi)$. Weiter sind C und D gleichweit von M_A entfernt, also gilt $\sqrt{r^2+s^2} = 1 - s$. Dieses Gleichungssystem lässt sich leicht auflösen:

$$\sqrt{r^2+s^2} = 1 + r/\tan(\varphi) \quad\Leftrightarrow\quad r^2 + r^2/\tan^2(\varphi) = (1 + r/\tan(\varphi))^2 \quad\Leftrightarrow\quad r^2 - 2r/\tan(\varphi) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow\ r_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\tan\varphi} \pm \sqrt{\frac{4}{\tan^2\varphi}+4}\right) = \frac{1}{\tan\varphi} \pm \sqrt{\frac{1}{\tan^2\varphi}+1} = \frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)} \pm \sqrt{\frac{\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi)}{\sin^2(\varphi)}}\text{, also}$$

$$r = \frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)} - \frac{1}{\sin(\varphi)}$$ (wegen $r < 0$ fällt die "+"−Lösung weg, wegen $0 < \varphi < 90°$ ist $\sin(\varphi) > 0$ und $\tan(\varphi)$ stets definiert).

Nun ist

$$\overrightarrow{AE} \circ \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 1+\cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) - \dfrac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)} + \dfrac{1}{\sin(\varphi)} \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

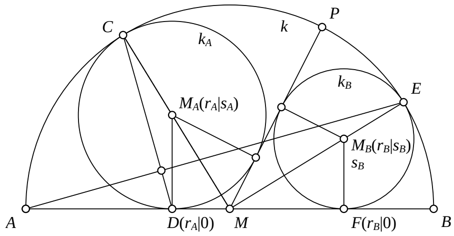
$$= (1+\cos(\varphi))\left(-\sin(\varphi) - \frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)} + \frac{1}{\sin(\varphi)}\right) + \sin(\varphi)\cos(\varphi)$$

$$= -\sin(\varphi) - \cancel{\frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)}} + \frac{1}{\sin(\varphi)} - \cancel{\cos(\varphi)\sin(\varphi)} - \cos(\varphi)\frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)} + \cancel{\frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)}} + \cancel{\sin(\varphi)\cos(\varphi)}$$

$$= -\frac{\sin^2(\varphi)}{\sin(\varphi)} + \frac{1}{\sin(\varphi)} - \frac{\cos^2(\varphi)}{\sin(\varphi)} = \frac{1}{\sin(\varphi)} - \frac{1}{\sin(\varphi)} = 0,$$ also $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{DC}$, das war zu zeigen.

Nachzutragen ist noch, dass die auftretenden Nenner nie den Wert Null haben können.

6. Beweis (letztlich identisch mit 5. Beweis, aber Koordinatenrechnung ohne Verwendung der trigonometrischen Funktionen, eher zur Abschreckung hier aufgenommen): Die Mittelpunkte von k_A und k_B nennen wir M_A bzw. M_B, den Punkt, in dem k_B den Strahl [MB berührt, nennen wir F.



Wir legen ein kartesisches Koordinatensystem so über die Figur, dass M der Ursprung ist und [MB die positive x−Achse, die Einheiten wählen wir so, dass $B(1|0)$ und $A(-1|0)$.

Der Punkt P liegt auf dem Einheitskreis, seine Koordinaten seien $P(p|\sqrt{1-p^2})$ mit geeignetem $-1 < p < 1$. Die Aufgabenstellung ist symmetrisch in A und B, d.h. anstatt $AE \perp CD$ nachzuweisen, können wir auch $BC \perp EF$ nachweisen. Wir können deswegen o.B.d.A. annehmen, dass $p \geq 0$.

Unter Benutzung schulüblicher Methoden zur Entfernungsbestimmung bestimmen wir die Koordinaten der beteiligten Punkte in Abhängigkeit von p, und zeigen anschließend, dass $CD \perp AE$, indem wir $\overrightarrow{AE} \circ \overrightarrow{CD} = 0$ zeigen.

