50 Jahre BWM

Jürgen Kanzler

Aufgabe 1

Ich benutze folgenden Satz von Ko Chao, der eine schwächere Version der Catalanschen Vermutung zeigt:
Satz[1]: Sei p eine ungerade Primzahl. Dann hat die Gleichung $x^p + 1 = y^2$ mit positiven ganzen Zahlen x, y nur die Lösung $(x, y, p) = (2, 3, 3)$.
Einen Beweis findet man auch in [2], was leichter zu finden ist.

Sei nun $b^m + b^n = q^2$ wie in der Aufgabe. O.B.d.A. sei $m \leq n$ und $k := n - m$.

Im Fall $n = m$ folgt dann $2b^m = q^2$. Das ist genau dann erfüllt, wenn m ungerade ist und b, q die Form $b = 2c^2, q = 2^{\frac{m+1}{2}} c^m$ für eine natürliche Zahl $c \geq 1$ haben.

Falls $n > m$ ist, dann folgt $b^m(1 + b^k) = q^2$. Da b^m und $1 + b^k$ teilerfremd sind, müssen beide Faktoren Quadratzahlen sein. Sei $q_1^2 = 1 + b^k$ mit $q_1 > 0$.

Für $k = 1$ sind alle Lösungen offenbar gegeben durch $b = r^2 - 1$, m gerade, $n = m + 1$ und $q = b^{m/2} r$ mit beliebigem ganzzahligem $r > 1$.

Wäre $k = 2l$ gerade, so müsste wegen $1 = (q_1 - b^l)(q_1 + b^l)$ sogar $q_1 + b^l = 1$ gelten, was einen Widerspruch zu $q_1, b > 0$ darstellt.

Sei daher $p > 2$ der kleinste Primfaktor von $k = pl$. Dann folgt aus oben zitiertem Satz, dass $b^l = 2, q_1 = 3$ und $p = 3$ ist. Also insbesondere $b = 2$ und $k = 3$. Man folgert leicht, dass $b = 2$, m gerade, $n = m + 3$ und $q = 2^{\frac{m}{2}} \cdot 3$ sein muss, was auch tatsächlich eine Lösung darstellt.

Literatur

[1] K. Chao, “On the diophantine equation x2= yn+ 1, xy= 0,” *Sci. Sinica*, vol. 14, no. 1, p. 965, 1965.

[2] M. Mignotte, “A new proof of ko chao’s theorem.,” *Mathematical Notes*, vol. 76, 2004.