BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK
Bildung & Begabung

Aufgaben und Lösungen

1. Runde 2026

Vorläufige Fassung
für die
Homepage

» KORREKTURKOMMISSION | KARL FEGERT

» BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK

Kortrijker Straße 1, 53177 Bonn | Postfach 20 02 01, 53132 Bonn | Tel.: (02 28) 9 59 15-20, Fax: (02 28) 9 59 15-29
info@bundeswettbewerb-mathematik.de, www.bundeswettbewerb-mathematik.de

24. März 2026

Gefördert vom:

Bundesministerium für Bildung, Familie, Senioren, Frauen und Jugend

STIFTERVERBAND

KULTUSMINISTER KONFERENZ

Aufgabe 1: Romeo und Julia treffen sich an einem romantischen Ort. Sie schreibt ihm ihre 10−stellige Telefonnummer auf einen Zettel.

Später findet Romeo den Zettel wieder, kann aber eine der Ziffern nicht mehr lesen, er weiß nur, dass es keine Null war. Also fragt er Julia nach der fehlenden Ziffer.

Julia spielt gerne mit Zahlen und sagt zu Romeo: Wenn ich zähle, wie viele Ziffern meiner Telefonnummer kleiner als 1 sind, danach, wie viele Ziffern kleiner als 2 sind, usw, und zum Schluss, wie viele kleiner als 10 sind, und dann diese zehn Anzahlen addiere, so ist das Ergebnis durch 9 teilbar.

Wie kann Romeo mit Hilfe dieser Information die fehlende Ziffer bestimmen?

Anmerkung: Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.

1. Möglichkeit: Romeo stellt Julias Rechengang folgendermaßen dar:

Er erstellt eine Tabelle mit 12 Spalten und 11 Zeilen. In die erste Zeile schreibt er in die Zellen der zweiten bis elften Spalte der Reihe nach die Ziffern der Telefonnummer. In die erste Spalte schreibt er in die Zellen der zweiten bis elften Zeile der Reihe nach die Zahlen 1 bis 10 (vgl. Beispiel mit der Telefonnummer 723450?873 in nebenstehende Figur). Dies dient gleichzeitig als Nummerierung der Zeilen.

Die Anweisung "Zähle, wie viele Ziffern meiner Telefonnummer kleiner als 1 (bzw. 2, 3, ... , 10) sind" stellt er dar, indem er in den Zellen von Zeile 1 (bzw. 2, 3, ... , 10) jeweils dann eine Markierung setzt, wenn die Telefonziffer, die oben in der gleichen Spalte steht, kleiner ist als 1 (bzw. 2, 3, ... , 10) ist. Die Zelle, die zur unbekannten Telefonziffer gehört, lässt er noch leer, mit Ausnahme der Zeile 10: Romeo setzt dort eine Markierung, weil ja jede Ziffer einer Telefonnummer stets kleiner als 10 ist.

	7	**2**	**3**	**4**	**5**	**0**	**?**	**8**	**7**	**3**	
1						x					1
2						x	?				1
3		x				x	?				2
4		x	x			x	?			x	4
5		x	x	x		x	?			x	5
6		x	x	x	x	x	?			x	6
7		x	x	x	x	x	?			x	6
8	x	x	x	x	x	x	?		x	x	8
9	x	x	x	x	x	x	?	x	x	x	9
10	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	10
	3	8	7	6	5	10	1	2	3	7	52

Romeo stellt noch fest: Ist in einer Zelle eine Markierung, dann ist auch in jeder Zelle darunter eine Markierung, denn wenn eine Telefonziffer kleiner als z.B. 3 ist, dann ist sie auch kleiner als jede Zahl, die größer ist als 3. Die unterste leere Zelle einer Spalte ist also in der Zeile, deren Nummer die zugehörige Telefonziffer ist.

Dann zählt Romeo die Anzahl der Markierungen in jeder Zeile, schreibt die Anzahl in die letzte Zelle dieser Zeile und addiert diese Zwischensummen und erhält so ein Zwischenergebnis (im Beispiel 52).

Das ist natürlich noch nicht die Zahl, die Julia nach ihrem Algorithmus berechnet hat, denn es fehlen noch die Einträge in der Spalte der unbekannten Telefonziffer.