Die Gerade MP wird beschrieben durch die Gleichung $\sqrt{1-p^2} \cdot x - p \cdot y = 0$, dies ist die Normalenform. Die Menge der Punkte $(r|s)$, die von MP und AB die gleichen Abstände haben − hierzu gehören aus Symmetriegründen auch M_A, C, M_B und E − müssen die Gleichung

$$\left|\sqrt{1-p^2} \cdot r - p \cdot s\right| = s \qquad (1)$$

erfüllen, zusätzlich ist $s > 0$. Beim Auflösen dieser Gleichung unterscheiden wir zwei Fälle (wegen $-1 < p < 1$ sind die auftretenden Nenner nie Null):

Fall 1: $\sqrt{1-p^2} \cdot r - p \cdot s = s \iff s = r\dfrac{\sqrt{1-p^2}}{1+p} = r\sqrt{\dfrac{1-p}{1+p}}$, also $r > 0$,

Fall 2: $\sqrt{1-p^2} \cdot r - p \cdot s = -s \iff s = -r\dfrac{\sqrt{1-p^2}}{1-p} = -r\sqrt{\dfrac{1+p}{1-p}}$, also $r < 0$.

Das Produkt der Quotienten r/s in den beiden Fällen hat den Wert −1, d.h. die Verbindungsgeraden dieser Punkte mit M stehen senkrecht aufeinander und wir erhalten Punkte auf den Halbierenden von Winkel oder Nebenwinkel zwischen MP und AB. Aus der Rechnung im 1. Fall erhalten wir Punkte im Sektor BMP, also M_B und E, im zweiten Fall Punkte im Sektor PMA, also M_A und C.

Die Punkte C und D liegen auf dem Einheitskreis, müssen also die Nebenbedingung $r^2 + s^2 = 1$

erfüllen. Für den Punkt $E\ (r_E|s_E)$ muss $r_E > 0$ sein, wir erhalten also

$$s_E = r_E\sqrt{\frac{1-p}{1+p}} \text{ und } r_E^2 + s_E^2 = 1, \text{ also } r_E^{\,2}\left(1+\frac{1-p}{1+p}\right) = 1 \Rightarrow\ r_E = +\sqrt{\frac{1+p}{2}} \Rightarrow s_E = \sqrt{\frac{1-p}{2}}\,.$$

Für den Punkt $C\ (r_C|s_C)$ muss $r_C < 0$ sein, mit analoger Rechnung erhalten wir

$$r_C = -\sqrt{\frac{1-p}{2}} \ \Rightarrow\ s_C = \sqrt{\frac{1+p}{2}}\,.$$

Der Punkt $M_A(r_A|s_A)$ hat zu D und zu C die gleiche Entfernung s_A, muss also die Nebenbedingung $\sqrt{r_A^{\,2}+s_A^{\,2}} = 1 - s_A$ (3) erfüllen, und weil $AB \perp DM_A$ ist, hat D die Koordinaten $(r_A|0)$. Aus Gleichung (1) schließen wir $s_A = -r_A\sqrt{\frac{1+p}{1-p}}$, Einsetzen in (3) und quadrieren (es ist $1 - s_A > 0$!) ergibt

$\sqrt{r_A^{\,2}+s_A^{\,2}} = 1 - s_A \ \Leftrightarrow\ r_A^2 = 1 - 2s_A \ \Leftrightarrow\ r_A^2 - 2r_A\sqrt{\frac{1+p}{1-p}} - 1 = 0$, dies führt zur Lösung

$$r_A = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{\frac{1+p}{1-p}} \pm \sqrt{4\cdot\frac{1+p}{1-p}+4}\right) = \sqrt{\frac{1+p}{1-p}} \pm \sqrt{\frac{1+p}{1-p}+1} = \sqrt{\frac{1+p}{1-p}} \pm \sqrt{\frac{2}{1-p}} \text{ führt.}$$

