Aufgabe 2

Wir beweisen zunächst einen Spezialfall der Aussage für Polygone.

Lemma: Der Umfang eines konvexen Polygons ist nicht größer als die Länge eines es umschreibenden Polygonzugs. "Umschreibt" bedeutet hierbei lediglich ganz allgemein, dass kein Punkt des konvexen Polygons außerhalb des Polygonzugs liegt. (siehe Bild)

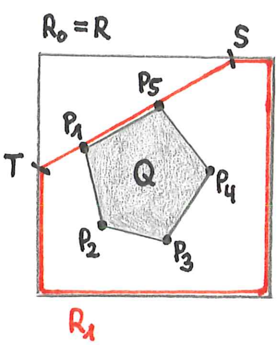
Beweis: Wir legen zunächst unsere Notation fest.

- Es bezeichne Q das konvexe Polygon. Die Eckpunkte dieses konvexen Polygons seien im Gegenuhrzeigersinn mit $P_1, P_2, \dots, P_n$ bezeichnet.
- Es bezeichne R den umschreibenden Polygonzug.

Es ist $\quad \text{Umfang}(R) \geq \text{Umfang}(Q)$ zu beweisen.

Wir konstruieren nun rekursiv Q umschreibende Polygonzüge $R_0, R_1, \dots, R_n$ wiefolgt:

- $R_0 = R$ ist unser anfänglicher Polygonzug R.
- Q wird von R_0 umschrieben. $\Rightarrow$ Die Gerade P_nP_1 enthält Punkte S, T, so dass S, P_n, P_1, T in dieser Reihenfolge auf der Geraden P_nP_1 liegen, wobei S, T auch auf dem Polygonzug R_0 liegen. Es sei hierbei erlaubt, dass ggf. S mit P_n bzw. T mit P_1 zusammenfällt.



  Die Punkte S und T zerlegen den Polygonzug R_0 in zwei Teile, wobei jeder dieser beiden Teile zusammen mit der Strecke ST erneut einen geschlossenen Polygonzug bildet. Da R_0 das konvexe Polygon Q umschreibt, muss (genau) einer dieser beiden neuen Polygonzüge ebenfalls Q umschreiben. R_1 bezeichne diesen Polygonzug.

  Man beachte: Da die Strecke ST die kürzeste Verbindung zwischen den beiden Punkten S und T ist, gilt offensichtlich

  $$\text{Umfang}(R_0) \geq \text{Umfang}(R_1). \qquad (1)$$

- Verfährt man in analoger Weise mit R_1 und der Geraden P_1P_2, so erhält man R_2.

  Allgemeiner: Für $i = 1, 2, \dots, n-1$ entsteht der Polygonzug R_{i+1}, indem man in analoger Weise mit R_i und der Geraden P_iP_{i+1} verfährt. Insbesondere gilt

  $$\text{Umfang}(R_i) \geq \text{Umfang}(R_{i+1}). \qquad (2)$$

Die folgenden Aussagen lassen sich für unsere rekursive Konstruktion leicht mit Induktion überprüfen:

- Für $i \geq 1$ ist die Strecke P_nP_1 Teil des Polygonzugs R_i. Die Punkte P_n und P_1 sind dabei jedoch ggf. keine Eckpunkte des Polygonzugs R_i.
- Für $i \geq 2$ ist der Streckenzug $P_1P_2 \dots P_{i-1}$ Teil des Polygonzugs R_i.
- Für $i \geq 2$ ist die Strecke $P_{i-1}P_i$ Teil des Polygonzugs R_i. Der Punkt P_i ist dabei jedoch ggf. kein Eckpunkt des Polygonzugs R_i.

Es ergibt sich damit insbesondere $R_n = Q$.

Mit (1) und (2) folgt
$$\text{Umfang}(R) = \text{Umfang}(R_0) \geq \text{Umfang}(R_1) \geq \text{Umfang}(R_2) \geq \dots$$
$$\dots \geq \text{Umfang}(R_n) = \text{Umfang}(Q). \qquad \square$$

Wir sind nun ausreichend vorbereitet für einen Beweis der allgemeinen Aussage.

Satz: Der Umfang einer konvexen Figur ist nicht größer als die Länge eines sie umschreibenden Polygonzugs. "Umschreibt" bedeutet hierbei lediglich ganz allgemein, dass kein Punkt der konvexen Figur außerhalb des Polygonzugs liegt.

Beweis: Wir legen zunächst unsere Notation fest.

- Es bezeichne F die konvexe Figur.
- Es bezeichne R den umschreibenden Polygonzug.

Es ist Umfang(R) $\geq$ Umfang(F) zu beweisen. Es sei hierbei angemerkt, dass Umfang(F) für allgemeine konvexe Figuren F in der Tat wohldefiniert ist mit

$$\text{Umfang}(F) = \sup\left\{\text{Umfang}(Q) \;\middle|\; \begin{array}{l}Q \text{ Polygon mit allen Eckpunkten} \\ \text{auf dem Umfang von } F\end{array}\right\}$$

Jedes Polygon Q mit allen seinen Eckpunkten auf dem Rand/Umfang einer konvexen Figur F ist jedoch selbst konvex. Da der Polygonzug R mit F auch das konvexe Polygon Q umschreibt, folgt mit unserem Lemma, dass

$$\text{Umfang}(R) \geq \text{Umfang}(Q).$$

Somit gilt

$$\text{Umfang}(R) \geq \sup\left\{\text{Umfang}(Q) \;\middle|\; \begin{array}{l}Q \text{ Polygon mit allen Eckpunkten} \\ \text{auf dem Umfang von } F\end{array}\right\} = \text{Umfang}(F). \square$$