Bundeswettbewerb Mathematik
Wissenschaftszentrum, Postfach 20 14 48, 53144 Bonn
Fon: 0228 - 3727 411, Fax: 0228 - 3727 413,
e-mail: bwmathematik@t-online.de

Korrekturkommission
Karl Fegert

Aufgaben und Lösungen

1. Runde 2000

Stand: 30. Mai 2000

Aufgabe 1: Zwei natürliche Zahlen, von denen die eine durch Ziffernpermutationen aus der anderen entsteht, haben die Summe 99...9 (lauter Neunen). Ist dies möglich, wenn jede der Zahlen

a) 1999 Stellen hat,
b) 2000 Stellen hat?

Erläuterung: Die Aussagen über Ziffern und Stellenzahl beziehen sich auf die Dezimaldarstellung der vorkommenden Zahlen.

Antwort: Im Fall a) ist dies nicht möglich, im Fall b) ist dies möglich.

Beweis:

zu a) Es wird allgemeiner bewiesen, dass dies nicht möglich ist, wenn die Stellenzahl der betrachteten Zahlen ungerade ist. Insbesondere ist es dann für die ungerade Stellenzahl 1999 nicht möglich:

Gegeben seien zwei n-stelligen Zahlen, die obige Eigenschaften erfüllen. Sie seien mit a und b bezeichnet, ihre Ziffern mit a_1, a_2, ...a_n bzw. mit b_1, b_2, ... , b_n. Wie in der Schule üblich können wir also schreiben:

$$\begin{array}{cccccccccccc} & & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_i & a_{i-1} & \dots & a_2 & a_1 \\ + & & b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_i & b_{i-1} & \dots & b_2 & b_1 \\ & ü_{n+1} & ü_n & ü_{n-1} & ü_{n-2} & \dots & ü_i & ü_{i-1} & \dots & ü_2 & ü_1 \\ \hline & ü_{n+1} & 9 & 9 & 9 & \dots & 9 & 9 & \dots & 9 & 9 \end{array}$$

Dabei bezeichnen wir mit $ü_i \in \{0,1,2,\ldots\}$ $(1 \le i \le n+1)$ den "Übertrag", der bei der Addition der i-ten Ziffern zu berücksichtigen ist; offensichtlich ist $ü_1 = 0$.

Nach Aufgabenstellung ist $a_i+b_i+ü_i = 9+10ü_{i+1}$ für alle $1 \le i \le n$. Ist nun irgendein $ü_i=0$, so ist $9+10ü_{i+1} = a_i+b_i+ü_i = a_i+b_i \le 18$. Hieraus folgt sofort $ü_{i+1} = 0$ und $a_i+b_i = 9$. Da bereits $ü_1 = 0$ ist, folgt durch n-faches Anwenden dieses Argumentes $ü_{i+1} = 0$ und $a_i+b_i = 9$ für alle $1 \le i \le n$. Damit hat die Zahl (a+b) genau n Ziffern 9. Nun kann verschieden weiter geschlossen werden:

Variante 1: Wir bezeichnen die Quersumme von a bzw. b mit Q(a) bzw. Q(b). Da b aus a durch eine Ziffernpermutation entsteht, ist offensichtlich Q(a) = Q(b); für Q(a) gilt damit notwendigerweise: $2 \cdot Q(a) = Q(a)+Q(b) = a_1+b_1+a_2+b_2 +...+ a_n+b_n = n \cdot 9$.

Links steht mit $2 \cdot Q(a)$ eine gerade Zahl, somit muss rechts mit $n \cdot 9$ auch eine gerade Zahl stehen, was offensichtlich für eine ungerade Zahl n nicht möglich ist. ◊

Variante 2: Da $a_i+b_i = 9$, ist nach Vorgabe von a_i die Ziffer $b_i = 9-a_i$ eindeutig bestimmt; da 9 ungerade ist, folgt außerdem $a_i \ne b_i$ $(1 \le i \le n)$. Da zudem b durch eine Ziffernpermutation aus a entstanden ist, steht unter jeder Ziffer a_k irgend eine von a_k verschiedene, eindeutig bestimmte Ziffer $a_j = b_k = 9–a_k$ mit $k \ne j$. Unter dieser Ziffer a_j steht wiederum die eindeutig bestimmte Ziffer $b_j = 9–a_j = 9–(9–a_k) = a_k$.

