BUNDESWETTBEWERB
MATHEMATIK
Bildung & Begabung

Die Aufgaben der 2. Runde 2014

Aufgabe 1

Zeige, dass für alle positiven ganzen Zahlen n die Zahl $2^{\left(3^n\right)}+1$ durch 3^{n+1} teilbar ist.

Aufgabe 2

Für alle positiven ganzen Zahlen m und k mit $m \geq k$ sei $a_{m,k} = \binom{m}{k-1} - 3^{m-k}$.

Bestimme alle Folgen reeller Zahlen $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$, die für alle positiven ganzen Zahlen n die Gleichung $a_{n,1} \cdot x_1 + a_{n,2} \cdot x_2 + \ldots + a_{n,n} \cdot x_n = 0$ erfüllen.

Anmerkung: $\binom{m}{k-1}$ bezeichne wie üblich einen Binomialkoeffizienten.

Aufgabe 3

In einer Ebene liegt eine Gerade g; auf ihr werden n paarweise verschiedene Punkte beliebig gewählt ($n \geq 2$); über den Verbindungsstrecken je zweier dieser Punkte werden Halbkreise gezeichnet, die alle auf derselben Seite von g liegen.
Bestimme in Abhängigkeit von n die maximale Anzahl von nicht auf g liegenden Schnittpunkten solcher Halbkreise.

Aufgabe 4

In der Ebene sind drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte A_1, A_2 und A_3 gegeben; für $n = 4, 5, 6, \ldots$ sei A_n der Schwerpunkt des Dreiecks $A_{n-3}A_{n-2}A_{n-1}$.

a) Zeige, dass es genau einen Punkt S gibt, der für alle $n \geq 4$ im Inneren des Dreiecks $A_{n-3}A_{n-2}A_{n-1}$ liegt.

b) Es sei T der Schnittpunkt der Geraden SA_3 mit der Geraden A_1A_2. Bestimme die beiden Streckenverhältnisse $A_1T : TA_2$ und $TS : SA_3$.