

Aufgaben und Lösungen

2. Runde 2026

Vorläufige Fassung für die Homepage

» **KORREKTURKOMMISSION | KARL FEGERT**

» **BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK**

Zanderstr. 7, 53177 Bonn | Postfach 20 02 01, 53132 Bonn | Tel.: (02 28) 9 59 15-20, Fax: (02 28) 9 59 15-29
info@bundeswettbewerb-mathematik.de, www.bundeswettbewerb-mathematik.de

September 2026

Gefördert vom:



Bundesministerium
für Bildung, Familie, Senioren,
Frauen und Jugend



STIFTERVERBAND



KULTUSMINISTER
KONFERENZ



Aufgabe 1: Zeige: Im Stellenwertsystem mit Basis 3 endet die Ziffernfolge der Darstellung der Zahl 2026^{2026} auf die Ziffernfolge der Darstellung der Zahl 2026.

1. Beweis: Es ist $2025 = 3^4 \cdot 25 = 3^4 \cdot (2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 1) = 2210000|_3$,

und somit $2026 = 2025 + 1 = 2210001|_3$

Weiter schließen wir, dass $2025^2 = 3^8 \cdot 25^2$ bei Darstellung im 3er-System 8 Endnullen hat. Also gilt

$$2025 \cdot 2026 = 2025^2 + 2025 = \dots 00000000|_3 + 2210000|_3 = \dots 02210000|_3.$$

$$\begin{aligned} \text{Nun ist} \quad 2026^{2026} &= (1 + 2025)^{2026} = \sum_{j=0}^{2026} \binom{2026}{j} 2025^j = \\ &= 1 + \binom{2026}{1} \cdot 2025 + 2025^2 \cdot \sum_{j=2}^{2026} \binom{2026}{j} \cdot 2025^{j-2} \\ &= 1 + (2025 + 1) \cdot 2025 + 2025^2 \cdot \sum_{j=2}^{2026} \binom{2026}{j} \cdot 2025^{j-2} \\ &= 1 + 2025 + 2025^2 \left(1 + \sum_{j=2}^{2026} \binom{2026}{j} \cdot 2025^{j-2} \right) \end{aligned}$$

Damit ist 2026^{2026} die Summe aus der im 3er-System 7-stelligen Zahl $2026 = 2210001|_3$ und einem Produkt aus ganzen Zahlen, bei dem der erste Faktor 2025^2 bei der Darstellung im 3er-System 8 Endnullen hat, d.h. die Darstellung von 2026^{2026} endet auf den Ziffern von 2026.

2. Beweis: Über die Aufgabenstellung hinaus zeigen wir:

Im Stellenwertsystem mit Basis 3 endet für $n = 1, 2, 3, \dots$ die Ziffernfolge der Darstellung der Zahl 2026^n auf die Ziffernfolge der Darstellung der Zahl 2026 genau dann, wenn $n \equiv 1 \pmod{3^3}$, also wenn $n = 27k + 1$ für geeignetes $k = 0, 1, 2, \dots$.

Mit $2026 = 3^4 \cdot 5^2 + 1 = 3^3 \cdot 75 + 1 \equiv 1 \pmod{3^3}$, folgt dann die Aussage der Aufgabe.

Es sei $z = 2026$, also $z - 1 = 2025 = 5^2 \cdot 3^4 < 27 \cdot 81 = 3^7$, also $z \leq 3^7$. Damit hat die Darstellung von z im Stellenwertsystem zur Basis 3 höchstens 7 Stellen. Es genügt dann zu zeigen, dass die Darstellung von $z^n - z = z(z^{n-1} - 1)$ genau dann mindestens 7 Endnullen hat, wenn $n = 27k + 1$ für ein $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

Zunächst bemerken wir, dass $z - 1 \equiv 0 \pmod{3^3}$, also $z \equiv 1 \pmod{3^3}$ und damit auch $z^i \equiv 1 \pmod{3^3}$ für alle

$$i = 0, 1, 2, \dots. \text{ Insbesondere gilt } \sum_{i=0}^{n-2} z^i \equiv \sum_{i=0}^{n-2} 1 \equiv n - 1 \equiv 0 \pmod{3^3} \Leftrightarrow n = 27k + 1.$$

$$\text{Dies verwenden wir in der Umformung } z(z^{n-1} - 1) = z \cdot \frac{z-1}{z-1} \cdot (z^{n-1} - 1) = z \cdot (z-1) \cdot \sum_{i=0}^{n-2} z^i.$$

In diesem Produkt ist der Faktor z ganzzahlig und nicht Vielfaches von 3, der Faktor $(z-1)$ ist Vielfaches von 3^4 , aber nicht von 3^5 , und der Faktor $\sum_{i=0}^{n-2} z^i$ ist Vielfaches von 3^3 genau dann, wenn $n = 27k + 1$.

Insgesamt ist somit $z \cdot (z^{n-1} - 1)$ Vielfaches von $3^4 \cdot 3^3 = 3^7$ genau dann, wenn $n = 27k + 1$. Das war zu zeigen.



Variante (benützt ebenfalls $z \equiv 1 \Rightarrow z^i \equiv 1$): Durch einfache Rechnung (Probe durch Multiplikation der rechten Seite mit dem Nenner der linken Seite) bestätigt man für alle reellen x und natürliche n , dass

$\frac{(x^n)^3 - 1}{x^n - 1} = (x^n)^2 + (x^n) + 1$ und $\frac{(x^n)^5 - 1}{x^n - 1} = (x^n)^4 + (x^n)^3 + (x^n)^2 + (x^n) + 1$. Ist zusätzlich x ganzzahlig, dann ist die rechte Seite und damit auch die linke ganzzahlig. Falls zusätzlich $x \equiv 1 \pmod{3}$, sind auch alle $x^i \equiv 1 \pmod{3}$ für alle $i = 0, 1, 2, \dots$; und somit auch $\frac{(x^n)^3 - 1}{x^n - 1} = (x^n)^2 + (x^n) + 1 \equiv 1 + 1 + 1 \equiv 0 \pmod{3}$ (*).

Also sind für $z = 2026 \equiv 1 \pmod{3}$ im Produkt (man beachte, dass $z^{2025} = (z^{675})^3$ usw.)

$$z(z^{2025} - 1) = z \cdot \frac{z^{2025} - 1}{z^{675} - 1} \cdot \frac{z^{675} - 1}{z^{225} - 1} \cdot \frac{z^{225} - 1}{z^{75} - 1} \cdot \frac{z^{75} - 1}{z^{25} - 1} \cdot \frac{z^{25} - 1}{z^5 - 1} \cdot \frac{z^5 - 1}{z - 1} \cdot (z - 1)$$

alle Brüche ganzzahlig, und nach (*) die ersten vier Brüche durch 3 teilbar. Zusätzlich ist der letzte Faktor $(z - 1) = 2025 = 3^4 \cdot 5^2$ durch 3^4 teilbar. Damit ist $z(z^{2025} - 1) = 2026^{2026} - 2026$ durch 3^8 teilbar, d.h. die Darstellung dieser Zahl im 3er-System endet auf acht Nullen. Da $2026 = 3^4 \cdot 5^2 + 1 < 3^4 \cdot 27 = 3^7$, hat die Darstellung von 2026 im 3er-System höchstens 7 Stellen, d.h. die letzten 7 Ziffern von $2026^{2026} = (2026^{2026} - 2026) + 2026$ sind genau die Ziffern von 2026. Das war zu zeigen.