Damit ist die Ziffernpermutation im Ergebnis identisch mit einer Folge von paarweisen Vertauschungen von Ziffern a_k und a_j, wobei jeder Index genau einmal vorkommt. Insbesondere muss die Anzahl der Ziffern gerade sein.◊

zu b) **Variante 1**: Für die gerade Stellenzahl n = 2000 ist z.B. die Zahl 545454...54 ($0{,}5 \cdot n$ = 1000 Zweiergruppen 54) mit der Ziffernpermutation 454545...45 ($0{,}5 \cdot n$ = 1000 Zweiergruppen 45) ein Paar von Zahlen mit der gewünschten Eigenschaft.◊

Variante 2: Man konstruiere eine erste Zahl a, indem man zunächst $0{,}5 \cdot n=1000$ beliebige Stellen mit beliebigen Ziffern a_i belegt, dann die restlichen $0{,}5 \cdot n=1000$ Stellen mit den Ziffern $b_i = 9-a_i$. (jeweils $1 \le i \le 0{,}5 \cdot n=1000$; die erste Ziffer von links darf dabei nicht 0 oder 9 sein.). Eine dazu passende Zahl b entsteht durch paarweises Austauschen der Ziffern a_i und b_i. Bei der Addition stehen dann immer a_i und b_i untereinander; deren Summe ist $a_i+b_i = 9$ und damit a+b = 99…9 (2000 Neunen).◊

Hinweis auf häufige Fehler: Der obige Beweis wäre unvollständig, wenn die "Übertragsproblematik" nicht abgehandelt würde. Dies erkennt man sofort, wenn man die Aufgabenstellung variiert: Man fordert als Ergebnis nicht "lauter Neunen", sondern "lauter gleiche Ziffern z" ($z \in \{1,2,...,9\}$). Für z = 7 zeigt das Beispiel 39388...888 + 38388...889 = 77777...777, dass es Zahlen sowohl mit geradzahliger wie mit ungeradzahliger Stellenzahl gibt, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

Aufgabe 2: Man betrachte fünf positive ganze Zahlen, bei denen die Summe von je drei dieser Zahlen durch die Summe der restlichen beiden Zahlen teilbar ist; dies ist z.B. der Fall bei den Zahlen 1, 1, 1, 1, 2. Man entscheide, ob es fünf *paarweise verschiedene* Zahlen mit dieser Eigenschaft gibt.

Antwort: Es gibt keine fünf paarweise verschiedenen Zahlen mit dieser Eigenschaft.

1. Beweis (durch Widerspruch):

Wir nehmen an, es gebe doch fünf solche paarweise verschiedene Zahlen a, b, c, d, e ; o.B.d.A. sei $a < b < c < d < e$.

Weil $c < d$, gilt $\frac{a+b+c}{d+e} < \frac{a+b+d}{c+e}$ (Zähler und Nenner beider Brüche sind positiv!). Da beide Brüche positiv ganz sind und der linke mindestens den Wert 1 hat, gilt $\frac{a+b+d}{c+e} \geq 2$, also $2(c+e) \leq a+b+d$. Dies steht im Widerspruch zu $2(c+e) > c+c+e > a+b+d$.◊

2. Beweis: (durch Widerspruch):

Wir nehmen an, es gebe doch fünf solche paarweise verschiedene Zahlen a, b, c, d, e; o.B.d.A. sei $a < b < c < d < e$. Ferner sei $S := a + b + c + d + e$.

