BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK
Bildung & Begabung

Aufgaben und Lösungen

2. Runde 2025

Endgültige Fassung

» KORREKTURKOMMISSION | KARL FEGERT

» BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK

Kortrijker Straße 1, 53177 Bonn | Postfach 20 02 01, 53132 Bonn | Tel.: (02 28) 9 59 15-20, Fax: (02 28) 9 59 15-29
info@bundeswettbewerb-mathematik.de, www.bundeswettbewerb-mathematik.de

Oktober 2025

Gefördert vom:

Bundesministerium für Bildung, Familie, Senioren, Frauen und Jugend

STIFTERVERBAND

KMK KULTUSMINISTER KONFERENZ

Aufgabe 1: Die aktuelle Jahreszahl 2025 hat folgende besondere Eigenschaft: Ihre Dezimaldarstellung entsteht, indem man die beiden Zahlen 20 und 25 hintereinander schreibt, und 2025 ist gleichzeitig das Quadrat der Summe dieser beiden Zahlen, d.h. $2025 = (20 + 25)^2$.

Eine positive ganze Zahl q nennen wir *k−kurios* ($k \geq 1$), wenn sie eine $2k$−stellige Dezimaldarstellung mit folgender Eigenschaft besitzt: Die ersten k Ziffern bzw. die letzten k Ziffern bilden jeweils eine Dezimaldarstellung einer Zahl x bzw. y und es gilt $q = (x+y)^2$.

a) Zeige: Wenn es für ein k mindestens eine durch 5 teilbare k−kuriose Zahl gibt, dann gibt es auch mindestens eine durch 2025 teilbare k−kuriose Zahl.

b) Gibt es unendlich viele k, für die es mindestens eine durch 2025 teilbare k−kuriose Zahl gibt?

Anmerkung: Im Rahmen dieser Aufgabe können Dezimaldarstellungen von Zahlen führende Nullen enthalten. Die Richtigkeit der Antwort ist zu beweisen.

1. Beweis: Jeder k−kuriosen Zahl q ordnen wir das − eindeutig bestimmte (!) − Wertepaar $(x_{q,k} \mid y_{q,k})$ zu, mittels dessen Hilfe der Zahl q nach Definition in der Aufgabenstellung die Eigenschaft "k−kurios" zugeschrieben wird. Die Indices lassen wir im Folgenden für eine bessere Lesbarkeit weg, Verwechslungen sind nicht zu befürchten.

Da die Zahlen x und y über Ziffernfolgen im Dezimalsystem definiert werden, sind x und y nicht−negative ganze Zahlen. Schreibt man die k−stelligen Dezimaldarstellungen von x und y hintereinander, erhält man die Zahl $q = x\cdot 10^k + y$. Da die Länge der Ziffernfolgen jeweils k betragen und führende Nullen erlaubt sind, gilt notwendig $0 \leq x,y < 10^k$; wenn $x < 10^{k-1}$ oder $y < 10^{k-1}$, ergänzen wir die Dezimaldarstellungen von x bzw. y durch führende Nullen, bis die Dezimaldarstellungen genau k Ziffern haben.

Zu $x = 0$, $y > 0$ gibt es genau eine k−kuriose Zahl q: Es ist nämlich dann $0 < q = 0\cdot 10^k + y = (0 + y)^2$, also $y = y^2$ und $y > 0$, es folgt $y = 1$. Die Zahl 1 ist also k−kurios für jedes $k \geq 1$, denn mit $x = 0$ und $y = 1$ ist $q = 1 = (x + y)^2 = (0...0 + 0...01)^2 = 0\cdot 10^k + 1 = x\cdot 10^k + y$ für jedes k.

Für $x = 0$, $y = 0$ gibt es keine k−kuriose Zahlen, weil sonst $q = (0 + 0)^2 = 0$ nicht positiv wäre. Auch für $x > 0$ und $y = 0$ gibt es keine, weil sonst aus $0 < q = x\cdot 10^k + 0 = (x + 0)^2$, also $x > 0$ sofort $x = 10^k$ folgt, im Widerspruch zu $x < 10^k$.

Die Zahl q ist also genau dann k−kurios ($k \geq 1$), wenn es Zahlen $0 \leq x < 10^k$, $1 \leq y < 10^k$ mit $q = x\cdot 10^k + y = (x + y)^2$ gibt. Insbesondere ist $x + y > 0$.

Wir benützen drei allgemeine Eigenschaften von k−kuriosen Zahlen:

Lemma 1: Wenn $q = (x + y)^2$ eine k−kuriose Zahl ist, dann auch $q' = q'(q) := (10^k - (x+y))^2$.

Beweis: Nach Voraussetzung ist $q = (x + y)^2 = x\cdot 10^k + y$ und $0 \leq x < 10^k$, $1 \leq y < 10^k$. Dann ist

$$q' = [10^k - (x + y)]^2 = 10^{2k} - 2\cdot 10^k(x + y) + (x + y)^2 = 10^{2k} - 2\cdot 10^k(x + y) + x\cdot 10^k + y$$
$$= 10^k([(10^k - x - 2y)] + y = 10^k\cdot x' + y$$

mit $x' = (10^k - x - 2y)$ und $x' + y = 10^k - (x + y)$.

Es bleibt noch zu zeigen, dass $0 \leq x' < 10^k$: Weil $(x + y) > 0$, ist sicher $x' = 10^k - x - 2y = 10^k - (x + y) - y < 10^k$, und die Annahme $x' < 0$ führt mit $y < 10^k$ zum Widerspruch $0 \leq (x' + y)^2 = x'\cdot 10^k + y < -1\cdot 10^k + 10^k = 0$,

Lemma 2: Wenn $q = (x + y)^2$ eine k−kuriose Zahl ist, dann gilt $(x + y) \equiv 0 \bmod 9$ oder $(x + y) \equiv 1 \bmod 9$.

Beweis: Nach Voraussetzung ist $q = (x + y)^2 = x\cdot 10^k + y \equiv (x\cdot 1 + y) \equiv (x + y) \bmod 9$. Einfaches Kopfrechnen mit den Restklassen 0, 1, ... , 8 zeigt, dass die Kongruenz $(x + y)^2 \equiv (x + y) \bmod 9$ nur für $(x + y) \equiv 0 \bmod 9$ und $(x + y) \equiv 1 \bmod 9$ erfüllt ist.

Korollar: Genau eine der beiden k−kuriosen Zahlen $q = (x + y)^2$ und $q' = (10^k - (x+y))^2$ ist durch 9^2 teilbar.

Beweis: Mit Lemma 2 gilt entweder $(x + y) \equiv 0 \bmod 9 \Leftrightarrow (10^k - (x+y)) \equiv (1 - 0) \equiv 1 \bmod 9$ oder $(x + y) \equiv 1 \bmod 9 \Leftrightarrow (10^k - (x+y)) \equiv 0 \bmod 9$.

Lemma 3: Es gilt $5|(x + y)^2 \Rightarrow 5|(x + y)$ und $5|(10^k - (x+y)) \Rightarrow 5^2|(x + y)^2 = q$ und $5^2|(10^k - (x+y))^2 = q'$.

Beweis: unnötig, weil offensichtlich.

Beweis zu Teilaufgabe a): Es ist 2025 = $81 \cdot 25 = 3^4 \cdot 5^2 = 9^2 \cdot 5^2$. Da 3 und 5 teilerfremd sind, genügt zum Nachweis der Teilbarkeit einer Zahl q durch 2025 der Nachweis, dass $5^2|q$ und $9^2|q$.

Sei q k−kurios und es gelte $5|q$. Nach Lemma 3 gilt dann für q und das nach Lemma 1 ebenfalls k−kuriose q', dass $5^2|q$, $5^2|q'$, und entweder $9^2|q$ oder $9^2|q'$. Also ist entweder q oder q' eine durch 2025 teilbare k−kuriose Zahl. Das war zu zeigen.

Beweis zu b) Antwort: Ja, z.B. für $k \geq 3$:

$$\underset{k-2}{49...95}\underset{k-1}{0...00}25\underbrace{00...00}_{2k-2} = \left(\underset{k-1}{49...95}\underset{k-1}{0...0}\right)^2 = \left(\underset{k-2}{249...95}\underset{k-1}{0...00} + 25\underbrace{00...00}_{2k-2}\right)^2 \text{ ist } 2k\text{−kurios.}$$

Formaler Nachweis: Zu jedem $k \geq 3$ setzen wir $x = x(k) = 25 \cdot 10^{2k-2} - 5 \cdot 10^{k-1}$ und $y = y(k) = 25 \cdot 10^{2k-2}$, dann gilt $0 < x,y < 10^{2k}$, d.h. es sind x und y beide (mit evtl. führenden Nullen) $2k$−stellig, und es gilt

$$(x + y) = 25 \cdot 10^{2k-2} - 5 \cdot 10^{k-1} + 25 \cdot 10^{2k-2} = 5 \cdot 10^{2k-1} - 5 \cdot 10^{k-1},$$

und
$$q = q(k) = x \cdot 10^{2k} + y = (25 \cdot 10^{2k-2} - 5 \cdot 10^{k-1}) \cdot 10^{2k} + 25 \cdot 10^{2k-2}$$
$$= (5 \cdot 10^{2k-1})^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 10^{3k-2} + (5 \cdot 10^{k-1})^2 = [(5 \cdot 10^{2k-1}) - (5 \cdot 10^{k-1})]^2$$
$$= (x + y)^2.$$

Die Zahl q ist also $(2k)$−kurios, sie ist offensichtlich durch 5^2 teilbar, und auch durch 9^2 teilbar, weil $(x + y) = (5 \cdot 10^{2k-1}) - (5 \cdot 10^{k-1}) \equiv 5 - 5 \equiv 0 \bmod 9$.

