

Die Aufgaben der 1. Runde 2018

Aufgabe 1

Welches ist die größte natürliche Zahl mit der Eigenschaft, dass jede ihrer Ziffern außer der ersten und der letzten kleiner ist als das arithmetische Mittel ihrer beiden Nachbarziffern?



Aufgabe 2

Bestimme alle reellen Zahlen x , für die $\left\lfloor \frac{20}{x+18} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+18}{20} \right\rfloor = 1$ gilt.

Erläuterung: Für eine reelle Zahl z bezeichnet $\lfloor z \rfloor$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich z ist.



Aufgabe 3

Im spitzwinkligen Dreieck ABC wird der Höhenschnittpunkt mit H bezeichnet. Die Höhe von A schneide die Seite BC im Punkt H_a und die Parallele zu BC durch H schneide den Kreis mit Durchmesser AH_a in den Punkten P_a und Q_a . Entsprechend seien die Punkte P_b und Q_b sowie P_c und Q_c festgelegt.

Beweise, dass die sechs Punkte P_a, Q_a, P_b, Q_b, P_c und Q_c auf einem gemeinsamen Kreis liegen.



Aufgabe 4

Im Raum sind sechs Punkte gegeben, die paarweise verschiedene Entfernungen voneinander haben und von denen keine drei auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Wir betrachten alle Dreiecke mit Ecken in diesen Punkten.

Beweise, dass es unter diesen Dreiecken eines gibt, dessen längste Seite zugleich kürzeste Seite in einem anderen dieser Dreiecke ist.