Weil $r_A < 0$, scheidet die "+"−Lösung aus. Tatsächlich ist nun

$$\overrightarrow{AE}\circ\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{\frac{1+p}{2}} \\ \sqrt{\frac{1-p}{2}} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{1-p}{2}} - \left(\sqrt{\frac{1+p}{1-p}} - \sqrt{\frac{2}{1-p}}\right) \\ \sqrt{\frac{1+p}{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \left(1+\sqrt{\frac{1+p}{2}}\right)\cdot\left(-\sqrt{\frac{1-p}{2}} - \sqrt{\frac{1+p}{1-p}} + \sqrt{\frac{2}{1-p}}\right) + \sqrt{\frac{1-p}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1+p}{2}}$$

$$= -\sqrt{\frac{1-p}{2}} - \cancel{\sqrt{\frac{1+p}{1-p}}} + \sqrt{\frac{2}{1-p}} - \cancel{\sqrt{\frac{1+p}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1-p}{2}}} - \sqrt{\frac{1+p}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1+p}{1-p}} + \cancel{\sqrt{\frac{1+p}{2}}\cdot\sqrt{\frac{2}{1-p}}} + \cancel{\sqrt{\frac{1-p}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1+p}{2}}}$$

$$= -\sqrt{\frac{1-p}{2}} + \sqrt{\frac{2}{1-p}} - \sqrt{\frac{1+p}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1+p}{1-p}}$$

$$= -\sqrt{\frac{(1-p)(1-p)}{2\ (1-p)}} + \sqrt{\frac{2}{1-p}} - (1+p)\sqrt{\frac{1}{2(1-p)}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2(1-p)}}\cdot\big(-(1-p)+2 \quad -(1+p)\big) = 0, \text{ das war zu zeigen.}$$

Aufgabe 4: Für ganze Zahlen $m,n \geq 3$ besteht ein mxn−Rechteckrahmen aus den $2m + 2n - 4$ Randquadraten eines in $m \cdot n$ Quadrate unterteilten rechteckigen Feldes. Die Abbildung zeigt beispielhaft einen 4x7−Rechteckrahmen.

Auf einem solchen mxn−Rechteckrahmen spielen Renate und Erhard nach folgenden Regeln, wobei Renate beginnt.

Wer am Zug ist, färbt eine rechteckige Fläche, die aus einem einzelnen weißen Quadrat oder mehreren weißen Quadraten besteht; gibt es danach noch weiße Quadrate, so müssen diese weiterhin eine zusammenhängende Fläche bilden.

Wer den letzten Zug macht, hat gewonnen.

Bestimme alle Paare (m,n), für die Renate eine Gewinnstrategie hat.

Ergebnis: Renate hat für alle Paare (m,n) mit $m,n \geq 3$ eine Gewinnstrategie.

1. Beweis: (Konkrete Angabe einer Strategie: "Erhalte die Symmetrie").

Wir führen folgende Bezeichnungen ein: Die vier Quadrate des Rechteckrahmens, die in den Ecken liegen, nennen wir *Eckquadrate*. Mit dem Begriff *ungefärbter Eckwinkel* bezeichnen wir eine Kombination von drei ungefärbten Quadraten, die aus einem ungefärbten Eckquadrat und zwei an diesem Eckquadrat anliegenden ungefärbten Quadraten bestehen. Nach den Spielregeln kann man diese beiden anliegenden Quadrate nicht im gleichen Zug färben. Wird im Laufe des Spiels eines der anliegenden Quadrate eines Eckwinkels gefärbt, sprechen wir vom *Entfernen eines ungefärbten Eckwinkels*, unabhängig davon, ob das Eckquadrat selbst auch gefärbt wurde. Da die Anzahl der ungefärbten Quadrate mit jedem Zug abnimmt, nimmt während des Spiels nach jeweils endlich vielen Zügen auch die Anzahl der ungefärbten Eckwinkel ab.

Wir geben eine konkrete Gewinnstrategie für Renate an und zeigen anschließend, dass diese durchführbar ist und stets zu einem Gewinn führt. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1: $m = n$, d.h. der Rechteckrahmen ist quadratisch und damit symmetrisch bezüglich der beiden Diagonalen. Eine davon nennen wir d, die beiden Quadrate, die auf d liegen, nennen wir R und Q.

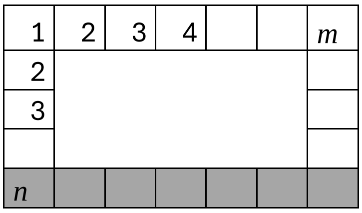
> Gewinnstrategie für Renate: Beginne mit Färbung von R. Bei allen weiteren Zügen: Wenn Du alle restlichen Quadrate färben kannst, färbe sie. Wenn nicht: Färbe immer so, dass nach Deiner Färbung der Rechteckrahmen unter Berücksichtigung der Färbung symmetrisch bzgl. d ist.