Romeo weiß, dass die unbekannte Telefonziffer nicht die Ziffer 0 ist. Also kann in der zugehörigen Spalte in Zeile 1 keine Markierung sein. Weiter weiß er, dass noch in Zeilen 2 bis 9 je eine Markierung sein kann, insgesamt sind das mindestens 0 und höchstens 8 Markierungen. Weiter weiß er, dass Julias Zahl durch 9 teilbar ist. Also bestimmt er zu seinem Zwischenergebnis eine Zahl zwischen 0 und 8, sodass die Summe aus seinem Zwischenergebnis und dieser Zahl durch 9 teilbar ist (im Beispiel ist dies 2, denn $52 + 2 = 54 = 6\cdot 9$). Diese Zahl ist eindeutig bestimmbar. Er ergänzt also von unten diese Anzahl von Markierungen, das Ergebnis ist dann die Zeilennummer der untersten leeren Zelle. (im Beispiel die Ziffer 7, dies ist in der Figur nicht eingetragen.).

2. Möglichkeit: Beim Blick auf diese Tabelle sieht Romeo, dass er das Verfahren kürzer erklären kann: Jede Telefonziffer t wird $10 - t$ Mal gezählt. Er addiert also die 9 bekannten Telefonziffern, nennt die Summe B (im Beispiel (7+2+3+4+5+0+8+7+3) = 39) und weiß nun, dass die 9 bekannten Telefonziffern genau $90 - B$ mal gezählt werden (im Beispiel $90 - 39 = 51$ Mal). Die unbekannte Telefonziffer wird mindestens ein Mal gezählt, nämlich wenn untersucht wird, wie viele Ziffern kleiner als 10 sind (das trifft auf die unbekannte Telefonziffer zu), und höchstens 9 Mal (denn die unbekannte Ziffer ist nicht Null, ist also nicht kleiner als 1). Insgesamt werden die Telefonziffern also mindestens $90 - B + 1$ Mal und höchstens $90 - B + 9$ Mal gezählt. Dies sind 9 aufeinander folgende Zahlen (im Beispiel mindestens 52 und höchstens 60), von solchen Zahlen ist genau eine durch 9 teilbar. Sei diese Zahl $90 - B + k$ mit $1 \le k \le 9$ (im Beispiel ist $k = 3$). Dann wurde die unbekannte Telefonziffer genau k Mal gewählt, die gesuchte Ziffer ist dann $10 - k$ (im Beispiel 7).

3. Möglichkeit: Romeo kann die fehlende Ziffer z mit $1 \le z \le 9$ folgendermaßen bestimmen: Addiere die bekannten 9 Ziffern, nenne die Summe B, der Neunerrest von B sei r. Dann ist z der Neunerrest von $10 - r$, also $z = 10 - r$ für $1 \le r \le 8$ und $z = 1$ für $r = 0$.

Beweis: Seien $t_1, t_2, \ldots, t_9$ die bekannten Telefonziffern, sei z die unbekannte Telefonziffer. Romeo weiß, dass $z \ne 0$, also ist $1 \le z \le 9$ Die Summe der bekannten Telefonziffern sei $B = t_1 + t_2 + \ldots + t_9$, der Neunerrest von B sei r, d.h. es ist $B = 9k + r$ für ein geeignetes ganzzahliges k und $0 \le r \le 8$.

Die Zahlen 1 bis 10, die in Julias Zählalgorithmus vorkommen, nennen wir Zählparameter. Die Telefonziffer t_1 wir beim Durchgang mit Zählparameter p dann gezählt, wenn $t_1 < p$, d.h. bei allen Parametern, die größer sind als t_1. Insgesamt wird t_1 also $10 - t_1$ oft gezählt. Dies gilt für alle anderen Telefonziffern entsprechend, die Gesamtzahl der Zählungen − also Julias Zahl − ist also

$$(10 - t_1) + (10 - t_2) + (10 - t_3) + \ldots + (10 - t_9) + (10 - z) = 100 - (t_1 + t_2 + \ldots + t_9 + z)$$
$$= 100 - 9k - r - z$$

Julia sagte, dass diese Zahl durch 9 teilbar ist, es ist also

$$100 - 9k - r - z \equiv 10 - r - z \equiv 0 \pmod 9\text{, also } z \equiv 10 - r \pmod 9.$$

Für $0 \le r \le 8$ und $z \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ sind alle Lösungen eindeutig mit Ausnahme von $r = 1$, in diesem Fall sind $z = 0$ und $z = 9$ Lösung. Romeo weiß aber, dass $z = 0$ ausscheidet. Das war zu zeigen.