Alle folgenden Ungleichungen lassen sich durch Verkleinern der Nenner und/oder Vergrößern der Zähler (beide sind positiv!) begründen: $2 \leq \frac{a+b+c}{d+e} + 1 = \frac{S}{d+e} < \frac{S}{c+e} < \frac{S}{b+e} < \frac{S}{a+e}$. Offensichtlich sind alle beteiligten Brüche positiv ganz, es ist also $\frac{S}{a+e} \geq 5$, was im Widerspruch steht zu $\frac{S}{a+e} = \frac{a+b+c+d+e}{a+e} < \frac{5e}{e} = 5$.

3. Beweis (direkter Nachweis, dass wenigstens 3 der Zahlen gleich sind):

Seien a, b, c, d, e fünf Zahlen, die die geforderte Teilbarkeitseigenschaft besitzen; o.B.d.A sei $a \leq b \leq c \leq d \leq e$.

Dann ist $\frac{a+b+c}{d+e} \leq \frac{3c}{2c} < 2$; da der linke Bruch positiv ganz ist, gilt sogar $\frac{a+b+c}{d+e} = 1$, also $a+b+c = d+e$ **(1)**. Damit ist $\frac{a+(d+e)}{b+c} = \frac{a+(a+b+c)}{b+c} = \frac{2a}{b+c} + 1$; da in der Gleichungskette links eine positive ganze Zahl steht, muss auch die positive Zahl $\frac{2a}{b+c}$ ganz sein. Notwendig hierfür ist $2a \geq (b + c)$, was – wegen $a \leq b \leq c$ – nur erfüllt sein kann, wenn $a = b = c$ **(2)**. Insbesondere sind nicht alle Zahlen paarweise verschieden.◊

***Zusatzüberlegung**: Nun können wir die Gesamtheit von Zahlengruppen mit der geforderten Eigenschaft bestimmen:*

(2) verwenden wir in $\frac{b+c+d}{a+e} = \frac{2a+d}{a+e} < \frac{2a+2e}{a+e} = 2$*; wieder ist der linke Bruch eine ganze positive Zahl, so dass sogar gilt:* $\frac{b+c+d}{a+e} = 1$*. Nochmalige Anwendung von (2) ergibt*

$$a+e = b+c+d = 2a+d \qquad |+(d-a),$$

$$\Rightarrow \quad d+e = a+2d \qquad |\ \text{mit } d+e = a+b+c = 3a$$

$$\Rightarrow \quad 3a = a+2d \qquad |-a;\ :2$$

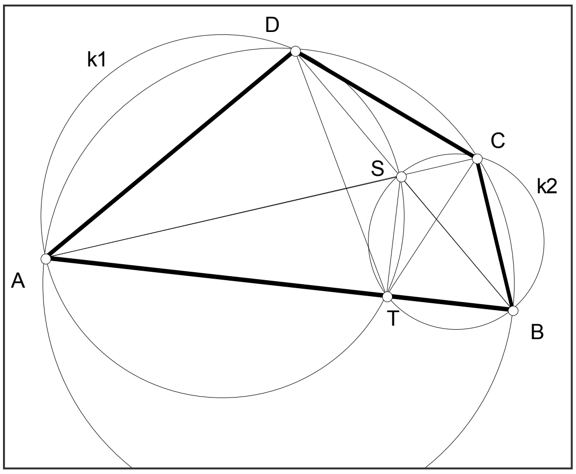
$$\Rightarrow \quad a = d \quad (3).$$

Setzt man dies zusammen mit (2) schließlich in (1) ein, so erhält man $3a = d+e = a+e$*, also* $e = 2a$ *(4). Die notwendigen Bedingungen (2),(3) und (4) ergeben, dass jede Fünfergruppe von Zahlen mit der geforderten Eigenschaft – nach Sortieren nach Größe – von der Form* $r, r, r, r, 2r$ *(r positiv ganz) ist. Umgekehrt haben alle solche Fünfergruppen für jede positiv ganze Zahl* r *die geforderte Eigenschaft, da offensichtlich sowohl* $(r+2r)$ *Teiler von* $(r+r+r)$ *als auch* $(r+r)$ *Teiler von* $(r+r+2r)$ *ist.*

Hinweis: Wie das Gegenbeispiel -3,-1,0,1,3 zeigt, ist die Voraussetzung, dass die betrachteten Zahlen positiv sind, für die Aussage wesentlich.

