Karl Fegert
Vorsitzender der
Korrekturkommission

Diese Aufgabe ist bereits so lange im Pool des Wettbewerbs, dass kein aktives Mitglied des Aufgabenauswahlausschusses das Einbringen miterlebt hat. Eine vollständige Lösung dazu ist uns auch nach intensiver Internetrecherche (Dank an Reiner Möwald!) nur für $n \geq 6$ bekannt, der Fall $n = 5$ entzieht sich hartnäckig einer Lösung, die hinreichend kurz und hinreichend leicht verständlich ist. (Für $n = 6$ benötigt man allerdings im Rahmen einer vollständigen Induktion die Aussage für $n = 5$; sonst hat man in der Abschätzung nur Gleichheit und nur für einen Punkt, der nicht im Innern, sondern auf einer Ecke liegt.) Die zu beweisende Aussage ist aber wohl wahr, wie man mit dynamischer Software mit hinreichender Sicherheit nachweisen kann.

Wir erhielten lediglich drei Bearbeitungen im Rahmen unserer Ausschreibung, von denen zwei nicht vollständig korrekt gelöst waren, aber trotzdem wichtige Teilergebnisse enthielten. Eine dritte (Ferdinand Wagner) ist sehr umfangreich, geht über 12 eng beschriebene DIN-A4-Seiten und ist so noch nicht druckreif. Wir wollen sie zusammen überarbeiten, um eine kürzere, leicht verständliche und über jeden Zweifel erhabene Formulierung zu erhalten.

Somit geben wir hier vorläufig eine Zusammenstellung verschiedener Teilergebnisse in der Hoffnung, dass wir oder interessierte Koryphäen sie zu einer kurzen und leicht verständlichen Lösung zusammenfügen können.

Dabei verwenden wir folgende **Bezeichnungen**:

E_i ($i = 1,2,\ldots,5$) seien die Ecken des konvexen Fünfecks fortlaufend im UZS; wie üblich betrachten wir die Indices mod 5. Von den 10 Verbindungsstrecken unter diesen Punkten sind fünf Seiten und fünf (innere) Diagonalen.

d_{ij} = Länge der Strecke E_iE_j (gelegentlich - je nach Kontext - auch die Strecke selbst)

$S_i := \sum_{j \neq i} d_{ij}$ = Summe der Längen der von E_i ausgehenden Strecken

$U := \sum_{i=1}^{5} d_{i(i+1)}$ = Umfang des 5–Ecks:

$D := \sum_{i=1}^{5} d_{i(i+2)}$ = Summe der Längen der inneren Diagonalen

$T_i := S_i - U = d_{i(i-2)} + d_{i(i+2)} - d_{(i-1)(i-2)} + d_{(i-2)(i+2)} + d_{(i+2)}d_{(i+1)} > 0.$

d.h.: Summe zweier echter Diagonalen mit gemeinsamem Anfangspunkt ist länger als die Summe der drei Seiten, die an den nicht-gemeinsamen Endpunkten der Diagonalen hängen; die Figur erinnert an das Tesla–Symbol, daher die Bezeichnung T.

Der wesentliche Kern unserer Aufgabe reduziert sich dann zu:

Beweise: In jedem konvexen Fünfeck gibt es eine Ecke E_i, für die $S_i > U$ (oder $T_i > 0$).

Der Rest folgt dann mit der Überlegung, dass wegen Stetigkeit der zugrunde liegenden Entfernungsfunktion die Aussage auch für einen Punkt im Innern des Fünfecks gilt, wenn er in genügend kleiner Entfernung zu dieser Ecke liegt; für $n \geq 6$ lässt sich die Aussage leicht mit vollständiger Induktion beweisen.

Karl Fegert
Vorsitzender der Korrekturkommission

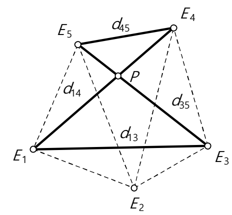
Wir haben folgende Hilfssätze:

HS 1: Für alle $i \neq j$ gilt: $S_i + S_j > 3d_{ij} + U$.