3. Beweis (LTE-Lemma)¹⁾: Für eine Primzahl p und eine ganze Zahl x sei $v_p(x)$ der Exponent von p in der Primfaktorzerlegung von x . Dann gilt (u.a.):

HS: Seien x, y ganze Zahlen und p eine ungerade Primzahl, die weder x noch y teilt, aber $x - y$ teilt. Dann gilt für alle natürlichen Zahlen n : $v_p(x^n - y^n) = v_p(x - y) + v_p(n)$

Es ist $2026^{2026} - 2026 = 2026(2026^{2025} - 1)$. Da die Primzahl 3 kein Teiler von 2026 ist, tauchen in der Primfaktorzerlegung von $2026^{2026} - 2026 = 2026(2026^{2025} - 1)$ alle Faktoren 3 im Term $2026^{2025} - 1$ auf. Offensichtlich erfüllen $p = 3$, $x = 2026$ und $y = 1$ und die Voraussetzungen des HS, also gilt mit $n = 2025$

$$v_3(2026^{2026} - 2026) = v_3(2026^{2025} - 1) = v_3(2026 - 1) + v_3(2025) = v_3(3^4 \cdot 5^2) + v_3(3^4 \cdot 5^2) = 8.$$

Die Zahl $2026^{2026} - 2026$ ist also durch 3^8 teilbar, d.h. ihre Darstellung im 3er-System hat 8 Endnullen. Da $2026 = 2025 + 1 = 3^4 \cdot 5^2 + 1 < 3^4 \cdot 3^4 = 3^8$, hat die Darstellung von 2026 im 3-System höchstens 7 Stellen. Damit ist die Zahl $2026^{2026} = (2026^{2026} - 2026) + 2026$ die Summe einer Zahl, die bei Darstellung im 3er-System 8 Endnullen hat, und der Zahl 2026, die höchstens 7 Stellen hat, d.h. die beiden Zahlen enden auf die gleichen Ziffern. Das war zu zeigen.

¹⁾ Quelle mit Beweis: https://en.wikipedia.org/wiki/Lifting-the-exponent_lemma

Bemerkungen: Für $n = 28$ erhält man

$$v_3(2026^{28} - 2026) = v_3(2026^{27} - 1) = v_3(2025) + v_3(27) = v_3(3^4 \cdot 5^2) + v_3(3^3) = 7,$$

d.h. $2026^{28} - 2026$ endet auf 7 Endnullen und 2026^{28} mit der gleichen Ziffernfolge wie 2026 und 2026^{27} auf die Folge mit sieben Ziffern 00...01. Damit ist die Folge der letzten 7 Ziffern von 2026^n periodisch mit Länge 27, und da $2026 = 75 \cdot 27 + 1$, gilt die Aussage auch für 2026^{2026} .

Mit genügender Geduld könnte man den Beweis führen mit Ganzzahlarithmetik von Zahlen $\leq 10^7$, indem man die Restklassen von $2026^n \pmod{3^7}$ für $n = 1, 2, 3, \dots$ 2026 "von Hand" berechnet. Einen solchen Beweis kann man erheblich abkürzen, wenn man (z.B. mit TR) erkannt hat, dass $2026^{27} \equiv 1 \pmod{3^7}$ ist: Dann muss man zum Nachweis nur $\pmod{3^7}$ die Rechnungen $(2026^3) \equiv (-161)^3 \equiv -485$, $2026^9 \equiv (-485)^3 \equiv 730$, $2026^{27} \equiv 730^3 \equiv 1$ vorführen.



Aufgabe 2: Es seien k , m und n positive ganze Zahlen.

Zeige: Zu einer Menge mit n Elementen lassen sich genau dann m Teilmengen finden, von denen irgend zwei verschiedene Teilmengen weniger als k gemeinsame Elemente haben und unter denen keine zwei Teilmengen gleich sind, wenn gilt $m \leq \sum_{i=0}^k \binom{n}{i}$.

1. Beweis: Die gegebene Menge mit n Elementen bezeichnen wir mit N , ihre Elemente bezeichnen wir $e_1, e_2, \dots, e_n$. Wir sagen "Das Element e_i ist kleiner als das Element e_j ", wenn $i < j$.

Teil 1: Wenn $m \leq \sum_{i=0}^k \binom{n}{i}$, ist das möglich: Wir wählen alle paarweise verschiedene Teilmengen mit höchstens k Elementen, das sind $\sum_{i=0}^k \binom{n}{i}$ solche Teilmengen. Da keine zwei dieser Teilmengen gleich sind, haben irgend zwei dieser Teilmengen höchstens $k-1$, also weniger als k gemeinsame Elemente.

Teil 2: Wenn $m > \sum_{i=0}^k \binom{n}{i}$, ist das nicht möglich: Es ist $m \geq \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} + 1 = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} + \binom{n}{k} + 1$. Wählt man also m paarweise verschiedene Teilmengen von N , so gibt es darunter höchstens $\sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i}$ Teilmengen mit $k-1$ oder weniger Elementen, und nach Schubfachprinzip also mindestens $\binom{n}{k} + 1$ Teilmengen mit mindestens k Elementen. Aus jeder solchen Teilmenge T von N entfernen wir die größten $|T| - k$ Elemente, d.h. wir bilden eine Teilmenge T' von T mit genau k Elementen. Damit ist T' auch Teilmenge von N mit genau k Elementen. Es gibt genau $\binom{n}{k}$ solche Teilmengen, und nach Schubfachprinzip unter den $\binom{n}{k} + 1$ gewählten Teilmengen T also mindestens zwei Teilmengen T_1 und T_2 , für die $T_1' = T_2'$. Dann haben T_1 und T_2 mindestens die k Elemente von T_1' und T_2' gemeinsam, also nicht weniger als k gemeinsame Elemente. Das war zu zeigen.



Aufgabe 3: Gegeben sind ein gleichseitiges Dreieck ABC mit Flächeninhalt 1 und eine reelle Zahl $0 < q < 1$.

Ein Punkt P des Dreiecks ABC wird grün gefärbt, wenn jedes Dreieck mit Flächeninhalt q , das Teil des Dreiecks ABC ist, den Punkt P enthält.

Bestimme den Flächeninhalt des grün gefärbten Teils des Dreiecks ABC in Abhängigkeit von q .

Hinweis: Zu jedem Dreieck gehören die Punkte seines Randes und alle inneren Punkte.

Bezeichnungen: Mit $|XYZ|$ bezeichnen wir den Flächeninhalt des Dreiecks XYZ , mit $|XY|$ die Länge der Strecke XY . Wir werden gelegentlich verkürzen von "ein Dreieck, das Teil des Dreiecks ABC ist, enthält den Punkt P " zu "ein Teildreieck von ABC bedeckt den Punkt P ".

