BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK

Bildung & Begabung

2021

Die Aufgaben der 2. Runde 2021

Aufgabe 1

Für eine positive ganze Zahl m bezeichnen wir mit $Q(m)$ die Quersumme von m, also die Summe aller Ziffern ihrer Darstellung im Dezimalsystem.

Beweise: Jede positive ganze Zahl k besitzt ein positives Vielfaches n, für das $Q(n) = Q(n^2)$ gilt.

Aufgabe 2

In eine Schule gehen 2021 Kinder, von denen jedes mindestens 45 andere Kinder dieser Schule kennt.

Beweise: Es gibt in dieser Schule vier Kinder, die sich so um einen runden Tisch setzen können, dass jedes Kind seine beiden Nachbarn kennt.

Hinweis: "Bekanntschaft" ist immer gegenseitig.

Aufgabe 3

Gegeben seien ein Kreis k und ein Punkt A außerhalb von k. Durch A werden drei Geraden gezeichnet: eine Sekante, die den Kreis k in B und C schneidet, und zwei Tangenten, die den Kreis k in D bzw. E berühren. Der Mittelpunkt der Strecke DE sei F.

Beweise: Die Gerade DE halbiert den Winkel $\angle BFC$.

Aufgabe 4

In einer Ebene mit kartesischem Koordinatensystem nennen wir eine Strecke *zahm*, wenn sie parallel zu einer der beiden Koordinatenachsen ist und von dieser einen ganzzahligen Abstand hat, andernfalls nennen wir sie *wild*.
Es seien m und n ungerade positive ganze Zahlen. Das Rechteck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(m,0)$, (m,n) und $(0,n)$ wird mit endlich vielen Dreiecken lückenlos und überlappungsfrei bedeckt. Die Menge dieser Dreiecke sei M. Es sind folgende Bedingungen erfüllt:

(1) Jedes Dreieck aus M besitzt wenigstens eine zahme Seite.
(2) Zu jeder zahmen Seite eines Dreiecks aus M hat die zugehörige Höhe die Länge 1.
(3) Jede wilde Seite eines Dreiecks aus M ist gemeinsame Seite von genau zwei Dreiecken aus M.

Beweise: Mindestens zwei Dreiecke aus M haben je zwei zahme Seiten.

Bitte die Teilnahmebedingungen und wichtigen Hinweise auf der Rückseite beachten!