Dies folgt leicht aus einer allgemein bekannten Ungleichung für ein konvexes Viereck; den Beweis geben wir hier kurz an:

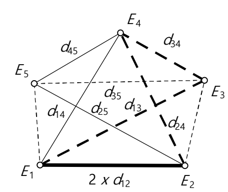
Fall1: d_{ij} ist innere Diagonale, also z.B. $i = 1$, $j = 3$. Sei P der Schnittpunkt von d_{14} mit d_{35}, dann folgt im Viereck $E_1\,E_3\,E_4\,E_5$ mit Dreiecksungleichung

$$
\begin{array}{rcll}
E_1P + PE_3 & > & d_{13} & \text{(I)} \\
E_4P + PE_5 & > & d_{45} & \text{(II)} \\
d_{14} + d_{35} & > & d_{13} + d_{45} & \text{(I) + (II)} \\
d_{15} + d_{13} + d_{12} + d_{34} + d_{31} + d_{32} & = & 2\,d_{13} + d_{15} + d_{12} + d_{34} + d_{32} & \text{(IV)} \\
S_1 + S_2 & > & 3d_{13} + U & \text{(I) + (II) + (IV)}
\end{array}
$$



Fall 2: d_{ij} ist Seite, also z.B. $i = 1$, $j = 2$. Dann wenden wir das obige Zwischenergebnis (I)+(II) in den Vierecken $E_1\,E_2\,E_3\,E_4$ und $E_1\,E_2\,E_4\,E_5$ an:

$$
\begin{array}{rcll}
d_{13} + d_{24} & > & d_{12} + d_{34} & \text{(I) + (II)} \\
d_{14} + d_{25} & > & d_{12} + d_{45} & \text{(I) + (II)} \\
d_{15} + d_{23} & = & d_{51} + d_{23} & \text{(IV)} \\
d_{12} + d_{21} & = & d_{12} + d_{21} & \text{(V)} \\
S_1 + S_2 & = & 3d_{13} + U & \text{(I) + (II) + (IV) + (V)}
\end{array}
$$



Falls also $3d_{13} > U$, ist $S_1 + S_2 = 3d_{13} + U > 2U$, also $S_1 > U$ oder $S_2 > U$. Es folgen also sofort zwei Hilfssätze:

HS 2: Ist $S_i + S_j > 2U$ (gleichbedeutend mit $3d_{ij} > U$), dann gilt: $S_i > U$ oder $S_j > U$.

Dies ist der Spezialfall des allgemeineren Satzes:

HS 3: Ist $\sum_{i=1} \alpha_i S_i > U \cdot \sum_{i=1} \alpha_i$, dann existiert ein j mit $S_j > U$.

Beweis: Wären alle $S_i \leq U$, dann wären auch alle $\alpha_i S_i \leq \alpha_i U$, also $U \cdot \sum_{i=1} \alpha_i < \sum_{i=1} \alpha_i S_i$, Widerspruch.

Für einige 5–Tupel (α_i) leitete Ferdinand Wagner Kriterien her, mit Hilfe derer die Aussage nachgewiesen werden kann:

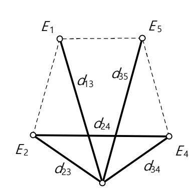
1.1 $\alpha_i = 1$ für alle i: Es ist $\sum_{i=1} 1 \cdot S_i = 2 \sum_{j \neq i} d_{ij} = 2\,U + 2\,D$. (also Summe aller inneren Diagonalen)

Falls also $D > {}^3\!/_2\, U$ ist die rechte Seite größer als 5 U und es gibt es ein i mit $S_i > U$.