Beispiel: Für $k = 3$ erhalten wir $x(3) = 250\,000 - 500 = 249\,500$, $y(3) = 250\,000$; und $(x(3) + y(3))^2 = (499500)^2 = 249.500.250.000 = 249.500 \cdot 10^6 + 250.000$

2. Beweis: Zu a): Wir gehen aus von der Existenz einer k−kuriosen Zahl $q = q(x,y,k) = x \cdot 10^k + y = (x + y)^2$ mit $k \geq 1$ und $0 \leq x,y < 10^k$, die durch 5 teilbar ist. q ist Quadratzahl und 5 ist Primzahl, also folgt aus $5|q = (x + y)^2$ sofort $5|(x + y)$ und $5^2|(x + y)^2 = q = x \cdot 10^k + y$.

Für $k \geq 2$ gilt $5^2|10^k$ und $5^2|q = x \cdot 10^k + y$, also gilt $5^2|y$. Es gibt keine 1−kuriose Quadratzahl, weil $25 = 5^2$ die einzige positive 2−stellige durch 5 teilbare Quadratzahl ist, aber 25 ist nicht 1−kurios, weil $(2 + 5)^2 \neq 25$.

Zu keinem $k \geq 1$ gibt es eine k−kuriose Zahl mit $y = 0$. Für $x = 0$ ist die einzige k−kuriose Zahl $q = 1$; die ist für jedes k k−kurios.

Weiter gilt $x \cdot 10^k + y = (x + y)^2 \Leftrightarrow x \cdot 10^k + y = x^2 + 2xy + y^2 \Leftrightarrow x^2 + (2y - 10^k)x + (y^2 - y) = 0$. (*)

(*) ist eine quadratische Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$ mit Variable x und Parametern $a = 1$, $b = (2y - 10^k)$ und $c = y^2 - y$. Die Diskriminante dieser Gleichung ist

$$D = (2y - 10^k)^2 - 4(y^2 - y) = 10^{2k} - 4 \cdot 10^k \cdot y + 4y = 10^{2k} - 4y(10^k - 1).$$

also hat (*) die Lösungen $x_{1,2} = x_{1,2}(y,k) = -1/2 b \pm \sqrt{D/4} = 5 \cdot 10^{k-1} - y \pm \sqrt{25 \cdot 10^{2k-2} - y(10^k - 1)}$.

Nach Voraussetzung hat (*) die durch q gegebene Lösung (x,y,k) mit $0 < x,y < 10^k$ und $k \geq 2$. Eine der beiden Lösungen $x_{1,2}$ muss mit x übereinstimmen, für beide Lösungen gilt $x_{1,2} \cdot 10^k + y = (x_{1,2} + y)^2$. Insbesondere ist $D/4 \geq 0$.

Es ist $k \geq 2$, also $2k-2 \geq 2$, und da auch x und y ganzzahlig sind, muss $\sqrt{D/4}$ ebenfalls ganzzahlig sein. Nach bekanntem Satz ist dann $D/4$ das Quadrat einer ganzen Zahl. Hieraus folgt, dass sowohl x_1 als auch x_2 ganzzahlig sind.

Da $25|y$, gibt es ein ganzzahliges y' mit $y = 25y'$, dies setzen wir ein und vereinfachen weiter

$$D = 4 \cdot 25 \cdot 10^{2k-2} - 4 \cdot 25y'(10^k - 1) = 2^2 \cdot 5^2 \cdot (10^{2k-2} - y'(10^k - 1))$$

und erhalten so, dass $(10^{2k-2} - y'(10^k - 1))$ das Quadrat einer ganzen Zahl m sein muss. Dies betrachten wir $\bmod 9$ und erhalten

$$m^2 = 10^{2k-2} - y'(10^k - 1) \equiv 1 - y' \cdot (1 - 1) \equiv 1 \bmod 9.$$

Also folgt $m^2 - 1 = (m + 1)(m - 1) \equiv 0 \bmod 9$. Nun ist $(m+1) - (m-1) = 2$ nicht Vielfaches von 3, d.h. es kann nicht gleichzeitig $3|(m+1)$ und $3|(m-1)$ gelten, also ist $m \equiv 1 \bmod 9$ oder $m \equiv 8 \bmod 9$. Dann ist aber

$$x_{1,2} + y = 5\cdot 10^{k-1} + y - y \pm 5\cdot\sqrt{(10^{2k-2} - y'(10^k - 1))} = 5\cdot(10^{k-1} \pm m) \equiv 5\cdot(1 \pm m) \bmod 9,$$

d.h. von diesen beiden Zahlen x_1 und x_2 ist im Fall $m \equiv 1 \bmod 9$ die Zahl $5\cdot(1 - m)$ durch 9 teilbar und im Fall $m \equiv 8 \bmod 9$ die Zahl $5\cdot(1 + m)$ durch 9 teilbar. Es ist also immer eine der beiden Zahlen $q_{1,2} = (x_{1,2} + y)^2$ durch 9^2 teilbar. Schließlich erinnern wir uns, dass q auch durch 5^2 teilbar ist und dass 9 und 5 teilerfremd sind, also ist q auch durch $5^2\cdot 9^2 = 2025$ teilbar. Es fehlt nun noch nachzuweisen, dass $0 \le x_{1,2} < 10^k$. Offensichtich ist $x_{1,2} = 5\cdot 10^{k-1} - y \pm \sqrt{(25\cdot 10^{2k-2} - y(10^k - 1))} < 5\cdot 10^{k-1} \pm 5\cdot 10^{k-1} = 10^k$, und $x_{1,2} < 0$ führt zum Widerspruch $0 \le (x_{1,2} + y)^2 = x_{1,2}\cdot 10^k + y < -1\cdot 10^k + 1 = 0$.

zu b): Vgl. Beispiel aus Beweis 1.

Bemerkungen: Eine Zahl, deren Quadrat eine k−kuriose Zahl ist, wird auch KAPREKAR−Zahl genannt, vgl. https://oeis.org/A006886. Aus den dort aufgeführten Hinweisen auf Eigenschaften der Kaprekar−Zahlen kann man auf Eigenschaften der k−kuriosen Zahlen schließen.

Beispiele für Lemma 1: Die Zahl $q = 2025 = 45^2 = (20 + 25)^2 = 20\cdot 10^2 + 25$ ist 2−kurios. Dann ist auch $q' = (100 - 45)^2 = 55^2 = (30 + 25)^2 = 3025$ eine 2−kuriose Zahl.

Es ist $q = 1 = 1^2 = (0..00 + 0..01)^2 = 0\cdot 10^k + 1$ k−kurios für alle $k \ge 1$, also auch $q' = 9...9^2$:
Es gilt $q' = ((10^k - 0 - 2) + 1)^2 = (10^k - 2)\cdot 10^k + 1 = 9..98\cdot 10^k + 1 = 9...980...01$

Es ist 87.841.600.588.225 = $(8.784.160 + 0.588.225)^2 = 9372385^2$ eine 7−kuriose Zahl, die durch 5 und durch 25 teilbar ist, aber nicht durch 2025. Nach obigen Lemmata ist dann auch $(10^7 - 9372385)^2 = 627615^2 = (0039390 + 0588225)^2 = 00.393.900.588.225$ eine 7−kuriose Zahl, die zudem durch 2025 teilbar ist und erst nach Voranstellen von zwei führenden Nullen (2·7)−stellig wird. Diese Zahl wird bei Suche mit unausgereiften Computerprogrammen leicht übersehen; dies führte zu mehreren Nachfragen von Teilnehmern, die glaubten, ein vermeintliches Gegenbeispiel zur Aussage in Teil a) gefunden zu haben.

Aufgabe 2: Bestimme alle reellen Zahlen t mit $0 < t < 1$, für die folgende Aussage wahr ist:

Wenn in einem spitzwinkligen Dreieck den Seiten mit den Längen a, b und c wie üblich die Winkel mit den Größen α, β bzw. γ gegenüberliegen und $\frac{a}{b+c} = t$ gilt, dann ist $\alpha \le \beta$ und $\alpha \le \gamma$.