Ergebnis: Den grün gefärbten Teil des Dreiecks nennen wir $G = G(q)$.

$$\text{Für } q \leq \frac{1}{2} \text{ ist } |G(q)| = 0; \text{ für } q > \frac{1}{2} \text{ ist } |G(q)| = \frac{2(2q-1)^2}{(2-q)(1+q)}.$$

1. Beweis: Die Längen der drei Seiten und die Länge der Höhe des Dreiecks ABC mit $|ABC| = 1$ seien mit a bzw. h bezeichnet, die Höhe mit h , die Mittelpunkte der Seiten AB , BC und CA mit M_{AB} , M_{BC} bzw. M_{CA} , der Schwerpunkt (gleichzeitig Schnittpunkt der Mittelsenkrechten) mit S . Es gilt:

$$1 = |ABC| = \frac{1}{2} \cdot ah = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \sin(60^\circ) = \frac{1}{4} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}, \text{ also } h = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot a, \text{ ferner } |AS| : |SM_{BC}| = 2 : 1.$$

(Eine konkrete Berechnung von a und h aus der Bedingung $|ABC| = 1$ benötigen wir nicht. Berechnet man in einem beliebigen gleichseitigen Dreieck den Flächeninhalt der grünen Punktmenge G , so ist das gesuchte Ergebnis $|G| / |ABC|$.)

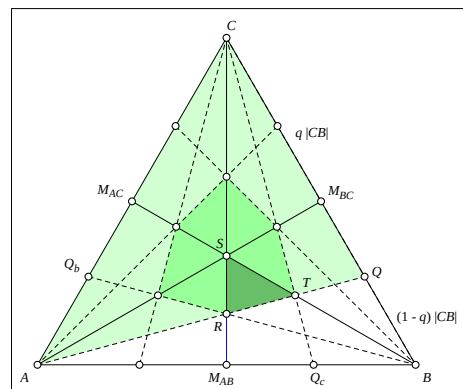
Aus der Formulierung der Aufgabe folgt sofort, dass ein Punkt von Dreieck ABC genau dann ungefärbt bleibt, wenn es mindestens ein Teildreieck von ABC mit Flächeninhalt q gibt, das diesen Punkt nicht enthält. Wir können uns also den Färbeprozess umgekehrt vorstellen: Am Anfang sind alle Punkte grün, wir legen der Reihe nach mögliche Teildreiecke mit Flächeninhalt q auf das Dreieck ABC und färben nach Auflegen jeden einzelnen Teildreiecks alle freibleibenden Punkte weiß, mit jedem weiteren Teildreieck wird die Menge der grünen Punkte kleiner oder sie bleibt gleich. Wenn man Teildreiecke geschickt wählt, erhält man schon mit endlich vielen Dreiecken die gesamte Menge der grünen Punkte.

Jede Kombination von Spiegelungen an einer der drei Mittelsenkrechten führt das Dreieck ABC in sich selbst über. Jeden Punkt P des Dreiecks ABC kann man damit auf einen Punkt P' des Dreiecks $M_{AB}BS$ abbilden. Bei einer solchen Abbildung wird ein Teildreieck, das diesen Punkt nicht bedeckt, auf ein Teildreieck abgebildet, das P' nicht bedeckt. Es genügt also, zunächst die Menge der grünen Punkte im Teildreieck $M_{AB}BS$ zu bestimmen, die Gesamtmenge der grünen Punkte erhält man durch Spiegelungen an den Mittelsenkrechten und der zu bestimmende Flächeninhalt ist das sechsfache der grünen Fläche im Dreieck $M_{AB}BS$.

Sei Q derjenige Punkt auf der Seite BC , für den $|CQ| = q \cdot |CB|$ gilt, dann gilt $|QB| = (1 - q) \cdot |CB|$. Im Vergleich zum Dreieck ABC mit Grundseite BC und Höhe AM_{BC} hat das Dreieck AQC die q -fache Grundseite und die gleiche Höhe, also den Flächeninhalt $q \cdot |ABC| = q$. Es enthält nur Punkte von ABC , aber nicht die Punkte des Dreiecks ABQ mit Ausnahme der Strecke AQ . Dieser Teil von ABC wird also weiß gefärbt.

Falls $q < \frac{1}{2}$, enthält das Dreieck $M_{AB}BS$ keinen grünen Punkt, der Flächeninhalt ist also 0.

Falls $q = \frac{1}{2}$ enthält das Dreieck $M_{AB}BS$ nur den Punkt S , der Flächeninhalt des grünen Teils ist also ebenfalls 0.



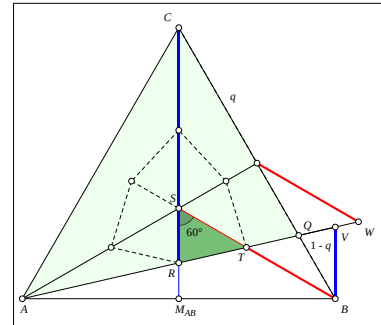


Im Weiteren sei $q > 1/2$. Das Dreieck AQC bedeckt nun Punkte des Dreiecks $M_{AB}BS$, nämlich die Punkte eines Dreiecks, das durch die Gerade AQ und die beiden Mittelsenkrechten auf AB und AC begrenzt wird. Eine Ecke ist S , die Schnittpunkte von AQ mit CM_{AB} und BM_{AC} nennen wir S bzw. T (vgl. Figur).

Wir beweisen weiter unten, dass es kein weiteres Teildreieck von ABC mit Flächeninhalt q gibt, das einen Punkt von Dreieck RST nicht enthält. Es werden also keine weiteren Punkte weiß gefärbt und es ist $|G(q)| = 6 \cdot |RST| = 6 \cdot \frac{1}{2} \sin(\angle RST) \cdot |SR| \cdot |ST|$.

Zur konkreten Berechnung von $|SR|$ und $|ST|$ ergänzen wir die Figur um den Schnittpunkt V der Parallelen durch B zur Mittelsenkrechten CM_{AB} . Dann bildet die zentrische Streckung $(A; 2)$ die Strecke RM_{AB} auf die Strecke VB ab, und die zentrische Streckung $(Q; -q/(1-q))$ bildet die Strecke VB auf die Strecke RC ab. Es gilt also

$$\begin{aligned} |SR| + \frac{2}{3}h &= \frac{q}{1-q} \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{3}h - |SR|\right) \\ \Leftrightarrow |SR| \cdot (1 + \frac{2q}{1-q}) &= h \cdot (\frac{2q}{3(1-q)} - \frac{2}{3}) \\ \Leftrightarrow |SR| \cdot \frac{1-q+2q}{1-q} &= \frac{2q-2(1-q)}{3(1-q)} \cdot h \\ \Leftrightarrow |SR| \cdot \frac{1+q}{1-q} &= \frac{2(2q-1)}{3(1-q)} \cdot h \\ \Leftrightarrow |SR| &= \frac{2(2q-1)}{3(1+q)} \cdot h. \end{aligned}$$



Weiter ergänzen wir die Figur um den Schnittpunkt W der Parallelen zu BT durch M_{BC} mit der Geraden AQ . Da $q > 1/2$, gilt $|M_{BC}Q| = (q - 1/2) \cdot |CB|$. Dann bildet die zentrische Streckung $(A; 3/2)$ die Strecke ST auf die Strecke $M_{BC}W$ ab, und die zentrische Streckung $(Q; -(1-q)/(q-0.5))$ die Strecke $M_{BC}W$ auf die Strecke TB mit $|TB| = \frac{2}{3}h - |ST|$. Es gilt also

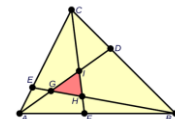
$$\begin{aligned} \frac{2}{3}h - |ST| &= \frac{1-q}{q-\frac{1}{2}} \cdot \frac{3}{2} \cdot |ST| \Leftrightarrow \frac{2}{3}h = \left(1 + \frac{1-q}{q-\frac{1}{2}} \cdot \frac{3}{2}\right) \cdot |ST| \Leftrightarrow \frac{2}{3}h = \frac{2q-1+3-3q}{2q-1} \cdot |ST| \\ \Leftrightarrow \frac{2}{3}h &= \frac{2-q}{2q-1} \cdot |ST| \Leftrightarrow |ST| = \frac{2}{3} \cdot \frac{2q-1}{2-q} \cdot h. \end{aligned}$$