Aufgabe 3: Dem Halbkreis über einer Strecke AB sei ein konvexes Viereck ABCD einbeschrieben. Der Schnittpunkt von AC und BD sei S, der Fußpunkt des Lotes von S auf AB sei T. Man beweise, dass ST den Winkel CTD halbiert.

1. Beweis (Umfangswinkelsatz):



Weil D und C auf dem Thaleskreis über AB liegen, ist (BD) = (SD) ⊥ (AD) und (AC) = (SC) ⊥ (BC); nach Konstruktion ist auch (ST) ⊥ (AB). Damit haben die Vierecke ATSD und BCST beide an gegenüberliegenden Ecken rechte Winkel, haben also je einen Umkreis k_1 mit Durchmesser AS bzw. k_2 mit Durchmesser BS. Nun kann auf verschiedene Weise geschlossen werden:

Variante 1: Damit folgt durch mehrfache Anwendung des Umfangswinkelsatzes:

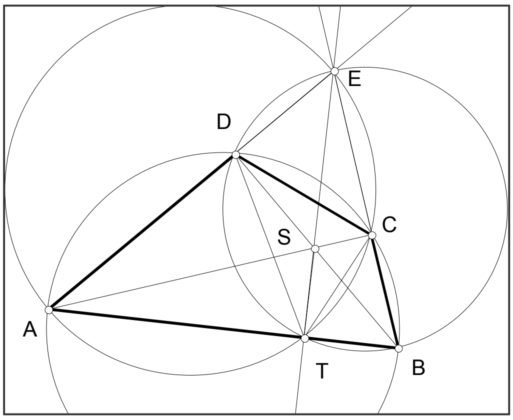
∠CTS = ∠CBS (gl. Sehne CS im Kreis k_2) = ∠CBD (nach Konstruktion von S) = ∠CAD (gl. Sehne CD im Halbkreis über AB) = ∠SAD (Konstruktion von S) = ∠STD (gl. Sehne SD im Kreis k_1).◊

Variante 2: ∠TDS = ∠TAS (gleiche Sehne TS in k_1) = ∠BAC (da T∈AB und S∈AC) = ∠BDC (gl. Sehne BC im Halbkreis über AB) = ∠SDC (da S∈BD); analog ∠SCT = ∠DCS. Damit ist S Schnittpunkt der Winkelhalbierenden im Dreieck TCD; (TS) also die dritte Winkelhalbierende.◊

Variante 3: (ST) ist offensichtlich genau dann Winkelhalbierende von ∠CTD, wenn die Ergänzungswinkel zum Lot auf ST in T – nämlich ∠BTC und ∠DTA – gleich sind. Dies folgt sofort aus ∠BTC = ∠BSC (gleiche Sehne BC an k_2) = ∠DSA (Scheitelwinkel) = ∠DTA (gleiche Sehne DA in k_1).

Variante 4: ∠TDS = ∠TAS und ∠SBT = ∠SCT (gleicher Bogen TS in k_1 bzw. k_2). Damit sind die Dreiecke TDB und TAC ähnlich, also auch ihre dritten Winkel gleich: ∠BTD = ∠CTA. Dann ist aber auch ∠STD = ∠BTD – 90° = ∠CTA – 90° = ∠CTS.

2. Beweis: (Umfangswinkelsatz, mit Hinweis auf das Höhenfußpunktdreieck):



(Mit α bzw. β seien die Innenwinkel des Vierecks ABCD bei A bzw. B bezeichnet.) Weil $\alpha<90°$ und $ß<90°$, schneiden sich die Strahlen [AD und [BC in einem Punkt E. Weil D und C auf dem Thaleskreis über AB liegen, ist BD $\perp$ AE und AC $\perp$ BE. Der Punkt S ist also Höhenschnittpunkt im Dreieck ABE; damit ist (ST) die dritte Höhe in diesem Dreieck und enthält den Punkt E.