Bemerkung: Eine Zahl, die aus den Ziffern einer Zahl nach einem solchen (oder ähnlichen) Algorithmus bestimmt wird, nennt man in der Informationstechnologie *Prüfziffer*. Mit Hilfe einer Prüfziffer kann man feststellen, ob eine Datenübermittlung oder das Ergebnis einer Rechnung fehlerhaft ist, z.B. sind die ersten beiden Ziffern bei einer IBAN−Kontonummer Prüfziffern. Als man früher in der Schule noch viel ohne Taschenrechner rechnen musste, half die "Neunerprobe", nämlich das Bestimmen der Quersummen der beteiligten Zahlen − bei der Ergebniskontrolle.

Aufgabe 2: Bestimme alle Tripel positiver ganzer Zahlen (a, b, c), die folgende Eigenschaften haben:

1) Die Summe $a + b + c$ ist eine Primzahl.
2) Die Zahl $ab + bc + ca$ ist Teiler der Zahl $a^2 + b^2 + c^2$.

Anmerkung: Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.

Ergebnis: Das Tripel $(a,b,c) = (1,1,1)$ erfüllt obige Bedingungen, es ist das einzige solche Tripel.

1. Beweis:

Teil 1: Das Tripel $(1,1,1)$ erfüllt die Bedingungen: Es ist $1 + 1 + 1 = 3$ eine Primzahl, und es ist $1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 = 3$ ein Teiler von $1^2 + 1^2 + 1^2 = 3$.

Teil 2: Wenn das Tripel (a, b, c) die Bedingungen erfüllt, ist $a = b = c = 1$:

Es gibt dann eine Primzahl p mit $p = a + b + c$ und es gilt $(ab + bc + ca) \mid (a^2 + b^2 + c^2)$. Dann gilt auch

$$(ab + bc + ca) \mid (a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ca) = (a + b + c)^2 = p^2 .$$

Da p Primzahl ist, hat p^2 die Teiler 1, p und p^2, dies sind auch die einzigen Teiler von p^2. Also ist p einziger Teiler von p^2 der größer als 1 ist und kleiner als p^2.

Das trifft auf den Teiler $ab + bc + ca$ zu, denn es ist $a,b,c \geq 1$, also $ab + bc + ca \geq 3 > 1$, andererseits gilt auch $(a^2 + b^2 + c^2) > 0$, also $3 \leq ab + bc + ca < (a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ca) = p^2$.

Es ist also $ab + bc + ca = p = a + b + c$, was wir äquivalent umformen $a(b - 1) + b(c - 1) + c(a - 1) = 0$. Keiner der drei Summanden kann negativ sein, also haben alle den Wert 0, was nur für $a = b = c = 1$ erfüllt ist. Das war zu zeigen.

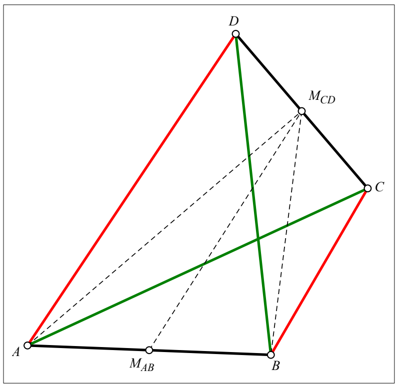
Aufgabe 3: Wir betrachten ein Tetraeder $ABCD$, das nicht notwendig regulär ist.

Eine Gerade im Raum heiße *zweizählige Symmetrieachse* dieses Tetraeders, wenn eine Drehung um diese Gerade um 180° dieses Tetraeder in sich selbst überführt.

Beweise, dass folgende beiden Eigenschaften äquivalent sind:

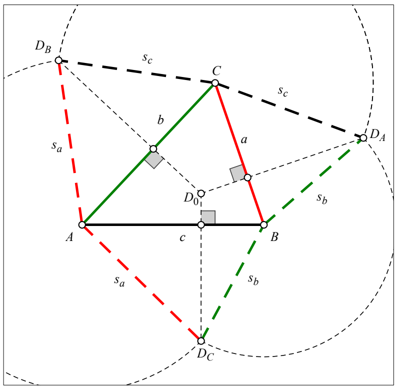
(1) Alle drei Verbindungsgeraden der Mittelpunkte gegenüberliegender Kanten sind zweizählige Symmetrieachsen.
(2) Alle Seitenflächen des Tetraeders haben gleichen Umfang.

1. Beweis (elementargeometrisch): Der Mittelpunkt der Kante AB sei mit M_{AB} bezeichnet, die übrigen Mittelpunkte in analoger Weise mit M_{BC}, M_{CD}, M_{DA}, M_{AC}, M_{BD}.



