BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK
Bildung & Begabung

Die Aufgaben der 2. Runde 2013

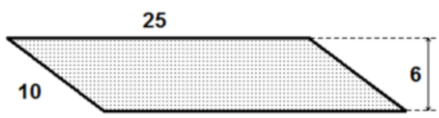
Aufgabe 1

Es seien m und n positive ganze Zahlen, für die $m^2 + n^2 + m$ durch mn teilbar ist.

Zeige, dass dann m eine Quadratzahl ist.

Aufgabe 2

Gegeben sei ein Parallelogramm aus Papier mit den Seitenlängen 25 und 10 sowie der Höhe 6 zwischen den längeren Seiten.



Es soll so in genau zwei Teile zerschnitten werden, dass man unter Verwendung beider Teile einen Würfel mit geeigneter Kantenlänge ohne weitere Schnitte vollständig und ohne Überlappungen bekleben kann.

Beschreibe eine solche Zerschneidung und zeige, dass diese die Bedingungen der Aufgabe tatsächlich erfüllt.

Aufgabe 3

Es sei ABCDEF ein konvexes Sechseck, dessen Ecken auf einem Kreis liegen. Für seine Seitenlängen gelte die Beziehung $\overline{AB} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{EF} = \overline{BC} \cdot \overline{DE} \cdot \overline{FA}$.

Zeige, dass sich dann die Diagonalen AD, BE und CF in genau einem Punkt schneiden.

Aufgabe 4

Im Pascalschen Dreieck sind in einfacher und übersichtlicher Weise die Binomialkoeffizienten angeordnet.

Wir wählen einen beliebigen dieser Binomialkoeffizienten aus, der nicht am rechten Rand des Dreiecks steht. Rechts von ihm stehen in der gleichen Zeile t Zahlen, die wir der Reihe nach mit $a_1, a_2, \ldots, a_t$ benennen, wobei $a_t = 1$ die letzte Zahl in dieser Reihe ist. Geht man vom gleichen Binomialkoeffizienten parallel zum linken Rand schräg nach rechts oben, so stehen dort wiederum t Zahlen, die wir der Reihe nach mit $b_1, b_2, \ldots, b_t$ benennen, wobei $b_t = 1$ ist.

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ .. & & .. & & .. & & .. & & .. & & .. \end{array}$$

Zeige, dass $b_t a_1 - b_{t-1} a_2 + b_{t-2} a_3 - \ldots + (-1)^{t-1} b_1 a_t = 1$ gilt.

Beispiel: Man erhält bei der Wahl von $\binom{4}{1} = 4$ die Werte $t = 3$, $a_1 = 6$, $a_2 = 4$, $a_3 = 1$ sowie $b_1 = 3$, $b_2 = 2$, $b_3 = 1$.