Nun haben die beiden Dreiecke ABC und SRT bei C bzw. S einen Innenwinkel von 60° , d.h. mit $\frac{1}{2} \cdot \sin(60^\circ) \cdot a^2 = 1$ und $h_a = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$ erhalten wir wie behauptet

$$6 \cdot |SRT| = 6 \cdot \frac{\frac{1}{2} \sin(60^\circ) |SR| \cdot |ST|}{\frac{1}{2} \sin(60^\circ) \cdot a \cdot a} = 6 \cdot \frac{2(2q-1)}{3(1+q)} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2(2q-1)}{3(2-q)} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2(2q-1)^2}{(1+q)(2-q)}.$$

Variante: In der Figur gilt nach Satz von Routh (Coxeter spricht von Routh–Steiner):

Ist $\frac{AF}{BF} = r$, $\frac{BD}{CD} = s$, $\frac{CE}{AE} = t$, so gilt $A_{GHI} = \frac{(rst - 1)^2}{(st + s + 1)(rt + t + 1)(rs + r + 1)} A_{ABC}$.



Mit $r = t = 1$, $s = \frac{(1-q)}{q}$ erhält man das Ergebnis.

Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Routh



Es bleibt zu zeigen, dass es kein Teildreieck mit Flächeninhalt $q \cdot |ABC|$ gibt, das einen Punkt von G nicht enthält oder äquivalent: Jedes Teildreieck, das einen Punkt von G nicht enthält, hat einen Flächeninhalt, der kleiner als $q \cdot |ABC|$ ist.

Wir benötigen zwei Hilfssätze:

HS 1: Sei N ein Punkt auf der Seitenhalbierenden CM_{AB} des Dreiecks ABC . Eine Gerade t durch N schneidet die Seiten AC und BC in den Punkten L bzw. K . Nun wird die Gerade t um den Punkt N gedreht, wobei die Punkte L und K sich auf den Seiten AC bzw. BC mitbewegen. Dann ist

- $|KLC|$ maximal, wenn K auf B oder L auf A liegt und
- $|BLK|$ maximal, wenn L auf A liegt.

Beweis (vektoriell) zu a): Sei $\mathbf{C} = \mathbf{0}$, $\mathbf{L} = \lambda \mathbf{a}$, $\mathbf{K} = \kappa \mathbf{b}$, $\mathbf{N} = \sigma \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$. Dann gilt $\sigma \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{N} = \lambda \mathbf{a} + \gamma(-\lambda \mathbf{a} + \kappa \mathbf{b})$ oder

$$\mathbf{0} = \mathbf{a}(\lambda - \gamma\lambda - \frac{1}{2}\sigma) + \mathbf{b}(\gamma\kappa - \frac{1}{2}\sigma).$$

Da $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ linear unabhängig, führt das zum Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \lambda - \gamma\lambda - \frac{1}{2}\sigma &= 0 & | \cdot \kappa \\ \kappa\gamma - \frac{1}{2}\sigma &= 0 & | \cdot \lambda \end{aligned}$$

Multiplikation der ersten Gleichung mit κ und der zweiten mit λ und anschließendes Addieren führt zu

$$\lambda\kappa = \frac{1}{2}\sigma(\lambda + \kappa) \text{ und weiter zu } \sigma = \frac{2\lambda\kappa}{\lambda + \kappa}.$$

Wenn $|ABC| = 1$, ist $\lambda\kappa$ der Flächeninhalt F von Dreieck LKC , es ist also $\lambda = F/\kappa$. Das führt zu

$$\sigma = \frac{2F}{\frac{F}{\kappa} + \kappa} = \frac{2\sqrt{F}}{\frac{\sqrt{F}}{\kappa} + \frac{\kappa}{\sqrt{F}}}.$$

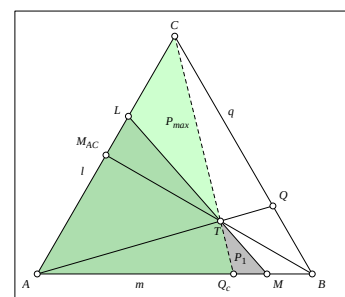
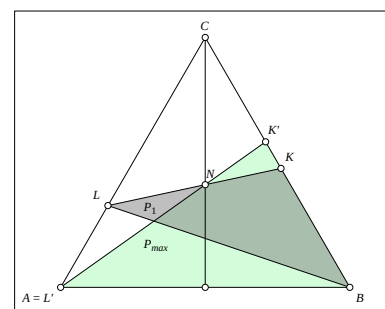
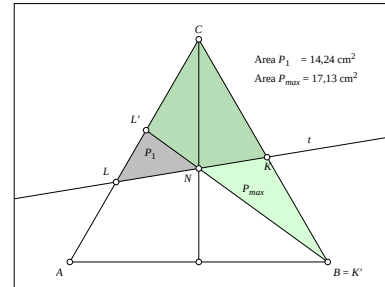
Im Nenner steht die Summe einer positiven Zahl und ihrem Kehrwert, bekanntlich hat diese Summe genau dann den Wert 2, wenn die beiden Zahlen 1 sind; und der Wert ist streng monoton steigend mit der größeren Zahl. Damit ist σ maximal für $\kappa = \lambda = \sqrt{F}$ und minimal für $\kappa = 1$ (und aus Symmetriegründen auch für $\lambda = 1$), d.h. für $L = A$ oder $K = B$. Im Umkehrschluss ist bei festem σ der Wert von F für $\kappa = 1$ oder $\lambda = 1$ maximal.

Beweis zu b): Es ist $BK' > BK$ und $h_A > h_L$.

HS 2: Sei T ein Punkt auf BM_{AC} und Q der Schnittpunkt von AT mit BC , Q_C das Bild von Q bei Spiegelung an BM_{AC} . Die Gerade t durch T schneidet die Seite AB in M und die Seite AC in L . Die Gerade t wird aus der Lage $L = BM_{AC}$ und $M = B$ so um T gedreht, dass L von BM_{AC} auf AC nach C wandert und M von B auf AB in Richtung A . Dann ist der Flächeninhalt des Dreiecks AML maximal, wenn $L = C$.

Beweis (mit Vektorrechnung): Sei $\mathbf{A} = \mathbf{0}$, $\mathbf{M} = \mu \mathbf{B}$, $\mathbf{L} = \lambda \mathbf{C}$, $\mathbf{T} = \frac{1}{2(2-q)}(q\mathbf{B} + (1-q)\mathbf{C}) = \frac{1}{2(2-q)}(q\mathbf{B}) + (1 - \frac{1}{2(2-q)})\mathbf{C}$; aus dieser doppelten Darstellung von $\mathbf{T}$ erkennt man sofort, dass T auf AQ und auf $Q_C C$ liegt.