Anmerkung: Die Richtigkeit der Antwort ist zu beweisen.

Antwort: Für alle $t \in (0, \frac{1}{1+\sqrt{2}}] = (0, \sqrt{2} - 1]$ ist die Aussage wahr, und für alle anderen t falsch.

1. Beweis: Da die Aufgabenstellung symmetrisch in b und c ist, genügt es, Dreiecke mit $c \ge b$, also $\gamma \ge \beta$ zu betrachten. Für Dreiecke mit $c < b$ vertauschen wir in der Argumentation b und c sowie β und γ.

Teil 1: Die Aussage ist wahr für jedes $0 < t \le \frac{1}{1+\sqrt{2}}$:

Sei das Dreieck ABC spitzwinklig, $\gamma \ge \beta$, und $\frac{a}{b+c} = t \le \frac{1}{1+\sqrt{2}}$, d.h. $(1+\sqrt{2})a \le b + c$.

In jedem Dreieck liegt dem größeren Winkel die größere Seite gegenüber. Wäre nun $\alpha > \beta$, also $a > b$, erhielten wir $(1+\sqrt{2})a \le b + c < a + c$, also $c > a \cdot \sqrt{2}$ oder $c^2 > 2a^2 > a^2 + b^2$. Hieraus folgt aber, dass $\gamma > 90°$, was im Widerspruch zur Spitzwinkligkeit des Dreiecks ABC steht.

Teil 2: Die Aussage ist falsch für jedes $\frac{1}{1+\sqrt{2}} < t < 1$:

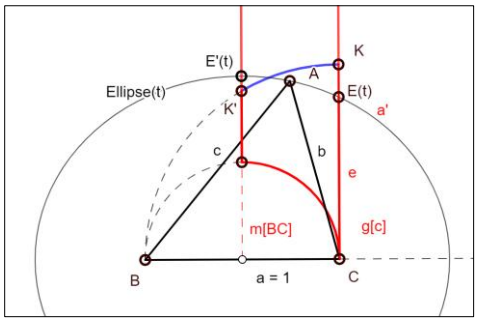
Zum Nachweis konstruieren wir zu jedem solchen t ein Gegenbeispiel, d.h. ein spitzwinkliges Dreieck mit $\alpha > \beta$ (die Bedingung $\beta \le \gamma$ muss hier nicht erfüllt sein).

Wir setzen $a = c = 1$. Nimmt b jeden Wert aus dem Intervall $(0;1)$ an, so nimmt $t = \frac{1}{b+1}$ jeden Wert aus dem Intervall $(1/2;1)$ an. Zu jedem solchen Tripel (a,b,c) existiert ein Dreieck ABC, denn es gilt $a+b > c$, $b+c > a$, $c+a > b$, ferner ist $\alpha = \gamma = 1/2(180° - \beta) < 90°$, d.h. das Dreieck ist spitzwinklig. Schließlich ist in jedem solchen Dreieck $a > b$, also $\alpha > \beta$. Für jedes $t \in (1/2;1)$ haben wir somit ein Gegenbeispiel gefunden.

Wir setzen $a = 1$, $b = \frac{1}{\sqrt{2}}c$. Nimmt c jeden Wert im Intervall $[1;\sqrt{2})$ an, so nimmt b jeden Wert aus $[\frac{1}{\sqrt{2}};1)$ an und $t = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}c + c} = \frac{\sqrt{2}}{c(1+\sqrt{2})}$ nimmt jeden Wert aus $(\frac{1}{1+\sqrt{2}}; \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}]$ an. Auch hier gibt es zu jedem solchen Tripel (a,b,c) ein Dreieck ABC, da die Dreiecksungleichungen $a+b = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}c > \sqrt{2} > c$, $b+c = \frac{1}{\sqrt{2}}c + c > 1 = a$, $c+a > 1+1 > b$ gelten. Außerdem ist $a^2 + b^2 = 1 + 1/2c^2 > c^2 \Leftrightarrow 1 > 1/2c^2$, was wegen $c < \sqrt{2}$ stets erfüllt ist. Also ist $\gamma < 90°$, und da c längste Seite ist, sind alle drei Winkel kleiner als 90, das Dreieck also spitzwinklig. Schließlich ist in jedem solchen Dreieck $a > b$, wir haben also für alle t aus $(\frac{1}{1+\sqrt{2}}; \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}]$ ein Gegenbeispiel gefunden, das ist mehr als ausreichend, da $\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} > 1/2$.

Bemerkung: Die Idee zu dieser Konstruktion von Gegenbeispielen entstammt dem 3. Beweis. Es wird hier rechnerisch nachgewiesen, dass die zu den braunen Punkten gehörenden Dreiecke (nach Vertauschen der Variablen b und c) Gegenbeispiele sein müssen .

2. Beweis: Bei einer zentrischen Streckung mit Faktor $1/a$ bleiben Winkel und die Werte des Terms t unverändert. Wir können also o.B.d.A. annehmen, dass $a = 1$. Wir beweisen die Aussage zunächst nur für Dreiecke ABC mit $\beta \leq \gamma$; für Dreiecke mit $\beta > \gamma$ übernimmt man die Argumentation, und vertauscht β und γ, b und c (der Term t bleibt dabei gleich!) sowie B und C.



Zu einer fest gegebenen Strecke BC mit Länge $a = 1$ bestimmen wir zu den in der Aufgabenstellung vorkommenden Objekten folgende Bereiche in der Ebene:

Δ_s = Menge der Punkte A, für die das Dreieck ABC spitzwinklig mit $\beta \leq \gamma$ ist,

Δ_k = Menge der Punkte A in Δ_s , für die im Dreieck ABC $\alpha \leq \beta$ gilt,

Δ_g = Menge der Punkte A in Δ_s, für die im Dreieck ABC $\alpha > \beta$ gilt.

Es gilt $\alpha < 90°$ genau dann, wenn A außerhalb des Thaleskreises über der Strecke BC liegt. Weiter gilt $\gamma < 90°$ genau dann, wenn A in der gleichen Halbebene wie B bzgl. des Lotes g_c durch C liegt (in der Figur links von g_c), und $\beta \leq \gamma$, genau dann, wenn A in der gleichen Halbebene bzgl. der Mittelsenkrechten m_{BC} der Strecke BC liegt (in der Figur auf oder rechts von m_{BC}). Also ist das Dreieck ABC genau dann spitzwinklig, wenn es im Durchschnitt dieser drei Bereiche liegt.

Δ_s ist also der in der Figur rot markierte Bereich; die Mittelsenkrechte m_{BC} ist − soweit außerhalb des Thaleskreises − Teil von Δ_s, der Kreisbogen und die Gerade g_c sind nicht Teil von Δ_s.

Bekanntlich liegt im Dreieck der größeren Seite der größere Winkel gegenüber. Es gilt also

$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow a \leq b \Leftrightarrow A$ liegt außerhalb oder auf dem Rand des Kreises $k(C,r = a)$,

dieser Kreisbogen ist in der Figur blau markiert. Die Schnittpunkte von $k(C,r = a = 1)$ mit m_{BC} und g_c seien mit K' bzw. K bezeichnet.

Δ_k ist also der durch die roten Linien und den blauen Kreisbogen begrenzte, nach oben offene Bereich von Δ_s, wobei Punkte des blauen Kreisbogens mit Ausnahme von K dazugehören.

Δ_g ist dann derjenige durch den blauen Kreisbogen $K'K$ begrenzte Bereich dieses Streifens, der näher an BC liegt, wobei Punkte auf dem Bogen KK' nicht dazu gehören.

Abhängig vom Parameter t bestimmen wir noch die Menge aller Punkte A, für die im Dreieck ABC die Beziehung $1/t = b + c$ gilt. Bekanntlich ist dies eine Ellipse, die eindeutig definiert ist durch ihre Brennpunkte B und C und einen beliebigen Punkt A, für den $1/t = b + c$ gilt. Dies folgt sofort aus der Definition einer Ellipse durch die "Gärtnerkonstruktion". Den Teilbogen dieser Ellipse, der durch Δs verläuft nennen wir $Ellipse(t)$, es ist also

$Ellipse(t)$ = Menge der Punkte A in Δ_s, für die im Dreieck ABC die Beziehung $1/t = b + c$ gilt.

Der Satz ist dann für solche t wahr, für die $Ellipse(t)$ vollständig in Δ_k liegt und falsch für solche t, für die es mindestens einen Punkt der $Ellipse(t)$ in Δ_g gibt.

$Ellipse(t)$ ist nun eindeutig festgelegt durch ihren Schnittpunkt $(E(t)$ mit g_c; über seinen Abstande e vom Punkt C kann nun t bestimmt werden, es gilt $1/t = b + c = e + \sqrt{1+e^2}$.

