

Die Aufgaben der 2. Runde 2021

Aufgabe 1

Für eine positive ganze Zahl m bezeichnen wir mit $Q(m)$ die Quersumme von m , also die Summe aller Ziffern ihrer Darstellung im Dezimalsystem.

Beweis: Jede positive ganze Zahl k besitzt ein positives Vielfaches n , für das $Q(n) = Q(n^2)$ gilt.

Aufgabe 2

In eine Schule gehen 2021 Kinder, von denen jedes mindestens 45 andere Kinder dieser Schule kennt.

Beweis: Es gibt in dieser Schule vier Kinder, die sich so um einen runden Tisch setzen können, dass jedes Kind seine beiden Nachbarn kennt.

Hinweis: "Bekanntheit" ist immer gegenseitig.

Aufgabe 3

Gegeben seien ein Kreis k und ein Punkt A außerhalb von k . Durch A werden drei Geraden gezeichnet: eine Sekante, die den Kreis k in B und C schneidet, und zwei Tangenten, die den Kreis k in D bzw. E berühren. Der Mittelpunkt der Strecke DE sei F .

Beweis: Die Gerade DE halbiert den Winkel $\angle BFC$.

Aufgabe 4

In einer Ebene mit kartesischem Koordinatensystem nennen wir eine Strecke *zahm*, wenn sie parallel zu einer der beiden Koordinatenachsen ist und von dieser einen ganzzahligen Abstand hat, andernfalls nennen wir sie *wild*.

Es seien m und n ungerade positive ganze Zahlen. Das Rechteck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(m,0)$, (m,n) und $(0,n)$ wird mit endlich vielen Dreiecken lückenlos und überlappungsfrei bedeckt. Die Menge dieser Dreiecke sei M . Es sind folgende Bedingungen erfüllt:

- (1) Jedes Dreieck aus M besitzt wenigstens eine zahme Seite.
- (2) Zu jeder zahmen Seite eines Dreiecks aus M hat die zugehörige Höhe die Länge 1.
- (3) Jede wilde Seite eines Dreiecks aus M ist gemeinsame Seite von genau zwei Dreiecken aus M .

Beweis: Mindestens zwei Dreiecke aus M haben je zwei zahme Seiten.

Bitte die Teilnahmebedingungen und wichtigen Hinweise auf der Rückseite beachten!

Teilnahmebedingungen und Hinweise im Überblick

Generelles

■ Die von der Korrekturkommission getroffene Preisentscheidung ist endgültig ("Schiedsrichterentscheidung"). Der Rechtsweg ist ausgeschlossen.

Teilnahmebedingungen

■ **Selbstständigkeitsverpflichtung:** Die auf dem Teilnahmecoupon abgedruckte **Selbstständigkeitserklärung** muss von Ihnen unterschrieben sein. Die Verpflichtung zur Selbstständigkeit gilt in der zweiten Runde für alle Teilnehmenden ausnahmslos. Nicht erst bei der Ausformulierung der Lösungen, sondern auch schon bei der Lösungsfindung ist eine Diskussion über mögliche Lösungswege oder eine Zusammenarbeit mit anderen Personen nicht gestattet. Ein begründeter Verdacht auf Verstoß gegen die Selbstständigkeitsverpflichtung führt zum Ausschluss vom Wettbewerb.

■ **Vertraulichkeit:** Die Aufgabenstellungen sind während der Bearbeitungszeit als vertraulich zu behandeln. Vor dem Einsendeschluss ist also eine Weitergabe, z. B. auch über elektronische Medien, nicht zulässig.

■ **Einsendeschluss: 1. September 2021** (Datum des Poststempels). Verspätet abgesendete Arbeiten können nicht in das Korrekturverfahren einbezogen werden.

Die Teilnehmerarbeiten müssen nicht nur fristgerecht abgeschickt werden, sondern auch spätestens **5 Tage nach Einsendeschluss** in der Geschäftsstelle des Wettbewerbs eingegangen sein. Dann beginnt das Korrekturverfahren, in das nachträglich leider keine Arbeiten mehr einbezogen werden können.

Hinweise zur Lösungsdarstellung

■ Beachten Sie bei der Anfertigung der Endfassung, dass die Beurteilung der Arbeit durch die Korrekturkommission in der zweiten Runde besonders streng ist; neben der mathematischen Richtigkeit und Vollständigkeit spielen auch Klarheit, Verständlichkeit und Schlüssigkeit der Darstellung bei der Bewertung eine wichtige Rolle. Eine glatte Korrektur der Arbeit soll ohne Anfertigung zusätzlicher Skizzen und ohne Ergänzen von Umformungsschritten möglich sein.

■ Das erste Blatt der Arbeit soll die Angabe der von Ihnen benutzten Hilfsmittel (Literatur, IMO–Training etc.) enthalten. Allerdings ersetzt bei der Verwendung von Formeln bzw. Sätzen, die im Schulbereich nicht geläufig sind, eine solche Erwähnung einen Nachweis nicht.

■ Die Verwendung eines Computers oder eines Taschenrechners ist als Hilfsmittel zur Ideenfindung bzw. Rechenkontrolle zulässig. Für den jeweiligen Nachweis müssen jedoch die wesentlichen Schritte und Resultate ohne diese Hilfsmittel nachvollziehbar und überprüfbar sein.

Technische Hinweise

■ Die Bearbeitungen sollen in der gleichen Form wie in der ersten Runde (also insbesondere Format DIN A4 im DIN C4–Umschlag, 6 cm breiter unbeschriebener Rand, Blätter fortlaufend durchnummeriert, Name oben rechts auf jedem Blatt) eingereicht werden. Achten Sie bitte auf gute Lesbarkeit. Ihre Arbeit sollte maschinengeschrieben sein.

■ Bitte kleben Sie den beiliegenden *Adresscoupon* oben links auf die Rückseite des Umschlags. Legen Sie den Teilnahmecoupon bitte ausgefüllt in den Umschlag. Sollten Angaben auf den Coupons falsch sein oder fehlen, korrigieren bzw. ergänzen Sie diese bitte.

■ Lesen Sie die beiliegende Datenschutzinformation gründlich durch. Bitte unterschreiben Sie die für die Teilnahme notwendige *Einwilligung Datenschutz* und legen sie Ihrer Arbeit ebenfalls bei.

Senden Sie Ihre Bearbeitungen bitte ausreichend frankiert an:

**Bundeswettbewerb Mathematik
Bildung & Begabung gemeinnützige GmbH
Kortrijker Str. 1 ■ 53177 Bonn**

Telefon: (0228) 959 15-20
info@bundeswettbewerb-mathematik.de
www.bundeswettbewerb-mathematik.de



Einsendungen auf elektronischem Wege sind nicht möglich.