Nun ist $\mathbf{L} = \lambda \mathbf{C} = \mu \mathbf{B} + \tau(-\mu \mathbf{B} + \frac{q}{2(2-q)}\mathbf{B} + \frac{(1-q)}{2(2-q)}\mathbf{C})$ für ein geeignetes τ , dies führt zu den Gleichungen $\mu - \tau(-\mu + \frac{q}{2(2-q)}) = 0$ und $\tau \cdot \frac{(1-q)}{2(2-q)} - \lambda = 0$. Multiplikation der ersten Gleichung mit $\frac{(1-q)}{2(2-q)}$ und der zweiten mit $(-\mu + \frac{q}{2(2-q)})$ mit Addition führt zu $\frac{q}{2-q} \cdot \lambda - \frac{1-q}{2-q} \cdot \mu = \lambda\mu = |MAL|$. Wenn μ von 1 zu q abnimmt, wächst λ von $\frac{1}{2}$ zu 1 streng monoton (vgl. Figur), und damit wächst $|MAL| = \lambda \cdot \mu$ streng monoton von $\frac{1}{2}$ zu q . Das war zu zeigen.





Nun zum eigentlichen Beweis: Wir konstruieren zu jedem Teildreieck Δ von ABC , das einen Punkt N des Dreiecks RST nicht bedeckt, ein Teildreieck Δ' von ABC mit $|\Delta| < |\Delta'| \leq q$.

Sei Δ ein Teildreieck von ABC Dreieck und N ein Punkt von ABC , der kein Punkt von Δ ist. Zunächst verlangen wir nicht, dass N ein Punkt von Dreieck RST ist. Wir rotieren eine Gerade durch N um N und betrachten die Lagen derjenigen Geraden, die keinen Punkt von Δ enthalten. Da Δ konvex und beschränkt ist, existieren solche Geraden. Mindestens eine dieser Geraden (wir nennen sie t) ist parallel zu einer Seite von Δ (die zugehörigen Ecken dieser Seite nennen wir D und E , die dritte Ecke sei F) und hat zusätzlich die Eigenschaft, dass die Gerade DE den Punkt F und die Gerade t trennt.

Da N Punkt von ABC ist, schneidet t zwei Seiten von ABC in Punkten, die wir K , L oder M nennen, je nachdem ob sie auf der Seite BC , CA oder AB liegen. Da wir hier noch nicht verlangen, dass N ein Punkt des Dreiecks RST ist, können wir o.B.d.A annehmen, dass die Gerade t die Seite BC in K und die Seite AC in L schneidet. Die Gerade t teilt nun das Dreieck ABC in ein Dreieck LKC und ein Teilviereck $ABKL$ auf, das im Fall $K = A$ oder $L = B$ zu einem Dreieck entartet. Das Dreieck $\Delta = DEF$ liegt nun vollständig im Dreieck LKC oder im Viereck $ABKL$, wobei DEF keinen Punkt mit t gemeinsam hat.

Fall 1: $\Delta = DEF$ liegt vollständig in Teildreieck LKC :

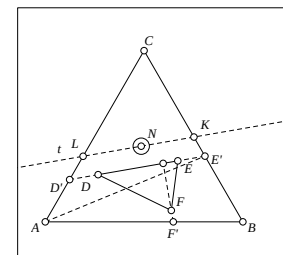
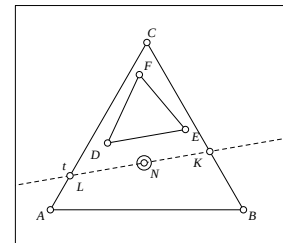
Dann ist $|\Delta| < |LKC|$, denn Δ liegt vollständig in LKC , wobei es ein Teilflächenstück mit positivem Inhalt gibt, das N , aber keinen Punkt von Dreieck DEF enthält.

Fall 2: $\Delta = DEF$ liegt vollständig im Viereck $ABKL$:

Unter der Zusatzannahme, dass $|KB| \geq |AL|$, schneidet die Gerade DE die Seite BC in einem Punkt E' . Falls DE die Seite AC in D' schneidet, ist $D'E'F$ ein größeres Dreieck, das vollständig in $ABKL$ liegt, und falls DE nicht die Seite AC , sondern die Seite AB schneidet, wählen wir $D' = A$ und $D'E'F$ ist ein größeres Dreieck, das vollständig in $ABKL$ liegt. Schließlich sei F' auf AB der Schnittpunkt des Lotes von F auf DE mit AB . dann gilt also

$$|DEF| \leq |D'E'F| \leq |D'E'F'| \leq |D'E'B| \leq |AE'B| < |ABK|.$$

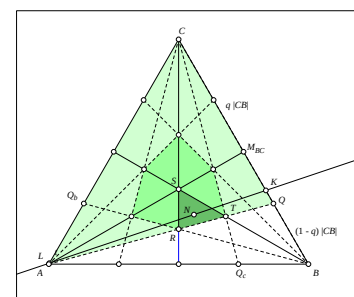
und falls $|KB| \leq |AL|$, gilt entsprechend $|\Delta| < |ABL|$.



Jedes Teildreieck von ABC , das vollständig auf der gleichen Seite der Geraden t liegt, ist also höchstens so groß wie das größte der Dreiecke LKC , ABL oder ABK . (Die Dreiecke AKL , BLK haben sicher einen kleineren Flächeninhalt als ABL und ABK .) Entsprechendes gilt, wenn t die Seiten BC und AB oder AB und AC schneidet. Wir nennen diese Dreiecke *Maximaldreiecke*.

Nun verlangen wir zusätzlich, dass N ein Punkt des Dreiecks RST ist. Da hier die Lage von N eingeschränkt ist, müssen wir für alle drei Möglichkeiten für die Lage der drei Punkte K , L , M untersuchen und zeigen, dass das jeweils größte Maximaldreieck einen Flächeninhalt hat, der kleiner oder gleich q ist.

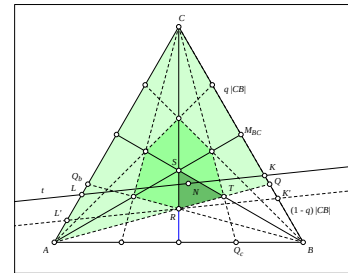
Fall 1: Einer der Punkte K , L , M liegt auf einer der Ecke A , B , C : Liegt z. B. L auf A , so liegt K auf der Strecke $M_{BC}Q$, denn t geht durch einen Punkt von Dreieck RST . Dann liegt das Teildreieck LKC vollständig in Teildreieck AQC , es gilt also $|LKC| < |AQC| \leq q$ und das Teilviereck $ABKL$ ist zum Teildreieck ABL geworden mit $|ABL| \leq \frac{1}{2} < q$. Damit ist auch $|\Delta| < q$, sowohl wenn Δ im Dreieck LKC als auch wenn Δ im Viereck $ABKL$ liegt. Analog schließen wir für die anderen Lagen, die K , L oder M einnehmen können; dabei müssen wir evtl. ein Bild von Q und dem Dreieck AQC bei Spiegelung an den Symmetrieachsen verwenden.





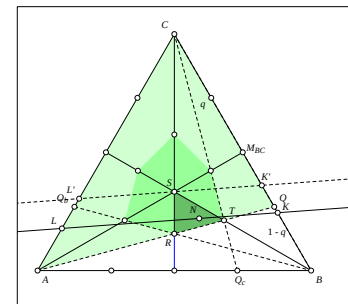
Fall 2: Keiner der Punkte K, L, M liegt auf t .