Durchläuft ein Punkt den blauen Kreisbogen von K' zu K, so nimmt der Abstand zur Geraden BC monoton zu, durchläuft ein Punkt A den Ellipsenbogen von E' zu E, so nimmt der Abstand zu BC monoton ab [1]. Offensichtlich verläuft nun der Ellipsenbogen $E'E$ genau dann vollständig in Δ_k, wenn der Abstand des Punktes E von C mindestens so groß ist wie der Abstand von K zu BC, d.h. wenn $e \geq = a = 1$. Da $1/t = e + \sqrt{1+e^2}$ mit e streng monoton wächst und mit t monoton fällt, ist dies ist genau dann der Fall, wenn $1/t = e + \sqrt{1+e^2} \geq 1 + \sqrt{1+1^2} = 1 + \sqrt{2}$, also wenn $t \leq \dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$. Das war zu zeigen.

[1] Dies kann als "allgemein bekannt" vorausgesetzt werden, aber auch mit der Darstellung von Kreis und Ellipse in einem geeigneten Koordinatensystem formal nachgewiesen werden. Die Punkte der "oberen Bögen" von Einheitskreis und der Ellipse haben die Koordinaten $(x|y)$ mit $y = d\sqrt{(1 - x^2)}$ für ein geeignetes d, d.h. y nimmt streng monoton zu, wenn x von negativen Werten sich der Zahl 0 nähert und y nimmt monoton ab, wenn x beginnend von 0 streng monoton zunimmt.

3. Beweis (stark an der Anschauung fixiert): Bei einer zentrischen Streckung mit Faktor $^1/_a$ bleiben die Werte des Terms t unverändert. Wir können also o.B.d.A. annehmen, dass $a = 1$.

Wir ordnen jedem Dreieck mit Seitenlängen $a = 1$, $b > 0$ und $c > 0$ den Punkt $(b|c)$ im 1. Quadranten eines kartesischen Koordinatensystems zu. Nun bestimmen wir folgende Punktmengen:

D = Menge der Punkte $(b|c)$, für die ein Dreieck mit Seitenlängen $a = 1$, b und c existiert.

S = Teilmenge von D, für die das zugehörige Dreieck spitzwinklig ist.

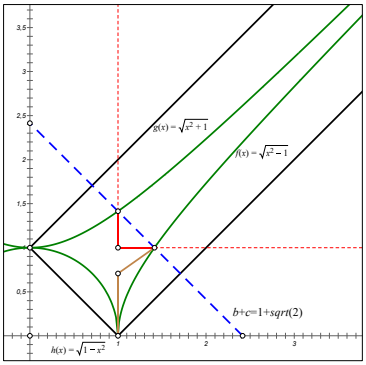
B = Teilmenge von S, für die im zugehörigen Dreieck $\alpha \le \beta$ und $\alpha \le \gamma$ gilt.

$V(t)$ = Teilmenge von S, für die im zugehörigen Dreieck $t = {}^1/_{(b+c)}$ gilt.

Die Aussage der Aufgabe lässt sich nun wie folgt formulieren:

$P(b,c)$ liegt in $V(t) \Rightarrow P(b,c)$ liegt in B.

(D, S, B, V stehen für **D**reieck, **s**pitzwinklig, **B**ehauptung, **V**oraussetzung)



Für ein gegebenes t ist die Aussage der Aufgabe genau dann wahr, wenn die Punkte von $V(t)$ alle in B sind, sie ist falsch, wenn mindestens ein Punkt von $V(t)$ nicht in B ist.

Zur Konstruktion von D: Zu vorgegebenen Seitenlängen $a = 1$, b, c gibt es genau dann ein Dreieck, wenn drei Dreiecksungleichungen erfüllt sind, d.h. wenn $1 < b + c$, $b < c + 1$, $c < 1 + b$. Die Menge D besteht also aus allen Punkten $(b|c)$, die zwischen, aber nicht auf den Geraden $c = b - 1$ und $c = b + 1$ liegen und rechts von der Geraden $c = 1 - b$ liegen. (schwarze Begrenzung).

Zur Konstruktion von S: Es gilt $\gamma < 90° \Leftrightarrow a^2 + b^2 > 1$. Ein Dreieck ist also genau dann spitzwinklig, wenn $b^2+c^2 > 1^2$ und $1^2 + b^2 > c^2$ und $1^2 + c^2 > b^2$. Die Punkte von S besteht also aus allen Punkten $(b|c)$ von D, die außerhalb des Kreises $b^2 + c^2 = 1$ liegen und zwischen, aber nicht auf den Hyperbelästen $c^2 - b^2 = 1$ und $b^2 - c^2 = 1$ (grüne Begrenzung).

Zur Konstruktion von B: Bekanntlich liegt in jedem Dreieck der größeren Seite der größere Winkel gegenüber, d.h. $\alpha \le \beta$ genau dann, wenn $a \le b$, analog $\alpha \le \gamma$ genau dann, wenn $a \le c$. Die Menge B besteht also aus allen Punkten $(b|c)$ von S, für die $1 \le b$ oder $1 \le c$ gilt, d.h. aus den Punkten von S, die auf oder oberhalb der Geraden $c = 1$ und auf oder rechts von der $b = 1$ liegen. In der Figur ist B der grün begrenzte Bereich ohne den durch die rote Linie nach unten und nach links abgetrennte Bereich. Wir stellen noch fest, dass sich B ebenso wie S nach rechts oben ins Unendliche erstreckt, weil die beiden Hyperbeläste stets durch die Gerade $c = b$ getrennt sind.

Zur Konstruktion von $V(t)$: Diese Menge besteht aus den Punkten $(b|c)$ von S, für die $^1/_{(b+c)} = t$ gilt; dies ist eine Gerade, die parallel zur 2.Winkelhalbierenden ist und die b − Achse im Punkt $(^1/_t \mid 0)$ schneidet; diese ist in der Figur für $t = {}^1/_{(1+\sqrt{2})}$ blau eingezeichnet.

Die Geraden $b = 1$ und $c = 1$ schneiden die Hyperbeläste in den Punkten $(\sqrt{2} \mid 1)$ bzw. $(1 \mid \sqrt{2})$, alle Punkte der Verbindungsstrecke mit Ausnahme der Endpunkte liegen in B, ihre Verbindungsgerade ist offensichtlich die Gerade $b + c = (1 + \sqrt{2})$.

Nun können wir direkt aus der Figur ablesen: Die Menge der Geraden der Form $b + c = {}^1/_t$ mit $^1/_t \ge (1 + \sqrt{2})$, also $0 < t \le (1 + \sqrt{2})$ ist identisch mit der Menge der Geraden, die parallel zu 2. Winkelhalbierende sind und die b−Achse in einem Punkt $(r|0)$ mit $r \ge (1 + \sqrt{2})$ schneiden. Jeder Punkt einer solchen Geraden, der in S und damit auch in $V(t)$ liegt, liegt auch in B; und weil sich B nach rechts in das Unendliche erstreckt, gibt es auch für jedes solche t Punkte in B. Andererseits ist die Menge der Geraden der Form $b + c = {}^1/_t$ mit $^1/_{(1+\sqrt{2})} < t < 1$ identisch mit der Menge der Geraden, die parallel zu 2. Winkelhalbierende sind und die b−Achse in einem Punkt $(r|0)$ mit $1 < r < (1 + \sqrt{2})$ schneiden. Jede solche Gerade hat Punkte, die in S, aber nicht in B liegen, z.B. die in der Figur braun markierten Punkte.

Bemerkung: Wie im 2. Beweis werden Eigenschaften von Graphen benützt, die als bekannt vorausgesetzt werden. Eigentlich notwendige Beweise zu Stetigkeit, Monotonie und Krümmungsverhalten können wie im 2. Beweis angedeutet geführt werden.

Aus technischen Gründen musste in der Figur für die Beschreibung der Hyperbeln die Variable x statt b verwendet werden.

4. Beweis (trigonometrisch): Wir behandeln die Aufgabe für Dreiecke mit $\beta \le \gamma$, für Dreiecke mit $\beta > \gamma$. Für Dreiecke mit $\beta > \gamma$ gilt die folgende Argumentation nach Vertauschen von $B/b/\beta$ und $C/c/\gamma$.

Jede Klasse von untereinander ähnlichen spitzwinkligen Dreiecken ABC mit $\beta \le \gamma$ und gleichem Seitenverhältnis $a:b:c$ kann beschrieben werden durch ein Tripel von Winkeln (α,β,γ) mit $0° < \alpha,\beta,\gamma < 90°$, $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, $\beta \le \gamma$, die Dreiecke einer Klasse haben alle den gleichen t–Wert.

Die gleiche Klasse kann eineindeutig beschrieben werden durch ein Winkelpaar (α,δ) mit

$$\delta := {}^1/_2(\gamma - \beta) \quad \text{mit } 0° < \alpha < 90° \text{ und } 0° \le \delta < {}^\alpha/_2,$$

denn hieraus kann man eineindeutig auf das Tripel (α,β,γ) schließen durch die Zuweisung $\delta := {}^1/_2(\gamma - \beta) = {}^1/_2(\gamma + \beta) - \beta = {}^1/_2(180° - \alpha) - \beta$, also $\beta = 90° - {}^\alpha/_2 - \delta$ und $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 90° - {}^\alpha/_2 + \delta$, und es gilt auch $\beta \le \gamma$. Es wird auch jedes solche Tripel (α,β,γ) erreicht.