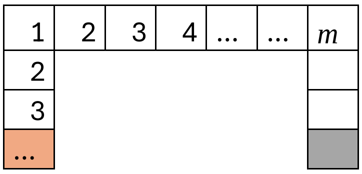
Renate kann offensichtlich den ersten Zug gemäß Strategie durchführen (in der 1.Figur grau). Danach ist der Rechteckrahmen unter Berücksichtigung der Färbung symmetrisch bezgl. d. Nach den Spielregeln kann Erhard in seinem ersten Zug nur Quadrate auf der gleichen Seite von d färben. Dadurch wird in jedem Fall diese Symmetrie zerstört. Renate kann im folgenden Zug diese Symmetrie wieder herstellen, indem sie jeweils die auf der anderen Seite symmetrisch gelegenen Quadrate färbt.

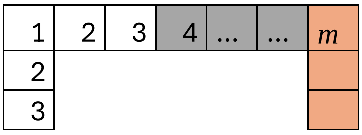
> Dies gilt für alle folgenden Zügen von Erhard, solange Erhard nicht das Quadrat Q färbt. Nach einigen Zügen werden dabei die ungefärbten Eckwinkel, die nicht auf d liegen, entfernt, nach weiteren endlich vielen Zügen muss Erhard eines der beiden an Q angrenzenden Quadrate färben, dabei ist unerheblich, ob er das zugehörge Eckquadrat Q auch färbt oder nicht. In beiden Fällen bleibt mindestens das andere an Q anliegende Quadrat ungefärbt und die restlichen ungefärbten Quadrate bilden ein Rechteck. Diese kann nun Renate in einem Zug färben und gewinnt.

Fall 2: $m \neq n$. O.B.d.A. sei $m > n$, also $n \leq m - 1$.

Gewinnstrategie für Renate: Färbe im ersten Zug alle m Quadrate einer langen Seite des Rechteckrahmens. Die ungefärbten Quadrate des Rechteckrahmens haben nun die Form eines U (in der Figur steht das U auf dem Kopf), dessen beide Schenkel jeweils $n - 1$ ungefärbte Quadrate enthalten und dessen Verbindungsstück m ungefärbte Quadrate enthält. Falls Erhard nicht einen ungefärbten Eckwinkel entfernt, färbe so, dass die Längen der beiden Schenkel des U gleich lang sind. Falls Erhard einen Eckwinkel entfernt, also die ungefärbten Quadrate die Form eines L haben, färbe immer so, dass die beiden Schenkel des L gleich lang sind. Wenn Erhard den letzten Eckwinkel entfernt, färbe den Rest.







Renate kann sicher den ersten Zug ihrer Strategie machen (in der 1. Figur grau). Danach enthalten die beiden Schenkel des U jeweils gleichviele ungefärbte Quadrate, nämlich $n - 1 < \ m - 1$. Erhard kann nun nur auf einem Schenkel Quadrate färben; solange er dies tut, ohne den ungefärbten Eckwinkel zu entfernen (in der 3. Figur rot), kann Renate sicher immer auf dem anderen Schenkel gleich viele ungefärbte Quadrate färben und so den Zustand erhalten, dass die beiden Schenkel wieder gleich viele ungefärbte Quadrate haben. Wenn Erhard den ungefärbten Eckwinkel entfernt (3. Figur rot), haben die ungefärbten Quadrate die Form eines L, wobei ein Schenkel m oder $m - 1$ ungefärbte Quadrate hat und der andere Schenkel höchstens $n - 1 \leq m - 2$ ungefärbte Quadrate. Die Anzahl der ungefärbten Quadrate auf den beiden Schenkel des L ist also verschieden, eine ist größer als 1 und die andere größer als 2. Nun kann Renate durch geeignete Färbung die Anzahl der gefärbten Quadrate auf den Schenkeln gleich machen. Wieder kann Erhard nur auf einem Schenkel des L Quadrate färben, und Renate kann stets wieder so färben, dass auf beiden Schenkeln gleich viele Quadrate gefärbt sind. Wenn allerdings Erhard den letzten Eckwinkel entfernt, liegen die ungefärbten Quadrate in einer Reihe, diese enthält mindestens ein ungefärbtes Quadrat, und Renate kann nun die restlichen Quadrate färben und damit gewinnen.