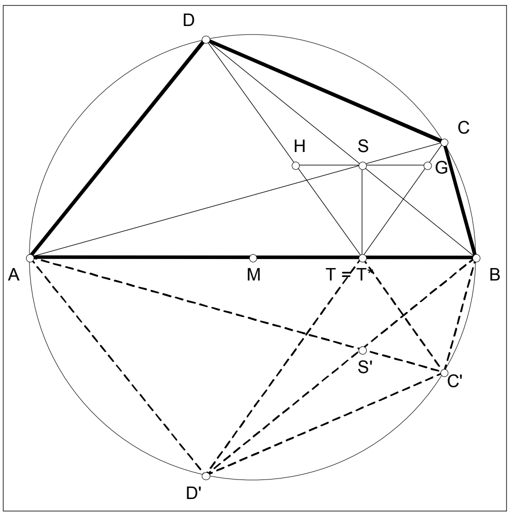
Weil BT $\perp$ ET und BD $\perp$ ED liegen T und D auf dem Thaleskreis über BE, analog C und T auf dem Thaleskreis über AE. Aus der Konstruktion von S sowie mehrfacher Anwendung des Umfangswinkelsatzes an den drei Thaleskreisen ergibt sich: $\angle CTS = \angle CTE = \angle CAE = \angle CAD = \angle CBD = \angle EBD = \angle ETD = \angle STD$.◊

1. Bemerkung: Mit diesem Beweis ist gleichzeitig der **Satz vom Höhenfußpunktdreieck** bewiesen worden: Die Höhen eines spitzwinkligen (E liegt sicher außerhalb des Thaleskreises!) Dreiecks sind gleichzeitig die Winkelhalbierenden des zugehörigen Fußpunktdreiecks.

2. Bemerkung: Die Aussage des Satzes bleibt richtig, wenn die Punkte C und D in umgekehrter Reihenfolge auf dem Bogen AB liegen: Vertauscht man in der Figur die Bezeichnungen von C und D, wird E zu S und umgekehrt; damit bleibt das Lot auf T unverändert. Weitere interessante Zusammenhänge lassen sich aufzeigen, wenn man die Figur durch Verlängern von DC und AB bis zu einem Schnittpunkt F zu einem vollständigen Viereck ergänzt. Dann teilen T und F die Strecke AB harmonisch, ebenso Q ($=ST\cap DC$) und F die Strecke DC.

3. Bemerkung: M sei der Mittelpunkt der Strecke AB. Nach Umfangswinkelsatz ist dann Winkel $\angle CMD = 2\cdot\angle CAD = \angle CTD$. Damit gibt es einen weiteren Kreis, der vier interessante Punkte enthält: Der Umkreis des Dreiecks CTD geht durch den Mittelpunkt der Strecke AB. Aus Symmetrie-Gründen gilt dies natürlich auch für die Mittelpunkte der anderen Seiten des Dreiecks ABE. Der betrachtete Kreis ist damit der **Feuerbach**- bzw. **Neun-Punkte-Kreis** des Dreicks ABE.

3. Beweis (über ähnliche Dreiecke):



Die Parallele zu AB durch S schneidet TC bzw. TD in zwei Punkten, die wir mit G bzw. H bezeichnen. Es genügt dann zu zeigen, dass $\overline{HS} = \overline{GS}$. ($\overline{XY}$ bezeichne im Folgenden die Länge der Strecke XY.)