1.2 $\alpha_i = \alpha_k = 1$, $\alpha_j = 3$ mit drei aufeinander folgenden Indices $i = j - 1$, $j = k + 1$, also $i = 2$, $j = 3$, $k = 4$, restliche $\alpha_n = 0$. Dann ist unter Verwendung von $S_2 + S_4 \geq 3d_{24} + U$:

$$
\begin{aligned}
S_2 + 3S_3 + S_4 &\geq 3d_{24} + U + 3d_{31} + 3d_{32} + 3d_{34} + 3d_{35} \\
&\geq U + 3(d_{31} + d_{32} + d_{34} + d_{35} + d_{24}) = U + 3(S_3 + d_{24}).
\end{aligned}
$$

Falls also $(S_3 + d_{24}) > {}^4\!/_3\, U$, so ist die rechte Seite größer als 5 U und mit Hilfssatz mit $\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 5$ somit mindestens eines der S_2, S_3 oder S_4 größer als U.



(Indexunabhängige Formulierung: Vier der d_i haben den Anfangspunkt E_j gemeinsam, ihre Summe ist also S_j; die vierte Verbindungsstrecke ist $d_{(j-1)\,(j+1)}$.

Karl Fegert
Vorsitzender der
Korrekturkommission

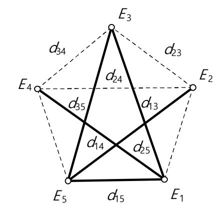
1.3 i,k sind zwei aufeinander folgende Indices, der Index j hat zu i und k den Abstand 2: also $i = 1$, $j = 3$, $k = 5$. Dann gilt mit $S_i + S_j \geq 3d_{ij} + U$

$$^5/_3\, S_1 + {}^1/_3\, S_2 + {}^4/_3\, S_3 + {}^1/_3\, S_4 + {}^4/_3\, S_5$$

$$= [S_1 + S_3 + S_5] \;+\; {}^1/_3\, [\, (S_1 + S_5\,) \;+\; (S_5 + S_2\,) \;+\; (S_1 + S_4\,)]$$

$$\geq\; U + (d_{12} + 2d_{13} + d_{14} + 2d_{15} + d_{23} + d_{34} + 2d_{35} + d_{25} + d_{45}) + {}^1/_3\,[\,U + 3d_{15} + U + 3d_{25} + U + 3d_{14}\,]$$

$$= 2U \;+ 2(d_{15} + d_{25} + d_{14} + d_{13} + d_{35})$$

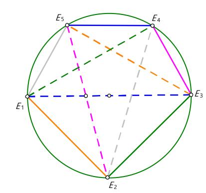


Ist nun $\qquad (d_{15} + d_{25} + d_{14} + d_{13} + d_{35}) > {}^3/_2\, U,$

so ist die rechte Seite größer als 5 U und es folgt mit Hilfssatz und $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 5$, dass mindestens eines der S_i größer als U ist.

(Indexunabhängige Formulierung: $(d_{15} + d_{25} + d_{14} + d_{13} + d_{35})$ ist die Summe aller inneren Diagonalen mit Ausnahme einer "freien Diagonale" (hier d_{24}), die ersetzt wird durch die "parallele" Seite (hier d_{15}).

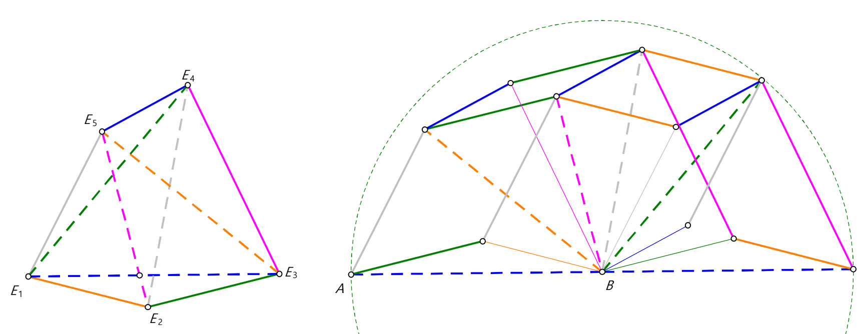
Ein möglicher Ansatz ist, die untersuchten Fünfecke zu klassifizieren nach Länge der längsten Verbindungsstrecke $d_{max} := 1$ und zu unterscheiden, ob diese Verbindungsstrecke eine Seite oder eine innere Diagonale ist. Die Kreise um die Endpunkte dieser längsten Verbindungsstrecke bestimmen dann Gebiete, innerhalb derer alle anderen Eckpunkte liegen müssen.