Bemerkung: Die Argumentation über Symmetrie oder gleicher Anzahl von ungefärbten Quadraten ist äquivalent.

2. Beweis: (Reiner Existenzbeweis, "Strategie−Klau"). Da der Rechteckrahmen aus endlich vielen Quadraten besteht und in jedem Zug mindestens ein Quadrat gefärbt werden kann und muss, ist das Spiel nach endlich vielen Zügen beendet und es steht immer ein Gewinner fest. Die Menge aller Spielsituationen ist also endlich. Weiter können in jeder Spielsituation, in der noch ungefärbte Quadrate existieren, beide Spielende − wenn sie am Zug sind − die gleichen Färbungen vornehmen. Aussagen über mögliche Strategieen in einer bestimmten Spielsituationen gelten also für den Spielenden am Zug, unabhängig davon, ob dies Erhard oder Renate ist.

Wir zeigen, dass für jede Spielsituation feststeht, ob die Person am Zug den Gewinn erzwingen kann oder bei intelligentem Spiel der anderen Person verliert. Hierzu bestimmen wir zunächst die Menge der Spielsituationen, in denen der Spieler am Zug alle restlichen Quadrate färben kann, die Menge nennen wir G, die Elemente von G Gewinnstellungen. Anschließend bestimmen wir die Menge aller Situationen, von denen ein Spieler nur so färben kann, dass eine Situation aus G entsteht, diese Menge nennen wir V, ihre Elemente Verluststellungen. Nun ergänzen wir die Menge G um die Spielsituationen, in der der Spieler am Zug so färben kann, dass eine Situation aus V entsteht, anschließend ergänzen wir die Menge V um die Spielsituationen, in denen nur so gefärbt werden kann, dass ein Situation aus G entsteht. Dies setzen wir fort, bis alle Spielsituationen in einer der Mengen entweder in G oder in V sind. Dies ist möglich, da die Anzahl möglicher Spielsituationen endlich ist, aus jeder Spielsituation gefärbt werden kann und jedes Spiel nach endlich vielen Zügen endet. Die Person, die in einer Situation aus G am Zug ist, hat also eine Gewinnstrategie, die Person, die in einer Situation aus einer V−Menge am Zug ist, verliert bei intelligentem Spiel der anderen Person. Dies gilt vor Allem für die Anfangssituation, d.h. es steht von Anfang an fest, dass es für genau einen der beiden Spieler eine Gewinnstrategie gibt. (Diesen Nachweis haben wir geführt, ohne diese Strategie konkret zu formulieren)

Es genügt also, die Annahme, dass Erhard eine Gewinnstrategie hat, zu einem Widerspruch zu führen.:

Hätte Erhard eine Gewinnstrategie, so könnte er nach jedem ersten Zug von Renate so färben, dass Renate eine Verlustposition vorfindet. Aber wenn Renate im ersten Zug genau ein Eckfeld färbt, kann Erhard nur so färben, dass eine Situation entsteht, die Renate auch mit ihrem ersten Zug hätte erreichen können. Da in jeder Spielsituation beide Spieler − wenn sie am Zug sind − die gleichen Färbungen vornehmen können, findet nun Erhard eine Verlustposition vor im Widerspruch zur Annahme.

Bemerkung: Wir können die Aufgabe verallgemeinern und äquivalent umformen: Bei einer ringförmigen Kette sind r rote Perlen R_1, R_2, ... R_r ($r \geq 2$) und zwischen den Perlen R_i und R_{i+1} jeweils s_i ($s_i \geq 1$) schwarze Perlen aufgefädelt. Nun darf man abwechselnd abwechselnd Stücke abschneiden (beim ersten Mal mit zwei Schnitten, sonst mit einem Schnitt) und wegnehmen oder auch den Rest ohne Schnitt wegnehmen, muss dabei aber folgende Regel beachten: Im weggenommenen Stück darf keine rote Perle zwischen zwei schwarzen Perlen sein.

Mit dem oben gezeigten Beweis kann man also schließen, dass die Person, die als erste zieht, eine Gewinnstrategie hat − ohne diese konkret zu formulieren. Diese für allgemeine r und s_i zu formulieren dürfte schwierig sein.