Wir zeigen zuerst (1) $\Rightarrow$ (2): Wir gehen von einem nicht entarteten Tetraeder aus, d.h. die Ecken liegen nicht auf den Verbindungsgeraden der Mittelpunkte gegenüberliegender Kanten. Also überführt nach Voraussetzung eine Drehung um die Achse $M_{AB}M_{CD}$ das geordnete Punktequadrupel (A,B,C,D) in das geordnete Quadrupel (B,A,D,C), also die Kanten AB und CD jeweils auf sich selbst, die Kante BC auf die Kante AD, die Kante BD auf die Kante AC, und ferner die Kante BC auf die Kante AD. Insbesondere haben BD und AC gleiche Länge, ebenso BC und AD. Also haben je zwei Seiten der Dreiecke ABC und ABD (das sind die beiden Dreiecke mit gemeinsamer Seite AB) gleiche Länge, die beiden Dreiecke sind also kongruent und haben insbesondere den gleichen Umfang. In analoger Weise schließen wir, dass auch die Dreiecke mit der gemeinsamen Kante CD, also CDA und CDB kongruent sind,

In analoger Weise folgern wir aus einer Drehung um die Achsen $M_{BC}M_{DA}$ und $M_{CA}M_{BD}$, dass die Dreiecke ABC und BCD kongruent sind, ebenso ABC und ADC. Also sind alle vier Seitenflächen des Tetraeders kongruent, haben also gleichen Umfang. Das war zu zeigen.



Nun zeigen wir (2) $\Rightarrow$ (1): Die Längen der Kanten AB, BC und CA (also der Seiten des Dreiecks ABC) seien wie üblich mit a, b und c bezeichnet, die Längen der Kanten AD, BD und CD mit s_a, s_b bzw. s_c (vgl. nebenstehende Figur mit dem Netz eines allgemeinen Tetraeders; bei einem Tetraeder, das die Bedingung (2) erfüllt, liegen die Ecken A, B, C auf den Verbindungsgeraden D_iD_j).

Nach Voraussetzung sind die Umfänge der Seitenflächen gleich, also gilt für die Umfänge der Dreiecke ABC und BCD: $a + b + c = a + s_b + s_c$. Äquivalente Umformung und analoge Anwendung auf alle Seiten ergibt das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcll} b + c & = & s_b + s_c & \text{(I)} \\ a \quad + c & = & s_a \quad + s_c & \text{(II)} \\ a + b \quad & = & s_a + s_b & \text{(III)} \end{array}$$

Umformung (I) + (II) − (III) (eigentlich kann man Gleichungen nicht addieren, aber jeder weiß was gemeint ist ;-)) führt zur notwendigen Bedingung $2c = 2s_c$, zusammen mit analoger Rechnung mit den anderen Variablen zu $a = s_a$, $b = s_c$, $c = s_c$. Hieraus folgt unmittelbar, dass alle Seitenflächen kongruent sind.

Insbesondere sind in den Dreiecken BCD und ACD die Seitenhalbierenden AM_{CD} und BM_{CD} gleich lang. Hieraus folgt, dass das Dreieck $AM_{CD}B$ gleichschenklig mit Basis AB ist, d.h. im Dreieck $AM_{CD}B$ ist die Strecke $M_{AB}M_{CD}$ nicht nur Seitenhalbierende, sondern auch Höhe, steht also senkrecht auf AB. Also führt die Drehung um die Achse $M_{AB}M_{CD}$ um 180° den Punkt A in den Punkt B über und umgekehrt. Analoge Betrachtung im Dreieck $CM_{AB}D$ zeigen, dass dabei auch die Punkte C und D ineinander überführt werden, d.h. $M_{AB}M_{CD}$ ist zweizählige Symmetrieachse. Entsprechende Überlegungen mit den beiden anderen Verbindungsgeraden der Mittelpunkte gegenüber liegender Kanten führen zum gleichen Ergebnis. Das war zu beweisen.

Aufgabe 4: Luna und Marie spielen folgendes Spiel:

An der Tafel steht eine Zahl. Wer am Zug ist, addiert zu der Zahl an der Tafel einen ihrer Teiler, aber nicht die Zahl selbst, und ersetzt die Zahl an der Tafel durch die so erhaltene Summe. Wer zuerst eine Zahl an die Tafel schreiben muss, die größer als 2026 ist, verliert das Spiel.