Die Figur weist mehrere Paare ähnlicher Dreiecke auf; dies führt zu folgenden Verhältnisgleichungen:

$\Delta DHS \sim \Delta DTB$ (die beiden Dreiecke haben parallele Seiten), also ist

$$\frac{\overline{HS}}{\overline{DS}} = \frac{\overline{TB}}{\overline{DB}} \quad\Rightarrow\quad \overline{HS} = \overline{TB}\cdot\frac{\overline{DS}}{\overline{DB}} \quad \textbf{(1)}.$$

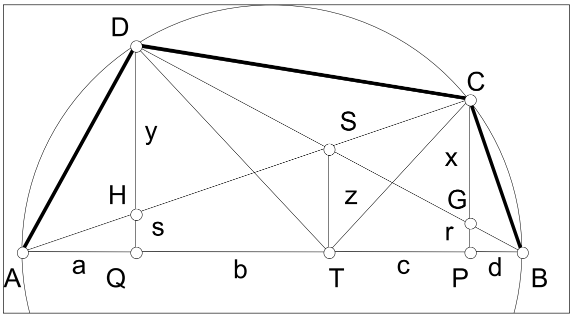
$\Delta BTS \sim \Delta BDA$ (Übereinstimmung in zwei Winkeln: rechte Winkel bei T bzw. D, gemeinsamer Winkel bei B), also ist

$$\frac{\overline{TB}}{\overline{TS}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{DA}} \quad\Rightarrow\quad \overline{TB} = \frac{\overline{TS}\cdot\overline{DB}}{\overline{DA}} \quad \textbf{(2)},$$ zusammen mit

(1) ergibt sich $\overline{HS} = \frac{\overline{TS}\cdot\overline{DB}}{\overline{DA}}\cdot\frac{\overline{DS}}{\overline{DB}} = \overline{TS}\cdot\frac{\overline{DS}}{\overline{DA}}$ **(3)** und analog $\overline{GS} = \overline{TS}\cdot\frac{\overline{CS}}{\overline{CB}}$ **(4)** (gleichzeitiges Vertauschen von (A, C, G) und (B, D, H)). Schließlich ist $\Delta SDA \sim \Delta SCB$ (Übereinstimmung der

rechten Winkel bei D bzw. C, Scheitelwinkel bei S), folglich gilt $\frac{\overline{DS}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{CS}}{\overline{CB}}$ **(5)**, damit führt ein Vergleich von (3) und (4) sofort zu $\overline{HS} = \overline{GS}$.◊

4. Beweis (Strahlensatz):



Wir führen folgende Bezeichnungen ein (vgl. Zeichnung): Die Lotfußpunkte von D bzw. C auf AB nennen wir Q bzw. P; den Schnittpunkt von BD mit dem Lot CP bzw. von AC mit DQ nennen wir G bzw. H. Da T immer zwischen Q und P liegt, wird AB in vier Teilstrecken AQ, QT, TP und PB aufgeteilt, deren Längen wir mit a, b, c und d bezeichnen. Schließlich teilt G die Strecke CP in zwei Teilstrecken auf, ebenso H die Strecke DQ; deren Länge werde mit x und r bzw. y und s benannt.

Nach Voraussetzung liegt S auf den Strahlen [AC und [BD, gleichzeitig sind (DQ), (ST) und (CP) parallele Geraden. Also gilt (Strahlensätze mit Zentren A und B):

$$s{:}z{:}(x+r) = a{:}(a+b){:}(a+b+c) \quad (1)$$

und $$(y+s){:}z{:}r = (b+c+d){:}(c+d){:}d \quad (2).$$

Da C und D auf dem Halbkreis über AB liegen, sind die Dreiecke BCA und BDA beide rechtwinklig bei C bzw. D und es gilt nach dem Höhensatz: $(x+r)^2 = d\cdot(a+b+c)$, also

$$d = \frac{(x+r)^2}{(a+b+c)} \quad (3) \qquad \text{und analog} \qquad a = \frac{(y+s)^2}{(b+c+d)} \quad (4).$$

ST ist offensichtlich genau dann Winkelhalbierende von ∠CTD, wenn die Ergänzungswinkel zum Lot auf ST in T – nämlich ∠PTC und ∠DTQ – gleich sind. Zum Beweis genügt es also, die Ähnlichkeit der Dreiecke PTC und QTD nachzuweisen; da diese rechtwinklig sind, genügt hierzu wiederum der Nachweis von $\frac{(x+r)}{(y+s)} = \frac{c}{b}$. Tatsächlich folgt dies aus einigen Umformungen unter Verwendung der Gleichungen (1) bis (4):

$$\frac{(x+r)}{(y+s)} = \frac{(x+r)^2}{(y+s)^2}\cdot\frac{z}{(x+r)}\cdot\frac{(y+s)}{z} =$$