Fall 2.1.1.: Die Gerade t schneidet AC und BC in Punkten L bzw. K , Δ liegt im Innern von Dreieck LKC . Dann verschieben wir t parallel so – die Punkte K und L bewegen sich dabei auf den Strecken BC und AC zu Punkten K' und L' mit – in Richtung des Punktes R , bis L' auf A liegt oder K' auf B liegt oder t durch R geht. Dabei wird $|LKC|$ größer und enthält nach wie vor Δ , und wir werden zeigen, dass $|L'K'C|$ dabei nicht größer wird als q , also dass $\Delta < q$ gilt. Falls $K' = B$ oder $L' = A$, gehen wir vor wie im Fall 1. Falls aber t durch R geht, wenden wir HS 1 und drehen t um R bis $L' = A$, dabei nimmt $|L'K'C|$ weiter zu. Nun verläuft die Gerade t durch einen Punkt von Dreieck RST , d.h. der Punkt K' liegt auf der Strecke $M_{BC}Q$. Damit ist $L'K'C$ ein Teildreieck von AQC , es gilt also $|L'K'C| \leq |AQC|$.



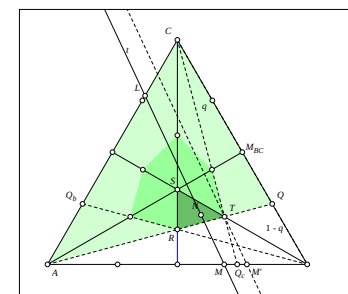
Fall 2.1.2: wie 2.1.1, aber Δ liegt im Viereck $ABKL$: Wir verschieben t parallel so, dass das Viereck $ABLK$ erweitert wird und Δ in diesem Viereck bleibt, in diesem Fall in den Punkt S . Dabei nähern sich die Punkte K' und L' der Ecke C , aber nicht weiter als M_{AC} bzw. M_{BC} . Damit gilt für die beiden möglichen Maximaldreiecke $|ABK| \leq |ABK'| \leq |ABM_{BC}| = 1/2 \leq q$ und analog

$$|ABL| \leq |ABM_{AC}| = 1/2 \leq q.$$



Fall 2.2.1: Die Gerade t schneidet die Strecken AB und BC in Punkten M bzw. K , A liegt im Innern von Dreieck LKC . Dann verschieben wir t in Richtung des Punktes S , bis $M = A$ oder $K = C$ (dann gehen wir wie im Fall 1 vor) oder bis t durch S geht. Nun drehen wir t um S , dabei wird nach HS 1 der Flächeninhalt größer, aber nicht größer als $\frac{1}{2}$.

Fall 2.2.2: Wie 2.2.1, aber Δ liegt im Innern von Viereck $AMKC$: Nun verschieben wir t parallel in Richtung T , dabei kann t die Strecken AB und BC nur dann gleichzeitig schneiden, wenn K nicht im Innern der Strecke QB liegt und M nicht im Innern der Strecke Q_cB , dabei ist Dreieck AQ_cC das Dreieck, das symmetrisch zu Dreieck AQC bzgl. der Mittelsenkrechten BM_{BC} liegt. Damit liegt das Dreieck $AK'C$ sicher in Dreieck AQC und wir schließen wie in 2.1.1 auf $|AK'C| \leq |AQC| = q$.



Fall 2.3.1: Die Gerade t schneidet die Strecken AC und AB in Punkten L bzw. M , Δ liegt im Innern von Dreieck MLA . Hier verschieben wir t parallel auf den Punkt T (sofern nicht vorher L oder M auf eine Ecke fällt). Dann können M und L nur dann beide gleichzeitig auf AB bzw. AC liegen, wenn M auf AB zwischen B und Q_c (dem Punkt auf AB , der symmetrisch zu Q bzgl. der Mittelsenkrechten M_{AB} liegt) liegt. Schiebt man M von B nach Q_a , so nimmt $|MLA|$ nach HS 2 von $1/2$ zu q streng monoton zu, d.h. $|MLA| \leq q$.

Fall 2.3.2: Wie 2.3.1, aber Δ liegt im Innern von Viereck $BMLC$. Dann verschieben wir t in Richtung R . Dann können M und L nur dann beide gleichzeitig auf AB bzw. AC liegen, wenn M auf AB zwischen B und M_{AB} liegt. Bei der Bewegung von B nach M_{AB} fällt $|BLC|$ von q zu $1/2$, und $|BMC|$ wächst von 0 monoton auf $1/2 < q$.

Damit ist alles gezeigt.



Bemerkung: Mit dem Schiebe-Argument konnten wir erreichen, dass die Drehung von t nicht um N , sondern um einen Punkt auf der Seitenhalbierenden erfolgt. Dann kann leichter nachgewiesen werden, dass beim Drehen die Fläche des Dreiecks zunimmt, bis t durch eine der Ecken von ABC geht. Bei einer Drehung um N in allgemeiner Lage kann man folgendermaßen argumentieren:

Hilfssatz: Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck ABC mit $|ABC| = 1$ und ein Punkt N im Innern. Dazu zwei Punkte L auf AC und K auf BC derart, dass die Gerade LK durch N verläuft. Der Punkt L wird nun aus der Lage $L = A$ auf der Seite AC in Richtung C so weit bewegt, bis K auf den Punkt B kommt.

Behauptung: Dabei nimmt $|CLK|$ zunächst streng monoton ab und nimmt – bevor K den Punkt B erreicht – wieder streng monoton zu. Der Wert von $|CLK|$ ist also für maximal für eine der beiden Lagen $L = A$ oder $K = B$.

Beweis: Sei $l := \frac{|CL|}{|CA|} = \frac{|CNL|}{|CNA|} = \frac{|CBL|}{|CBA|} = |CBL|$ und $k := \frac{|CK|}{|CB|} = \frac{|CNK|}{|CNB|} = \frac{|CKA|}{|ABC|} = |CKA|$.

dann ist $lk = l \cdot (k \cdot |ABC|) = l \cdot |CKA| = |CLK|$.

Die Höhen von N und K auf AC seien mit h_N und h_K bezeichnet, wir definieren $t := h_N : h_K$.

Offensichtlich ist $0 < l, k, t < 1$, denn aus $t \geq 1$ folgt $h_K \leq h_N$ und somit L nicht zwischen A und C .

Zunächst stellen wir fest, dass bei einer Bewegung von L in Richtung C der Wert von h_N konstant ist und der Wert von h_K streng monoton abnimmt. Damit nimmt auch t streng monoton ab.

Mit Strahlensatz (Zentrum L) gilt

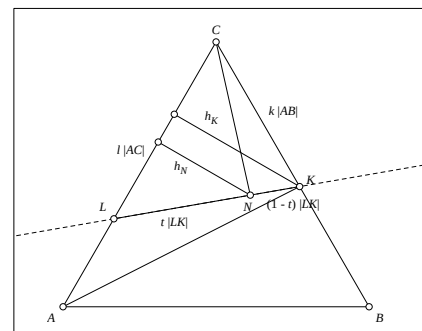
$$t = \frac{|h_N|}{|h_K|} = \frac{|LN|}{|LK|} = \frac{|CLN|}{|CLK|}, \text{ und } 1 - t = \frac{|LK - LN|}{|LK|} = \frac{|CLK| - |CLN|}{|CLK|} = \frac{|CNK|}{|CLK|}.$$

Nun ist $1 : t = h_K : h_N = (h_K \cdot |CA|) : (h_N \cdot |CA|) = |CKA| : |CNA| = k : |CNA|$, also $|CNA| : t = k$.