Weil $sin(90° - {}^\alpha/_2) = cos({}^\alpha/_2)$, gilt in jedem Dreieck ABC:

$$t = \frac{a}{b+c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta + \sin\gamma} = \frac{\sin\alpha}{\sin\left(90° - \frac{\alpha}{2} - \delta\right) + \sin\left(90° - \frac{\alpha}{2} + \delta\right)} = \frac{2\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right)\cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right)}{2\sin\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right)\cos(\delta)}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right)}{\cos\delta} = t(\alpha,\delta).$$

Für festes $0° < \alpha < 90°$ ist die Funktion $t(\alpha,\delta)$ streng monoton wachsend mit δ im Bereich $0° \le \delta < {}^\alpha/_2$, und umgekehrt ebenso für festes δ streng monoton wachsend mit wachsendem α. Damit nimmt t für festes α genau die Werte im Intervall $\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right)}{1}; \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right)}\right) = \left(\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right); \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right)\right)$ an.

Teil 1.1: Die Aussage ist falsch für alle $t \in ({}^1/_2;1)$: Zum Nachweis betrachten wir z.B. die Menge der Dreiecke mit $60° < \alpha < 90°$ und $\gamma = \alpha$, also $0° < \beta = (180° - 2\alpha) < 60° < \alpha$. Diese sind alle spitzwinklig und es gilt $\beta \le \gamma$ und $0° \le \delta = {}^1/_2(\gamma - \beta) < 45°$, alle diese Werte δ werden auch angenommen. Mit obigem Ergebnis wissen wir nun, dass t genau die Werte im Intervall $(sin({}^1/_2 \cdot 60°); tan({}^1/_2 \cdot 90°)) = ({}^1/_2;1)$ annimmt. Es gilt aber $\beta \le \gamma < 90°$, also $2\beta \le \beta + \gamma = 180° - \alpha \le 120°$ also $\beta < 60° < \alpha$, d.h. für diese t ist die Behauptung $\alpha \le \beta$ nicht erfüllt.

Teil 1.2: Die Aussage ist falsch für alle $t \in \left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}; 1\right]$: Zum Nachweis betrachten wir z.B. die Menge der Dreiecke mit $\alpha = 45° + \varepsilon < 90°$ $\beta = 45°$, $90° > \gamma = 90° - \varepsilon > 45°$ für $0° < \varepsilon < 45°$. In diesen Dreiecken ist $\alpha = 45° + \varepsilon > 45° = \beta$ und $0° < \delta = {}^1/_2(\gamma - \beta) = {}^1/_2 \cdot (45° - \varepsilon) < 45°$. Diese Dreiecke sind offensichtlich alle spitzwinklig mit $\beta \le \gamma$, und wenn ε alle möglichen Werte durchläuft, nimmt auch δ alle Wert im angegebenen Bereich an.

Also ist $t = t(\varepsilon) = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}(45° + \varepsilon)\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}(45 - \varepsilon)\right)}$, diese Funktion ist für $0° < \varepsilon < 45°$ stetig, nimmt also alle Werte größer als $\frac{\sin\left(\frac{1}{2}(45° + 0°)\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}(45 - 0°)\right)} = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$ und kleiner als $\frac{\sin\left(\frac{1}{2}(45° + 45°)\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}(45 - 45°)\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2} > {}^1/_2$ an. (Dass sie keine kleineren Wert annimmt, ist interessant, aber für unsere Betrachtung unnötig; vgl. Teil 2.)

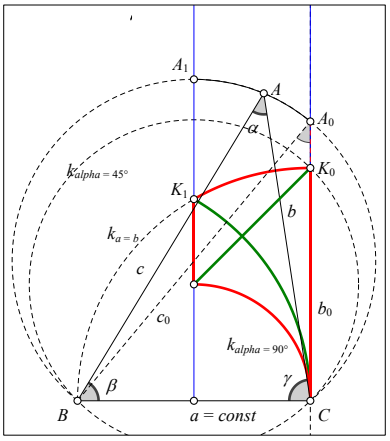
Teil 2: Die Aussage ist richtig für alle $t \in \left(0; \frac{1}{1+\sqrt{2}}\right]$:

Für festes β gilt: $\beta - \alpha = (90° - {}^\alpha/_2 - \delta) - \alpha = 90° - {}^3/_2\alpha - \delta$, d.h. es ist $\alpha \le \beta \Leftrightarrow \delta \le 90° - {}^3/_2\alpha$. Gleichzeitig muss $0° \le \delta$ sein, was nur für Winkel $\alpha \le 60°$ gilt, hieraus schließen wir, dass für $\alpha > 60°$ und $\beta \le \gamma$ stets $\beta < \alpha$. Für $\alpha \le 45°$ ist stets $\delta \le 90° - {}^3/_2 \cdot 45° \le \cdot {}^1/_2 \cdot 45°$, hieraus schließen wir, dass für alle $\alpha \le 45°$ und $\beta \le \gamma$ stets $\alpha \le \beta$.

Es ist $t = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right)}{\cos\delta}$ bei festem α streng monoton wachsend mit wachsendem δ, also gilt für $0° < \alpha \le 45°$:

$$\alpha \le \beta \quad \Leftrightarrow \quad t \le \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right)}{\cos\left(90° - \frac{3}{2}\alpha\right)} = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right)}{\sin\left(\frac{3}{2}\alpha\right)} = \frac{1}{1+2\cos\alpha} = \frac{1}{1+\sqrt{2}}.$$

Die Aussage ist also wahr für alle $t \le \frac{1}{1+\sqrt{2}}$.

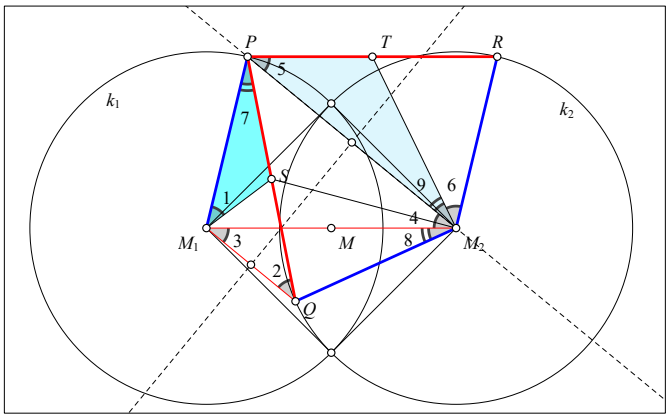


Bemerkung: Man kann die Argumentation in der Figur nachvollziehen: Wie im 2. Beweis gilt: Bei fest gewählten Ecken B und C liegen die Ecken A von spitzwinkligen Dreiecken ABC mit $\beta \le \gamma$ auf oder rechts von der Mittelsenkrechten von BC und links, aber nicht auf der Senkrechten auf AC durch C und außerhalb des Thaleskreises über AC. Ist zusätzlich $\alpha > \beta$, so ist $a > b$ und A auf oder innerhalb des Kreises $k_{a=b}$ mit Mittelpunkt C durch B. Dann ist die Aussage falsch für solche t−Werte, für die es mindestens ein Dreieck ABC mit A im roten Bereich mit diesem t−Wert gibt. Dies wird gezeigt für die Ecken A auf den grünen Linien, sie nehmen wie in 1.1 und 1.2 gezeigt alle Werte t aus dem Intervall $(\frac{1}{1+\sqrt{2}};1)$ an. Für konstantes α liegen die möglichen Ecken A auf dem Fasskreisbogen zum Winkel α über der Sehne AC, soweit dieser Bogen zwischen den senkrech zu AC verlaufenden LInien liegt. Für $\alpha > 60°$ verläuft der Bogen vollständig innerhalb des roten Bereiches, für $45° < \alpha < 60°$ teilweise innerhalb, teilweise außerhalb. Für $\alpha \le 45°$ verläuft der Bogen stets außerhalb, und der Wert an der Grenze (wenn A auf K_0 liegt, also wenn $\alpha = 45°$ und $\delta = 67{,}5°$ist) ist $t = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$.

Aufgabe 3: Zwei Kreise k_1 mit Mittelpunkt M_1 und k_2 mit Mittelpunkt M_2 schneiden sich so, dass ihre beiden Schnittpunkte und die beiden Mittelpunkte vier Ecken eines Quadrates sind. Ein Punkt P liegt auf k_1 und zwei weitere verschiedene Punkte Q und R liegen auf k_2 so, dass PQ und PR gleiche Länge wie die Strecke M_1M_2 haben und P und R auf der gleichen Seiten der Geraden M_1M_2 liegen. Die Mittelpunkte der Strecken PQ und RP seien mit S bzw. T bezeichnet.