Am Anfang steht die Zahl 2 an der Tafel, Luna beginnt. Wer kann den Gewinn erzwingen.

Ergebnis: Luna kann immer den Gewinn erzwingen.

Bezeichnungen: Eine Zahl n heiße *Verlustzahl*, wenn folgende Bedingung erfüllt ist: Eine Spielerin, dia am Zug ist und an der Tafel die Zahl n vorfindet, kann nur so ziehen, dass ihre Gegnerin bei intelligentem Spiel gewinnt. Analog heiße n *Gewinnzahl*, wenn eine Spielerin den Gewinn erzwingen kann, wenn sie bei ihrem Zug die Zahl n an der Tafel steht.

1. Beweis: (Konkrete Bestimmung aller Gewinn− und Verlustzahlen): Da bei jedem Zug die Zahl an der Tafel um mindestens 1 größer wird, endet das Spiel nach endlich vielen Zügen und es steht auch immer ein Gewinner bzw. Verlierer fest.

Eine Zahl an der Tafel nennen wir Verlustzahl, wenn die Spielerin am Zug nur so ziehen kann, dass sie verliert oder eine Gewinnzahl an die Tafel schreiben muss. Entsprechend heiße eine Zahl an der Tafel Gewinnzahl, wenn die Spielerin am Zug stets so ziehen kann, dass ihre Gegnerin eine Verlustzahl an der Tafel vorfindet.

Da mit jedem Zug die Zahl an der Tafel größer wird, können wir von jeder Zahl bestimmen, ob sie Verlust− bzw. Gewinnzahl ist, wenn wir die Zahlen fortlaufend in absteigender Reihenfolge, beginnend bei 2026, betrachten. Da beide Spielerinnen bei jeder Zahl an der Tafel die gleichen Zugmöglichkeiten haben, kann dies unabhängig von der Frage geschehen, welche der beiden Spielerinnen gerade am Zug ist.

2026 ist Verlustzahl, weil die Spielerin am Zug eine Zahl an die Tafel schreiben muss, die größer als 2026 ist..

2025 und 2024 sind Gewinnzahlen, denn man kann durch Addition von 1 (diese Zahl ist Teiler jeder Zahl) zu 2025 bzw. Addition von 2 (dies ist Teiler jeder geraden Zahl) zu 2024 erreichen, dass die Gegnerin die Verlustzahl 2026 an der Tafel vorfindet.

2023 ist eine Verlustzahl: Sie ist ungerade, besitzt also nur ungerade Teiler. Die Spielerin am Zug muss also zwei ungerade Zahlen addieren und kann nur eine gerade Zahl an die Tafel schreiben, die zudem größer als 2023 ist. Möchte die Spielerin am Zug gewinnen, muss sie für ihre Gegnerin eine gerade Verlustzahl an die Tafel schreiben, die größer als 2023 ist, aber nicht größer als 2026. Einzig Möglichkeit wäre 2026, aber dazu müsste 3 Teiler von 2023 sein. So kann sie nur die Gewinnzahl 2024 schreiben und muss der Gegnerin den Gewinn ermöglichen.

2022 ist wiederum Gewinnzahl, denn die Spielerin am Zug kann 1 addieren und so erreichen, dass ihre Gegnerin an der Tafel die Verlustzahl 2023 vorfindet.

2021 ist wiederum Verlustzahl, denn sie ist ungerade und mit der gleichen Argumentation wie bei 2023 schließen wir, dass 2021 Verlustzahl ist, es ist nämlich 5 kein Teiler von 2021.

2020 ist wiederum Gewinnzahl, denn die Addition von 1 führt zur Verlustzahl 2021.

Bei jeder betrachteten Zahl konnten wir feststellen: Jede größere Zahl ist entweder Gewinnzahl oder Verlustzahl; Gewinnzahlen sind alle größeren geraden Zahlen mit Ausnahme von 2026, Verlustzahlen sind 2026 und alle größeren ungeraden Zahlen mit Ausnahme von 2025.