Mit dem Kriterium $U < 3d_{ij} = 3$ kann man dann schnell Klassen von konvexen Fünfecken bestimmen, für die die Aussage nachgewiesen ist: Alle konvexen Fünfecke, die von einer konvexen Figur mit Umfang < 3 umschlossen sind, z.B. von einem Kreissektor mit Radius $d_{max} = 1$ und Mittelpunktswinkel $1 \approx 57{,}29°$ (Hierin sind z.B. alle konvexen Fünfecke enthalten, deren kleinster Winkel kleiner als 57,29° ist. Aber auch jedes Fünfeck, das in einem Kreis mit Durchmesser d_{max} liegt, hat einen Umfang, der kleiner als 3 ist, da der Polygonzug in der oberen Hälfte nicht länger als 1,5 ist, und der untere nicht länger als $\sqrt{2}$.)

Für den Fall, dass d_{max} eine Seite ist, liegen die Ecken des konvexen Fünfecks in einem Spitzbogendreieck, das von einem gleichseitigen Dreieck aufgespannt wird, und den Kreisbögen über zwei seiner Seiten. Mit einer Kombination der oben angeführten Kriterien ist ein Nachweis bekannt, allerdings benötigt dieser mehrere Fallunterscheidungen auf zwei DIN-A4-Seiten.

Ein weiterer Ansatz stammt von Ferdinand Wagner: Er zeigte, dass man die Seiten des konvexen Fünfecks so parallel verschieben kann, dass sie in einem Halbkreis mit Radius $d_{max} := 1$ einen konvexen Polygonzug bilden, der die Endpunkte dieses Halbkreises verbindet; dabei sind die Entfernungen der Ecken diese Polygonzuges zum Mittelpunkt des Halbkreises stets gewisse Verbindungsstrecken unter den Ecken des Polygonzuges. Dann ist die Unterscheidung nach „d_{max} ist Seite oder innere Diagonale“ nicht nötig.



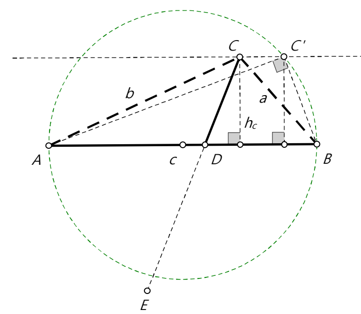
(In der Figur wurde der Fall $E_1E_3 = d_{max}$ dargestellt; für $E_1E_2 = d_{max}$ ergibt sich prinzipiell das gleiche Bild.)

Karl Fegert
Vorsitzender der
Korrekturkommission

Der Nachweis, dass in diesem "Halbkreissechseck" stets $U < 3$ oder $U < {}^2\!/_3 \sum_{j \neq i} d_{ij}$ gilt (die d_{ij} sind hier die fünf Entfernungen vom Mittelpunkt B zu den Ecken des Polygonzuges), führt dann über mehrere DIN-A-4-Seiten.

Manfred Remke führte folgenden Hilfssatz an:

"Schiebesatz": (M. Remke): Ggb. sei ein Dreieck ABC mit $\gamma > 90°$ (d.h. C innerhalb des Thaleskreises über AB) und ein Punkt D auf der Seite AB. Dann gilt $AB + DC > AC + BC$.



Das heißt: Schiebt man den Punkt D geradlinig von AB weg, aber nicht zu weit, so nimmt $AD + DB$ um weniger als DC zu.