Zeige: Die Dreiecke PSM_1 und PTM_2 sind ähnlich.

1. Beweis: O.B.d.A. setzen wir $r_1 = 1$. Weil die Mittelpunkte von k_1 und k_2 und die Schnittpunkte dieser beiden Kreise Ecken eines Quadrates sind, ist $r_1 = r_2 = 1$ und die Strecke M_1M_2 hat die Länge $\sqrt{2}$.



M_1M_2RP ist ein Parallelogramm, weil R auf gleicher Seite bezgl. der Geraden M_1M_2 liegt und gegenüberliegende Seiten gleich lang sind; insbesondere ist $M_1M_2 \parallel PR$.

PM_1QM_2 ist ein gleichschenkliges Trapez, weil die Dreiecke M_1PQ und QM_2M_1 kongruent mit gemeinsamer Seite M_1Q sind. Insbesondere ist $M_1Q \parallel M_2P$ und die Mittelsenkrechte von M_1Q ist Symmetrieachse,

QM_2RP ist ein Drachenviereck mit Symmetrieachse M_2P.

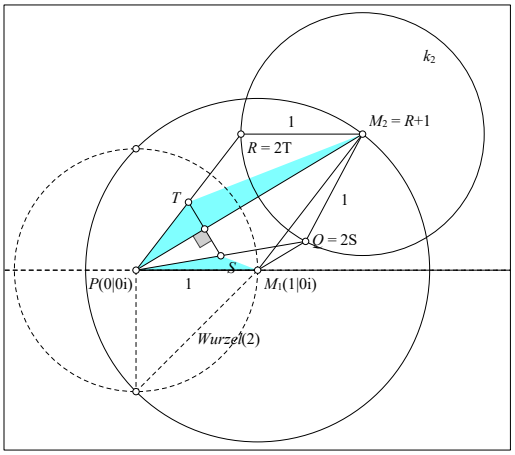
Lemma: Im Dreieck XYZ sei $\overline{XY} : \overline{YZ} = \sqrt{2} = \sqrt{2}$. Dann spaltet die Seitenhalbierende von Z vom Dreieck XYZ ein zu ihm ähnliches Dreieck ZYM_{XZ} ab.

Beweis: Gemeinsamer Winkel bei Y, und $\overline{XY} : \overline{YZ} = \sqrt{2} : 1 = 1 : (1/2\sqrt{2}) = \overline{ZY} : \overline{YM_{XZ}}$.

Anwendung auf Dreieck QPM_1 ergibt $\angle 1 = \angle 2$, auf Dreieck M_2PR ergibt $\angle 5 = \angle 6$, zusammen mit der oben angesprochenen Symmetrie und den Parallelitäten ergibt sich also $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = \angle 5 = \angle 6$, weiter $\angle 7 = \angle 8$ und $\angle 8 + \angle 4 = \angle 9 + \angle 6$, also $\angle 8 = \angle 9$.

Also haben die Dreiecke PSM_1 und PTM_2 die gleichen Innenwinkel, sind also ähnlich.

2. Beweis (mit komplexen Zahlen, Grundkenntnisse werden als bekannt vorausgesetzt): O.B.d.A. habe k_2 den Radius 1. Die Mittelpunkte und die Schnittpunkte von k_1 und k_2 sind Eckpunkte eines Quadrates. Dessen Seiten sind Radien von k_1 und k_2, d.h. auch k_2 hat Radius 1 und M_1M_2 ist Diagonale, also ist $\overline{M_1M_2} = \sqrt{2} = \overline{PR} = \overline{PQ}$



Weiter ist PM_1M_2R ein Parallelogramm, weil gegenüber liegende Seiten gleich lang sind ($\overline{PM_1} = \overline{M_2R} = 1$, $\overline{PR} = \overline{M_1M_2} = \sqrt{2}$) und P und R auf der gleichen Seite von M_1M_2 liegen.

Da $\overline{PQ} = \overline{PR} = \sqrt{2}$, sind R und Q die Schnittpunkte von k_2 mit dem Kreis um P mit Radius $\sqrt{2}$. Also ist Q das Bild von R bei Spiegelung an der Verbindungsgeraden der Mittelpunkte PM_2.

Wir beschreiben diese Situation in der komplexen Zahlenebene, Punkte und zugehörigen Zahlen werden mit den gleichen großen bzw. kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet. Von P gehen drei der vier Strecken aus, die zur Berechnung von Längenverhältnissen gewählt werde, eine Festlegung von P als Ursprung und $m_1 = 1$ vereinfacht die Rechnungen. Dann ist

$$r\bar{r} = \overline{PR}^2 = 2, \quad m_2 = r + 1, \quad s = {}^1\!/_2\, q, \quad t = {}^1\!/_2\, r\,.$$

Q ist das Bild von R bei Spiegelung an der Ursprungsgeraden M_2P, es gilt also

$$q = \frac{m_2 - p}{\overline{m_2 - p}}\bar{r} = \frac{r+1}{\overline{r+1}}\bar{r} = \frac{r\bar{r}+\bar{r}}{\overline{r+1}} = \frac{2+\bar{r}}{\overline{r+1}} = \frac{\overline{r+2}}{\overline{r+1}} = \overline{\frac{r+2}{r+1}}\,.$$

Weiter gilt $\dfrac{m_2 - t}{m_2 - p} = \dfrac{r+1-\frac{1}{2}r}{r+1} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{r+2}{r+1} = \dfrac{1}{2}\bar{q} = \dfrac{\frac{1}{2}q}{1} = \overline{\left(\dfrac{s}{m_1}\right)} = \overline{\left(\dfrac{s-p}{m_1-p}\right)}$

Hieraus lesen wir ab, dass $\angle TM_2P$ und $\angle M_1PS$ gegensinnig kongruent sind und $\dfrac{\overline{M_2T}}{\overline{M_1P}} = \dfrac{\overline{SP}}{\overline{M_1P}}$.

Hieraus folgt nach sws die Ähnlichkeit der Dreiecke TM_2P und M_1PS.

Bemerkungen: Die Bezeichnungen PTM_2 und TPM_2 sind zwei verschieden Bezeichnungen für die selbe Figur. Wenn nachgewiesen werden soll, dass die Dreiecke PTM_2 und PSM_1 ähnlich sind, d.h. dass sie durch eine Kombination von Ähnlichkeitsabbildungen aufeinander abgebildet werden können, wird durch die Wahl der Bezeichnung nicht festgelegt, welcher der drei Punkte P,T,M_2 des Dreiecks PTM_2 auf den Punkt P des Dreiecks PSM_1 abgebildet werden muss, auch wenn oft stillschweigend nach einer solchen Konvention formuliert wird.

Bemerkungen: Es ist $\overline{M_2P} = \sqrt{2}\cdot\overline{M_2S}$ und $\overline{M_1Q} = \sqrt{2}\cdot\overline{M_1S}$. Weil Viereck PM_1QM_2 auch Sehnenviereck ist, gilt mit Ptolemäus $\overline{M_1Q}\cdot\overline{M_2P} + \overline{M_1P}\cdot\overline{M_2Q} = \overline{M_1M_2}\cdot\overline{PQ}$, also $\sqrt{2}\cdot M_1S\cdot\sqrt{2}\cdot M_2S = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2} - 1\cdot 1$, also $\overline{M_1S}\cdot\overline{M_2S} = {}^1\!/_2 = ({}^1\!/_2\ \overline{M_1M_2}\ )^2 = const.$

Hieraus schließen wir: Wird der Punkt P auf dem Kreis k_1 bewegt, bewegt sich Punkt S auf der *Lemniskate* mit Brennpunkten M_1, M_2 und Potenz $({}^1\!/_2\ \overline{M_1M_2}\ )^2$; der Punkt T bewegt sich auf einem zu k_1 und k_2 kongruenten Kreis mit Durchmesser $\overline{M_1M_2}$.

Übrigens ist $\overline{M_1T}^2 + \overline{M_2T}^2 = 3 = 2\cdot\overline{MT}^2 + {}^1\!/_2\cdot\overline{M_1M_2} = const.$ (Satz von Stewart für den Spezialfall der Seitenhalbierenden, gilt für jedes Dreieck M_1M_2T.)

Motiv aus: Heinrich Dörrie, Mathematische Miniaturen, Breslau 1943, Problem 156, S.174 – 175. Dort wird mit Satz von Stewart argumentiert, nicht über ähnliche Dreiecke.

Aufgabe 4: Eine ganze Zahl $d > 1$ heiße *steinig*, wenn man d Steine so auf die Felder eines d x d−Schachbretts legen kann, dass sich auf keinem Feld mehr als ein Stein befindet und auf dem Feld in Zeile x und Spalte y genau dann ein Stein liegt, wenn die ganze Zahl $x^3 - y^2$ durch d teilbar ist ($1 \le x,y \le d$).