Analog erhalten wir (ersetze L durch K , A durch B , t durch $(1 - t)$): $|CNB| : (1 - t) = l$,

Multiplikation ergibt $\frac{|CNA| \cdot |CNB|}{t(1-t)} = kl = |CLK|$.

In diesem Term ist der Zähler konstant, und t nimmt streng monoton ab. Der Graph von $f : t \rightarrow t(1-t)$ in einem Teilintervall von $]0;1[$ ist eine nach unten offene Parabel, d.h. f nimmt den kleinste Wert in diesem Intervall in einem der beiden Randpunkte dieses Intervalls an. Dies heißt, dass $|CLK|$ in einer der beiden Lagen $L = A$ oder $K = B$ maximal ist.





Aufgabe 4: Eine Abbildung f der Menge der Punkte der Ebene in sich selbst habe folgende zwei Eigenschaften:

- (1) Es gibt keine zwei verschiedenen Punkte P und Q mit $f(P) = f(Q)$.
- (2) Die Abbildung f bildet jedes Rechteck $\mathfrak{R}$ der Ebene auf ein Rechteck $\mathfrak{R}'$ der Ebene ab, d.h. die Menge der Bildpunkte $f(P)$ aller Punkte P des Rechtecks $\mathfrak{R}$ ist die Menge aller Punkte von $\mathfrak{R}'$.

Untersuche, ob f dann auch jedes Quadrat auf ein Quadrat abbildet und ob jeder Punkt der Ebene Bildpunkt $f(P)$ eines Punktes P der Ebene ist.

Hinweise: Jedes Rechteck hat positiven Flächeninhalt und zu jedem Rechteck gehören die Punkte seines Randes und alle inneren Punkte. Die Richtigkeit der Antwort ist zu beweisen.

Ergebnis: (A) Es wird jedes Quadrat auf ein Quadrat abgebildet.

(B) Jeder Punkt der Ebene ist Bildpunkt $f(P)$ eines Punktes P der Ebene.

Schreibweisen: Zu einem Rechteck $\mathfrak{R}$ bezeichne $f(\mathfrak{R})$ die Menge aller Punkte von $\mathfrak{R}$, $f(AB)$ die Menge der Punkte der Strecke AB . Anstatt $f(X)$ schreiben wir gelegentlich auch einfacher X' . Bei jedem Rechteck unterscheiden wir Eckpunkte, Punkte auf dem Rand und innere Punkte.

1. Beweis: Die Bedingung (1) heißt, dass f injektiv ist. Gleichwertig ist "wenn $Q = f(P)$, dann ist P der einzige Punkt mit dieser Eigenschaft. Damit ist f auch auf der Bildmenge von f eindeutig umkehrbar.

Für den Beweis von (A) benötigen wir einige Hilfssätze:

HS 1.1: Haben zwei Rechtecke $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ genau einen gemeinsamen Punkt X , dann haben auch $f(\mathfrak{R}_1)$ und $f(\mathfrak{R}_2)$ genau einen gemeinsamen Punkt; darüber hinaus ist X Ecke von mindestens einem der beiden Rechtecke $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$.

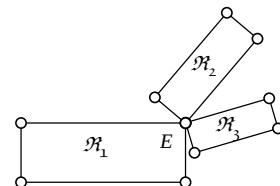
Beweis: Es gilt $f(X) \in \mathfrak{R}_1$ und $f(X) \in \mathfrak{R}_2$, d.h. $f(\mathfrak{R}_1)$ und $f(\mathfrak{R}_2)$ haben mindestens einen Punkt gemeinsam. Mehr als einen Punkt X kann es nicht geben: Gäbe es außer $f(X)$ einen zweiten gemeinsamen Punkt $Y \in f(\mathfrak{R}_1)$ und $Y \in f(\mathfrak{R}_2)$, dann gibt es einen Punkt $P \in \mathfrak{R}_1$ mit $f(P) = Y$ und einen Punkt $Q \in \mathfrak{R}_2$ mit $f(Q) = Y$. Da f injektiv ist, müsste dann $P = Q$ sein, d.h. $P = Q$ wäre neben X ein zweiter gemeinsamer Punkt von $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Wäre der gemeinsame Punkt von $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ ein innerer Punkt einer Seite oder innerer Punkt sowohl von $\mathfrak{R}_1$ als auch von $\mathfrak{R}_2$, dann überlappen sich die beiden Seiten in mehr als einem Punkt im Widerspruch zur Voraussetzung.

HS 1.2: Ist E Ecke von $\mathfrak{R}_1$, dann ist $f(E)$ Ecke von $f(\mathfrak{R}_1)$.

Beweis: Sei E Ecke von $\mathfrak{R}_1$, ergänze die Figur durch zwei weitere Rechtecke $\mathfrak{R}_2$ und $\mathfrak{R}_3$, die ebenfalls E als Ecke haben, wobei E einziger gemeinsamer Punkt von je zwei dieser Rechtecke ist. Eine solche Konfiguration ist stets möglich, weil an der Ecke E drei Innenwinkel mit Gesamtsummen $3 \cdot 90^\circ < 360^\circ$ aneinanderstoßen.

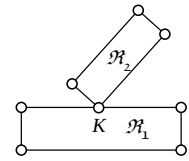
Nach HS 1.1 ist dann $f(E)$ auch einziger gemeinsamer Punkt von je zwei der Bildrechtecke $f(\mathfrak{R}_1)$, $f(\mathfrak{R}_2)$, $f(\mathfrak{R}_3)$. Wäre nun $f(E)$ nicht Ecke von $f(\mathfrak{R}_1)$, sondern innerer Punkt einer Seite, so könnten nicht beide Rechtecke $f(\mathfrak{R}_2)$ und $f(\mathfrak{R}_3)$ so liegen, dass $f(E)$ einziger gemeinsamer Punkt mit $f(\mathfrak{R}_1)$ ist.





HS 1.3: Ist K Punkt auf einer Seite von $\mathfrak{R}_1$, aber nicht Ecke, dann ist $f(K)$ Punkt auf einer Seite von $f(\mathfrak{R}_1)$ und nicht Ecke von $f(\mathfrak{R}_1)$.

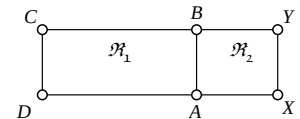
Beweis: Sei K Punkt auf einer Seite von $\mathfrak{R}_1$, ergänze die Figur durch ein weiteres Rechtecke $\mathfrak{R}_2$, mit Ecke K , wobei K einziger gemeinsamer Punkt von $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ ist. Eine solche Konfiguration ist stets möglich, weil an K zwei Innenwinkel mit einer Gesamtsumme von $180^\circ + 90^\circ < 360^\circ$ aneinanderstoßen. Nach HS 1.1 ist dann $f(K)$ auch einziger gemeinsamer Punkt von $f(\mathfrak{R}_1)$ und $f(\mathfrak{R}_2)$, was nur möglich ist, wenn $f(K)$ auf dem Rand $f(\mathfrak{R}_1)$ liegt. Dabei kann $f(K)$ keine Ecke von $f(\mathfrak{R}_1)$ sein, weil f injektiv ist und das Urbild einer Ecke nach HS 1.2 eine Ecke sein muss.



Korollar: Alle inneren Punkte eines Rechtecks $\mathfrak{R}$ werden auf innere Punkte von $f(\mathfrak{R})$ abgebildet, und alle inneren Punkte von $f(\mathfrak{R})$ sind Bilder von inneren Punkten von $\mathfrak{R}$.