Beweis: Seien c und h_c Länge der Seite AB bzw. Höhe von C. Nach Voraussetzung liegt C innerhalb des Thaleskreises über AB. Die Parallele zu AB durch C schneide den Thaleskreis in einem Punkt C'. Dann ist das Dreieck ABC' rechtwinklig bei C' und die Höhe von C' auf AB ist h_c. Außerdem ist $AC' + C'B > AC + CB$, weil C' außerhalb der Ellipse $\Lambda : AX + BX = AC + BC = const$ liegt.

Nun gilt $AB + DC \geq c + h_c$, und im rechtwinkligen Dreieck ABC' nach Pythagoras und Flächeninhaltsformel $a'^2 + b'^2 = c^2$ und $ch_c = a'b'$. Dies setzen wir zusammen zu

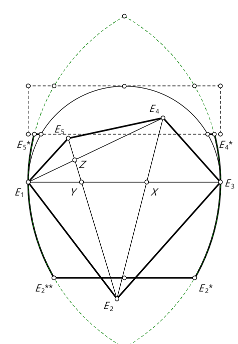
$$(AB + DC)^2 \geq (c + h_c)^2 = c^2 + 2ch_c + h_c^2 \geq c^2 + 2ch_c = a'^2 + b'^2 + 2a'b' = (a' + b')^2 > (AC' + C'B)^2,$$

woraus sofort die Behauptung folgt.

Diesen Satz kann man in folgender Situation anwenden:

Sei $\angle E_1E_4E_3 > 90°$ und auch $\angle E_1E_5E_4 > 90°$, ferner gelte $E_2X + E_2Z > E_1E_3$. Mit zweifacher Anwendung des Schiebesatzes gilt:

$$\begin{aligned} E_2E_5 + E_2E_4 &> ZE_5 + E_2Z + E_2X + XE_4 > ZE_5 + E_1E_3 + XE_4 \\ &> ZE_5 + E_1E_4 + E_4E_3 \\ &> E_1E_5 + E_5E_4 + E_4E_3, \text{ also} \quad S_2 \geq U. \end{aligned}$$



Gilt also $S_2 \geq U$ für ein degeneriertes Fünfeck mit E_5 und E_4 auf E_1E_3, dann bleibt die Beziehung $S_2 \geq U$ erhalten, wenn man E_5 und E_4 von E_2 ein Stück wegschiebt, aber nicht so weit, dass $\angle E_1E_5E_4$ stumpf wird.

Man kann übrigens auch zeigen, dass die Beziehung $S_2 > U$ erhalten bleibt, wenn man den Punkt E_2 "nach unten zieht".

Hinweis: Die Figur ist entnommen aus folgendem Beweisansatz: Es ist $E_1E_3 = d_{max} = 1$, dann liegen alle Ecken des konvexen Polygons innerhalb der gestrichelten "Linse". Das Bogenviereck $E_1E_2^{**}E_2^{*}E_3E_4^{*}E_5^{*}E_1$ mit $\angle E_2^{*}E_1E_2 = \angle E_1E_2E_2^{**} = 30°$ und $\angle E_3E_1E_4^{*} = \angle E_4^{*}E_3E_1 = 15$ hat einen Umfang, der kleiner als 3 ist. Dann liegt entweder der Fall "$U < 3$" vor oder der Fall "Punkt E_2 hat von E_1E_3 einen Abstand größer als 0,5" (hierfür ein fast vollständiger Beweis vor) oder der Fall "Punkt E_4 hat einen Abstand von E_1E_3, der größer als 0,258 ist".

Quellen:

zu n = 3: https://math.stackexchange.com/questions/413592/sum-of-distances-from-triangle-vertices-to-interior-point-is-less-than-perimeter

zu n = 4: https://geometry.ru/olimp/2012/finsols-eng.pdf

zu n ≥ 6: https://cms.math.ca/wp-content/uploads/crux-pdfs/Crux_v15n07_Sep.pdf (Aufgabe 1345 auf Seite 209 f.)