Bestimme die kleinste und die größte Anzahl an steinigen Zahlen, die unter zehn aufeinander folgenden positiven ganzen Zahlen vorkommen können.

Anmerkung: Die Richtigkeit der Antwort ist zu beweisen.

Antwort: Unter zehn aufeinander folgenden positiven ganzen Zahlen gibt es höchstens acht steinige Zahlen und es gibt 10 aufeinander folgende Zahlen, unter denen keine steinige Zahl ist.

Beweis: Wir benützen den folgenden, weiter unten bewiesenen Satz:

Satz 1: Eine positive ganze Zahl d ist genau dann steinig, wenn d quadratfrei ist, d.h. wenn in der Primfaktorzerlegung von d keine Primzahl mehrfach vorkommt.

Mit "Zahl" sei im Folgenden stets "ganze Zahl" gemeint. Nach Satz 1 ist jede durch $2^2 = 4$ teilbare Zahl nicht steinig. Da unter je 10 aufeinander folgenden Zahlen mindestens zwei Zahlen durch 4 teilbar sind, kann es unter 10 aufeinander folgenden Zahlen höchstens acht steinige Zahlen geben. Diese Grenze ist scharf: Das Intervall [29,38] enthält 10 Zahlen, davon sind acht steinig, weil entweder selbst Primzahl oder Produkt zweier verschiedener Primzahlen, nämlich 29, $30 = 2\cdot3\cdot5$, 31, $33 = 3\cdot11$, $34 = 2\cdot17$, $35 = 5\cdot7$, 37, $38 = 2\cdot19$. Die Intervalle [30,39], [33,42] sind ebenfalls Beispiele.

Andererseits gibt es Zahlen N, sodass das Intervall $[N;N+9]$ nur nicht−steinige Zahlen enthält. Dies gilt z.B. für jede Zahl N, die gleichzeitig folgende acht Kongruenzen erfüllt:

$N \equiv 0 \ mod\ 2^2$, $N \equiv 1 \ mod\ 3^2$, $N \equiv 2 \ mod\ 5^2$, $N \equiv 3 \ mod\ 7^2$,

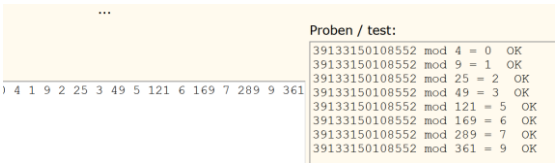
$N \equiv 5 \ mod\ 11^2$, $N \equiv 6 \ mod\ 13^2$, $N \equiv 7 \ mod\ 17^2$, $N \equiv 9 \ mod\ 19^2$.

Dann sind die zehn aufeinander folgende Zahlen $N - i$ für $i = 0, 1, \ldots 9$ alle durch das Quadrat einer Primzahl teilbar, dabei wurde berücksichtig, dass die Zahlen N−4 und N−8 automatisch wie N durch 2^2 teilbar. Die angegebenen Moduln sind alle teilerfremd, also gibt es nach Chinesischem Restsatz solche Zahlen.

Folgender Term führt auch zu einer solchen Zahl N (hier ohne Nachweis der Richtigkeit angegeben:

$2^2\cdot(2+3^2\cdot(15+5^2\cdot(32+7^2\cdot(83+11^2\cdot(93+13^2\cdot(244\cdot17^2\cdot(210+19^2)))))))$ = 149.034.822.083.648

Das kleinste N, für das das Intervall $[N;N+9]$ nur nicht−steinige Zahlen enthält, ist N = 221.167.422, vgl. https://arxiv.org/abs/1210.3829v1. Ein solches N kann man auch im Internet abrufen und dann mit schulüblicher Ganzzahlarithmetik und schulunüblicher Ausdauer bestätigen, z.B. (vgl. nebenstehenden Ausdruck)



https://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/chinesischerRestsatz.htm :

Der Beweis für Satz 1 folgt auf der nächsten Seite:

Beweis des Satz 1: Eine positive ganze Zahl d ist genau dann steinig, wenn d quadratfrei ist, d.h. wenn in der Primfaktorzerlegung von d keine Primzahl mehrfach vorkommt.

Wir benützen folgende Bezeichnungen:

Bekanntlich schreibt man für ganze Zahlen a,b,m mit $m \geq 2$

$a \equiv b \bmod (m) \Leftrightarrow m|(a-b) \Leftrightarrow a$ und b lassen bei Division durch m den gleichen Rest.

" $x^3 - y^2$ ist durch d teilbar" kann man also schreiben als $x^3 - y^2 \equiv 0 \bmod d$.

Mit G_d bezeichnen wir die Gleichung $x^3 - y^2 \equiv 0 \bmod d$ (abhängig vom Parameter d). Ein Paar ganzer Zahlen $(x|y)$, das diese Gleichung erfüllt, bezeichnen wir mit *Lösung von* G_d. Wenn zusätzlich $1 \leq x,y \leq d$ gilt, bezeichnen wir ein solches Paar $(x|y)$ als *Grundlösung von* G_d. Wenn G_d eine Lösung besitzt, dann besitzt G_d auch eine Grundlösung.

Mit $s(d)$ bezeichnen wir die Anzahl Grundlösungen von G_d. Es ist als d steinig $\Leftrightarrow s(d) = d$.

Wir benützen vier Lemmata, die weiter unten bewiesen werden:

Lemma 1: Sind n,m teilerfremd, so kommt unter den n Zahlen $x + tm$ mit $1 \leq t \leq n$ jeder Rest $\bmod n$ genau einmal vor. Falls n,x teilerfremd sind, kommt unter den n Zahlen tx mit $1 \leq t \leq n$ jeder Rest $\bmod n$ vor.

Lemma 2: $s(p) = p$ für alle Primzahlen p.

Lemma 3: $s(p^k) > p^k$ für alle Primzahlen p und Exponenten $k > 1$.

Lemma 4: $s(m \cdot n) = m \cdot n$ falls $ggT(m,n) = 1$.

Mit Lemmata 2, 3 und 4 folgt nun induktiv

$s(d) = d \Leftrightarrow d$ ist das Produkt von Primzahlen, in dem keine Primzahl doppelt vorkommt, d.h.

d steinig $\Leftrightarrow d$ quadratfrei $\Leftrightarrow$ 1 ist die einzige Quadratzahl, die d teilt.

Damit ist Satz 1 bewiesen. Es fehlen noch die Beweise der Lemmata:

Beweis Lemma 1: Aus $x + t_1 m \equiv x + t_2 m \bmod n$ folgt $(t_1 - t_2) \cdot m = tn$ für ein geeignetes t. Da m,n teilerfremd, muss wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung jeder Primfaktor von n in $(t_1 - t_2)$ vorkommen. Also gilt $n \mid (t_1 - t_2)$. Da $1 \leq t_1,t_2 \leq n$, ist dies nur für $t_1 = t_2$ möglich. Und für $t_1 x \equiv t_2 x \bmod n$ folgt, dass $n|x(t_1 - t_2)$, also $n|(t_1 - t_2)$, letzteres ist aber für $t_1 = t_2 \leq n$ möglich.

Beweis Lemma 2:

Fall 1 $p = 2$: Es sind vier Terme zu untersuchen, nämlich $(1^3 - 1^2)$, $(2^3 - 2^2)$, $(2^3 - 1^2)$ und $(1^3 - 2^3)$. Davon sind genau zwei durch 2 teilbar, die anderen beiden nicht. Es ist $s(2) = 2$, die Zahl 2 also steinig.

Fall 2: $p > 2$, also ist p ungerade Primzahl. Zunächst stellen wir fest, dass $(x|y) = (p,p)$ für alle p Grundlösung von G_p ist. Für andere Grundlösungen $(x|y)$ leiten wir eine notwendige Bedingung für x her:

Sei $(x,y) \neq (p|p)$ Grundlösung von G_p. Wäre $x = p$ oder $y = p$, dann auch $y = p$ bzw. $x = p$. Also gilt $1 \leq x,y < p$. Nach Lemma 1 lassen keine zwei der Zahlen tx mit $1 \leq t < p$ bei Division durch p den gleichen Rest.

Da es genau p verschiedene Reste $\bmod p$ gibt und die tx paarweise verschieden sind, kommt unter diesen Zahlen tx jeder Rest $\bmod p$ genau einmal vor, insbesondere gibt es genau ein $1 \leq t \leq p$ mit $tx \equiv y \bmod p$. Dies setzen wir in G_p ein und erhalten $x^3 - (tx)^2 \equiv x^2(x - t^2) \equiv 0 \bmod p$. Da p Primzahl ist, folgt $p|x^2$ oder $p|(x - t^2)$. Im ersten Fall wäre $x = p$, was aber ausgeschlossen ist, also gilt $x \equiv t^2 \bmod p$ für ein geeignetes $1 \leq t < p$. (In der höheren Mathematik sagt man "x ist quadratischer Rest $\bmod p$.")