HS 1.4: Sind A und B benachbarte Eckpunkte von $\mathfrak{R}_1$, dann sind $f(A)$ und $f(B)$ benachbarte Eckpunkte von $f(\mathfrak{R}_1)$.

Beweis: Seien A, B benachbarte Eckpunkte von $\mathfrak{R}_1$, ergänze die Figur durch ein weiteres Rechtecke $\mathfrak{R}_2$, das ebenfalls A und B als benachbarte Eckpunkte hat, aber außer der Kante AB keine weiteren Punkte mit $\mathfrak{R}_1$ gemeinsam hat. Dann haben die Ränder von $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ unendlich viele Punkte, aber nicht alle Punkte gemeinsam, und $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ haben keine gemeinsamen inneren Punkte.



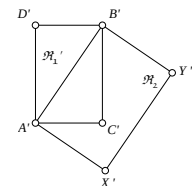
Nach HS 1.2 sind nun $f(A)$ und $f(B)$ Eckpunkte sowohl von $\mathfrak{R}_1$ als auch von $\mathfrak{R}_2$.

Wir führen die Annahme, dass $f(A)$ und $f(B)$ nicht benachbarte Eckpunkte, also Endpunkte einer Diagonalen von $\mathfrak{R}_1$ sind, zum Widerspruch. Dann können wir verschieden argumentieren:

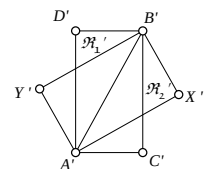
Variante 1: Dann haben $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ gemeinsame innere Punkte im Widerspruch zum Korollar von HS 1.3, egal, ob $A'B'$ Diagonale oder Seite in $f(\mathfrak{R}_2)$ ist (vgl. Figuren in Variante 2).

Variante 2: Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1: $f(A)$ und $f(B)$ sind benachbarte Eckpunkte von $f(\mathfrak{R}_2)$ (vgl. Figur). Dann haben die Ränder von $f(\mathfrak{R}_1)$ und $f(\mathfrak{R}_2)$ außer den Punkten $f(A), f(B)$ höchstens noch zwei weitere Punkte gemeinsam, nämlich möglicherweise Schnittpunkte von $X'Y'$ mit $A'C'$ und $C'B'$, also endlich viele Punkte im Widerspruch zu HS 1.3.



Fall 2: $f(A)$ und $f(B)$ sind nicht benachbarte Eckpunkte von $f(\mathfrak{R}_2)$ (vgl. Figur): Dann haben die Ränder von $f(\mathfrak{R}_1)$ und $f(\mathfrak{R}_2)$ außer den Punkten $f(A), f(B)$ entweder genau zwei weitere Punkte gemeinsam, oder alle Punkte gemeinsam (nämlich, wenn $Y' = D'$ und $X' = C'$) also entweder endlich viele Punkte oder alle im Widerspruch zu HS 1.3.



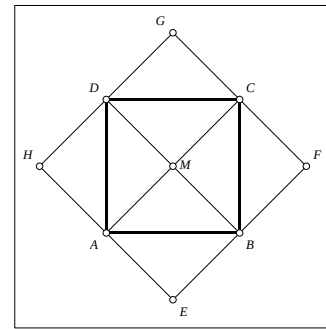
Korollar: Jede Seite AB eines Rechtecks wird auf die Seite $f(A)f(B)$ des Bildrechtecks abgebildet.



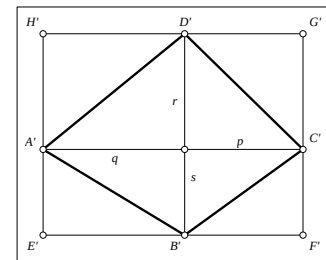
Nun zum eigentlichen Beweis für (A):

Gegeben ein Quadrat $ABCD$, wir zeigen, dass dann auch $A'B'C'D'$ ein Quadrat ist. Hierfür genügt zu zeigen, dass das Viereck vier rechte Innenwinkel und vier gleich lange Seiten hat.

Es sei M der Schnittpunkt der Diagonalen des Quadrates $ABCD$, ferner E, F, G und H die Spiegelbilder von M an den Seiten AB, BC, CD bzw. DA . Die Gesamtfigur besteht nun aus dem Quadrat $ABCD$, vier Quadraten mit gemeinsamer Ecke M und gleicher Kantenlänge, diese vier Quadrate bilden zusammen ein Quadrat $EFGH$ mit $\sqrt{2}$ -facher Seitenlänge. Weiter findet man weitere vier Rechtecke bestehend jeweils aus zwei Quadraten mit gemeinsamer Seite (Abb. 1)



Wir unterwerfen die Figur der Funktion f und erhalten nach den Hilfssätzen ein Rechteck $E'F'G'H'$, das in vier Rechtecke $A'E'B'M'$, $B'F'C'M'$, $C'G'D'M'$ und $D'H'A'M'$ aufgeteilt ist. Nach HS 1.3 liegen die Punkte A', B', C' und D' auf den Seiten; die Seitenlängen dieser vier Rechtecke seien p, q, r, s wie in der Figur bezeichnet (Abb. 2).



Zunächst können wir keine Aussagen über Längen von Seiten machen, dies deuten wir mit der nicht maßstabsgerechten Figur an. Wir betrachten die Punkte A', B', C' und D' . Da $ABCD$ ein Quadrat, also insbesondere ein Rechteck ist, muss $f(ABCD)$ wieder ein Rechteck sein, und nach HS 1 hat es die Ecken A', B', C', D' . Insbesondere muss es vier rechte Innenwinkel haben. Nach den Sätzen der Pythagorasgruppe ist ein Dreieck ABC genau dann rechtwinklig bei C , wenn $h_c^2 = pq$ gilt (mit den Höhenabschnitten p und q auf der Seite AB). Dies wenden wir auf die Teildreiecke $A'B'M', B'CM', C'D'M'$ und $D'A'M'$ an und erhalten $r^2 = pq = s^2$, also $r = s$, und analog $p^2 = rs = q^2$, also $p = q$.

Damit ist $p^2 + r^2 = r^2 + q^2 = q^2 + s^2 = p^2 + s^2$, also $D'C'^2 = D'A'^2 = A'B'^2 = B'C'^2$. Folglich hat $f(ABCD)$ nicht nur vier rechte Innenwinkel, sondern auch vier gleich lange Seiten, ist also ein Quadrat. Das war zu zeigen.

Beweis für (B): Wie im Beweis zu (A) konstruieren wir ausgehend von einem Quadrat $\Omega_0 = ABCD$ eine Folge von Quadraten Ω_i derart, dass die Ecken von Ω_{i-1} die Seitenmitten von Ω_i sind. Nun ist stets $f(\Omega_{i-1})$ das Mittenquadrat von $f(\Omega_i)$, d.h. jeder Punkt von $f(\Omega_{i-1})$ ist Bildpunkt $f(P)$ eines Punktes P der Ebene. Die Seitenlänge des Quadrates $f(\Omega_i)$ ist das $\sqrt{2}$ -fache der Seitenlänge des Quadrates $f(\Omega_{i-1})$, d.h. die Quadrate $f(\Omega_i)$ werden mit wachsendem i beliebig groß, d.h. jeder Punkt der Ebene wird von einem Ω_i mit genügend großem i überdeckt. Das war zu zeigen.