Dieses Muster setzt sich fort für alle geraden und ungeraden Zahlen, bis wir auf eine ungerade Zahl u stoßen, die einen Teiler $t < u$ hat, sodass $u + t = 2026$. Eine solche Zahl u gibt es aber nicht: Wenn die Zahl u den Teiler t hat, dann ist $u = r \cdot t$ für eine geeignete positive ganze Zahl r, d.h. $2026 = u + t = (r + 1)\cdot t$, d.h. auch 2026 hat den Teiler t. Aber es ist $2026 = 2 \cdot 1013$ und 1013 ist Primzahl, hat also keine weiteren Teiler außer 1 und 1013. Damit ist $2026 = 1013 + 1013$ die einzige

Darstellung von 2026 als Summe zweier Zahlen, bei der eine der beiden Zahlen Teiler der anderen ist. Nach den Regeln des Spieles darf diese Summe aber nicht gebildet werden. Damit sind alle geraden positiven ganzen Zahlen und auch 2025 Gewinnzahlen, insbesondere die Startzahl 2.

Damit kann die Startspielerin Luna den Gewinn erzwingen.

2. Beweis (Angabe einer konkreten Strategie): Folgende Strategie führt Luna zum Gewinn:

> Wenn die Zahl 2024 an der Tafel steht, addiere 2, wenn die Zahl 2025 oder eine Zahl, die kleiner ist als 2024, an der Tafel steht, addiere 1.

Wir zeigen, dass diese Strategie durchführbar ist: Die Zahl 1 ist Teiler jeder Zahl, kann also immer addiert werden; und 2 ist Teiler von 2024, kann also zu 2024 addiert werden.

Die Strategie führt zum Gewinn: Wenn Luna an der Tafel eine gerade Zahl vorfindet − dies ist auch beim ersten Zug der Fall − kann sie stets die Zahl 1 addieren. Damit steht Marie vor einer ungeraden Zahl. Da ungerade Zahlen nur ungerade Teiler haben, muss Maria zwei ungerade Zahlen addieren, also eine gerade Zahl an die Tafel schreiben. Induktiv schließen wir, dass Luna stets ungerade Zahlen an die Tafel schreiben kann und Marie stets gerade Zahlen schreiben muss.

Die Zahlen, die Luna an die Tafel schreibt, ist also entweder ungerade und kleiner als 2024 oder 2026, im letzten Fall hat sie offensichtlich gewonnen. Insbesondere schreibt sie nicht 2025.

Diese gerade Zahl, die Marie schreiben muss, kann nicht 2026 sein: Wenn Marie eine ungerade Zahl $u < 2024$ mit einem Teiler t mit $r \cdot t = u$ vorgefunden hat, so ist t ebenfalls ungerade und die Zahl $t + u$ ist gerade und hat ebenfalls den Teiler t. Einzige ungerade Teiler von 2026, die nicht 2026 selbst sind, sind 1 und 1013. Aus $t + u = 2026$ folgt $t = 1$ oder $t = 1013$. Falls $t = 1$, erhalten wir den Widerspruch, dass Luna an der Tafel die Zahl 2025 geschrieben hat. Aber auch $t = 1013$ führt zum Widerspruch, dass Marie zu 1013 die Zahl selbst addiert hat, das ist gegen die Spielregeln.

Variante für eine beschleunigte Strategie:

> Wenn 2024 oder 2025 an der Tafel steht, addiere 2 bzw. 1. Sonst addiere den größten ungeraden Teiler der Zahl an der Tafel, für den die Summe noch kleiner ist als 2024.

3. Beweis ("Strategieklau" ohne konkrete Formulierung einer Strategie): Über die Aufgabenstellung hinaus wird gezeigt, dass Luna den Gewinn erzwingen kann, wenn man in der Aufgabenstellung die Zahl 2026 durch eine Zahl $Z \geq 6$ ersetzt.

Aus dem 1. Beweis verwenden wir die Erkenntnis, dass das Spiel nach endlich vielen Zügen endet und dass man von jeder Zahl n mit $2 \leq n \leq Z$ bestimmen kann, ob sie Verlustzahl oder Gewinnzahl ist. Wir verzichten auf ein konkrete Bestimmung, und stellen nur fest, dass in den ersten beiden Zügen jeweils 1 addiert werden muss, weil 2 und 3 Primzahlen sind, also nur den Teiler 1 haben, der kleiner als die Zahl selbst ist. Luna startet also mit der Zahl 4. Es gibt nur zwei Möglichkeiten: 6 ist Gewinnzahl oder 6 ist Verlustzahl. Wenn 6 Verlustzahl ist, addiert Luna zur Zahl 4 den Teiler 2 und schreibt für Marie die Verlustzahl 6 an die Tafel; und falls 6 Gewinnzahl ist, addiert Luna die Zahl 1, damit findet Marie die Zahl 5 vor und kann nach den Regeln nur die Zahl 1 addieren, muss also für Luna die Gewinnzahl 6 an die Tafel schreiben.