Umgekehrt führt jede Zahl t mit $1 \leq t < p$ zu einer Grundlösung von G_p: Für jedes t mit $1 \leq t < p$ setzen wir $x = x(t)$ als diejenige Zahl, für die $1 \leq x < p$ und $x \equiv t^2 \bmod p$, und $y = y(t)$ als die Zahl, für die $1 \leq y < p$ und $y \equiv t^3 \bmod p$, diese Zahlen existieren sicherlich. Dann ist $(x|y)$ Lösung von G_p mit $1 \leq x,y < p$, denn $x^3 - y^2 \equiv (t^2)^3 - (t^3)^2 \equiv t^6 - t^6 \equiv 0 \bmod p$. Keine zwei solcher Grundlösungen sind gleich: Falls $1 \leq t_1,t_2 < d$ und $(t_1^2|t_1^3) = (t_2^2|t_2^3)$, folgt insbesondere $t_1^2 \equiv t_2^2 \bmod p$ und somit $(t_1 + t_2)(t_1 - t_2) \equiv 0 \bmod p$, und da p Primzahl ist, folgt weiter $p|(t_1 + t_2)$ oder $p|(t_1 - t_2)$, also $t_1 + t_2 = p$ oder $t_1 = t_2$.

Insgesamt führt diese Konstruktion zu p paarweise verschiedenen Lösungspaaren: Die Zahlen t und $p - t$ sind nie gleich, denn aus $t = p - t$ folgt dass $2t = p$ gerade ist.

Und für $1 \le t_1,t_2 < p$ folgt aus $t_1^2 \equiv t_2^2 \bmod p$ nämlich $(t_1 + t_2)(t_1 - t_2) \equiv 0 \bmod p$, und da p Primzahl ist, folgt $p|(t_1 + t_2)$ oder $p|(t_1 - t_2)$, also im ersten Fall $t_1 + t_2 = p$ und somit $t_1 = p - t_2$, und im zweiten Fall $p|(t_1 - t_2)$, also $t_1 = t_2$. Insgesamt haben wir also das eine Lösungspaar $(p|p)$ und die $p - 1$ paarweise verschiedenen Lösungspaare $(x|y) \equiv (t^2|t^3)$ mit $1 \le t < p$. Zusammen sind dies genau p Lösungspaare.

Zusammenfassend gilt: Falls p Primzahl ist, ist p steinig.

Beweis Lemma 3: Für alle $k \ge 2$ und Primzahlen p und alle n mit $1 \le n \le p^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}$ ist $np^{\lceil \frac{k}{2} \rceil} \le p^k$ und $\left(np^{\lceil \frac{k}{2} \rceil}\right)^2 \equiv 0 \bmod p^k$, und für alle $1 \le m \le p^{\lfloor \frac{2k}{3} \rfloor}$ ist $mp^{\lceil \frac{k}{3} \rceil} \le p^k$ und $\left(mp^{\lceil \frac{k}{3} \rceil}\right)^3 \equiv 0 \bmod p^k$. Also sind die Zahlenpaare $(x|y) = (mp^{\lceil \frac{k}{3} \rceil} | np^{\lceil \frac{k}{2} \rceil})$ alle Lösungen von $x^3 - y^2 \equiv 0 \bmod p^k$ mit $1 \le x,y \le p^k$, und offensichtlich sind keine zwei dieser Zahlenpaare gleich. Da das Paar $(x|y) = (1|1)$ zusätzlich Lösung von G_d für alle d ist, hat $x^3 - y^2 \equiv 0 \bmod p^k$ insgesamt mindestens $p^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \cdot p^{\lfloor \frac{2k}{3} \rfloor} + 1 = p^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + \lfloor \frac{2k}{3} \rfloor} + 1$ verschiedene Lösungen.

Es genügt nun zu zeigen, dass $\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2k}{3} \right\rfloor \ge k$ für alle $k \ge 2$. Für $k < 7$ bestätigt man das durch Kopfrechnen (man erhält die Werte 2, 3, 4, 5, 7) , für $k \ge 7$ bestätigt dies Abschätzung

$$\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2k}{3} \right\rfloor \ge \frac{k-1}{2} + \frac{2k-2}{3} = k + {}^1\!/_6(k-7) \ge k .$$

Beweis Lemma 4: Die Zahlen m,n sind genau dann teilerfremd, wenn ihre Primfaktorzerlegungen keinen gemeinsamen Faktor besitzen. Aus $k_1m = k_2n$ folgt also $n|k_1$ und $m|k_2$ für alle $k_1,k_2 > 1$ und somit

(x,y) ist Grundlösung von Lösung von G_{mn}

$\Leftrightarrow$ es gibt ein k mit $x^3 - x^2 = k(mn) = (km)n = (kn)m$

$\Leftrightarrow$ (x,y) mit $1 \le x,y \le mn$ ist Lösung von G_m und von G_n.

Sei (x,y) Grundlösung von G_m. Dann sind alle Zahlenpaare $(x_u|y_v) = (x + (u-1)m \mid y + (v-1)m)$ ebenfalls Lösungen von G_m. Für verschiedene $(u|v)$ erhalten wir stets verschiedene solche Zahlenpaare und wenn es $s(m)$ Grundlösungen von G_m gibt, so gibt es für $1 \le u,v \le n$ genau $s(m)\cdot n^2$ Lösungen $(x_u|y_v)$ mit $1 \le x_u,y_v \le mn$ von G_m. (vgl. unten stehende Erläuterungen mit Figuren mit $m = 5$, $n = 7$)

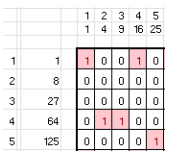
Mit analogen Argumenten gibt es genau $s(n)\cdot m^2$ Lösungen $(x'_i|y'_j) = (x' + (i-1)n \mid y' + (j-1)n)$ mit $1 \le i,j \le m$ und $1 \le x'_i|y'_j \le mn$ von G_n (vgl. Fig. 2 mit $m = 5$, $n = 7$)

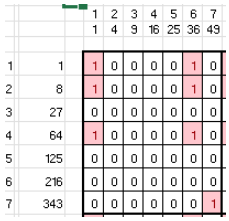
Nun zeigen wir, dass es zu jedem Paar von Grundlösungen (x,y) von G_m und $(x'|y')$ von G_n genau eine Lösungspaar $(x_u|y_v) = (x'_i|y'_j)$ gibt, das gleichzeitig Lösung von G_m und G_n ist und damit Grundlösung von G_{mn}:

Von den n Lösungen von $(x_u|y)$ mit $1 \le u \le n$ gibt es − da m,n teilerfremd sind − genau ein $x^* = x + (u-1)m \equiv x' \bmod n$ und $1 \le x^* \le mn$, und von allen $(x^*|y_v)$ mit $1 \le v \le n$ gibt es genau ein y^* mit $y^* = x + (u-1)m \equiv y' \bmod n$ und $1 \le y^* \le mn$. Nach Konstruktion ist nun $(x^*|y^*)$ Grundlösung von G_{mn}.

Da es $s(m)$ Grundlösungen von G_m und $s(n)$ Grundlösungen von G_n gibt, gibt es insgesamt genau $s(m)\cdot s(n)$ verschieden Paare nach obiger Konstruktion, also genau $s(m)\cdot s(n)$ Grundlösungen von G_{mn}.

Für quadratfreie Zahlen d, d.h. wenn $d = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$ das Produkt von paarweise verschiedenen Primzahlen ist, stets $s(d) = s(p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k) = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k = d$ ist, und wenn in diesem Produkt mindestens ein Faktor mehrfach vorkommt, ist $s(d) = s(p_1^2 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k) > p_1^2 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k > d$. Das war zu zeigen.





Erläuterungen: Nebenstehend sind in einem 5x5−Schachbrett bzw. 7x7−Schachbrett Felder mit Steinen rot markiert. Aus den Koordinaten können wir die Grundlösungen von G_5 bzw. G_7 ablesen. Nun setzen wir 49 = 7^2 Kopien des 5x5−Schachbretts zu einem 35x35−Schachbrett zusammen (1. Figur unten), die Koordinaten der rot markierten Felder sind nun die $5 \cdot 7^2$ Lösungen von G_5. Analog setzen wir 25 = 5^2 Kopien des 7x7−Schachbrettes zusammen und erhalten so $7 \cdot 5^2$ Lösungen von G_7 (2. Figur unten). Nach obiger Argumentation gibt es zu jedem Paar von Grundlösungen für G_5 und G_7 genau ein Zahlenpaar, das gleichzeitig Lösung (i.A. nicht Grundlösung!) von G_5 und G_7 ist. Beispiel: (4|3) ist Grundlösung von G_5, (2|6) ist Grundlösung von G_7, (9|13) = (4 + 1·5 | 3+2·5) = (2 + 1·7 | 6+1·7) ist gleichzeitig Lösung (und einzige Lösung) von G_5 und G_7, also Grundlösung von G_{35}.