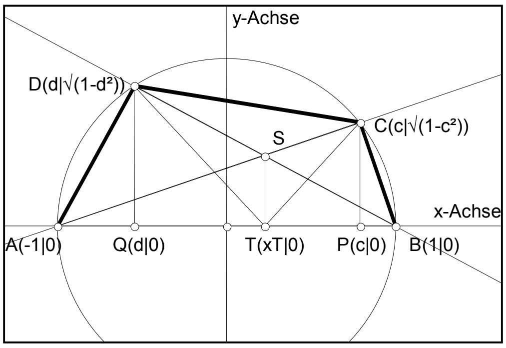
$$= \frac{(x+r)^2}{(y+s)^2}\cdot\frac{(a+b)}{(a+b+c)}\cdot\frac{(b+c+d)}{(c+d)} = \frac{\frac{(x+r)^2}{(a+b+c)}}{(c+d)}\cdot\frac{(a+b)}{\frac{(y+s)^2}{(b+c+d)}} = \frac{d}{(c+d)}\cdot\frac{(a+b)}{a} = \frac{r}{z}\cdot\frac{z}{s} = \frac{r}{s} =^{1)} \frac{x}{y} =^{2)} \frac{c}{b}.$$

(Dabei gilt ²⁾ nach Strahlensatz mit Zentrum S und Parallelen (DQ) und (CP); ¹⁾ gilt wegen $\frac{r}{s} = \frac{(x+r)}{(y+s)}$ (Ergebnis der bisherigen Gleichungskette) $\Leftrightarrow ry + rs = sx + sr \Leftrightarrow ry = sx \Leftrightarrow \frac{r}{s} = \frac{x}{y}$.)◊

***Hinweis**: Wir haben zusätzlich bewiesen: ∠HTQ = ∠PTG.*

5. Beweis (analytisch, *nur als Idee angegeben*):

Wir legen ein kartesisches Koordinatensystem so, dass A die Koordinaten (-1|0) und B die Koordinaten (1|0) hat, diese Normierung hat keinen Einfluss auf die Größenverhältnisse von Winkeln und Strecken. Nach dem Satz von Pythagoras kann dann jede mögliche Lage von C und D auf dem Halbkreis über AB durch Koordinaten C(c|√(1-c²)), D(d|√(1-d²)) für geeignete Werte von c und d beschrieben werden.



Nach Vorgabe von c und d ist der Nachweis "leicht" möglich: Man bestimmt der Reihe nach die Geradengleichungen der Geraden (AC) und (BD), hieraus die x-Koordinate ihres Schnittpunktes S (die identisch mit der x-Koordinate von T ist) und schließlich die Längen der Strecken QT und TP; anschließend genügt es nachzuweisen, dass $\frac{\overline{TP}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{TQ}}{\overline{QD}}$. Die kürzeste bekannte Darstellung dieses Beweises besteht aus umständlichen Termumformungen und nimmt mehr als eine DIN-A4-Seite in Anspruch, so dass auf deren Wiedergabe hier verzichtet wurde.

Hinweis: Die Behauptung der Aufgabe entspricht der Aussage des **Satzes von *Pascal*** in einem Spezialfall *(vgl. Figur zu Beweis 3):*

Man spiegelt die ganze Figur an (AB). So erhält man sechs Punkte A, C', D, B, D' und C, die auf einem Kreis, also einem Kegelschnitt liegen. Für diese Konstellation besagt der Satz von Pascal, dass die Schnittpunkte "gegenüberliegender" Seiten des dadurch gebildeten Sechsecks, also von AC' mit BD' (= S'), von C'D mit D'C (=:T*) sowie von DB mit CA (= S) auf einer Geraden liegen. Da T*∈ SS' und aus Symmetriegründen gleichzeitig T*∈ AB, ist T*=T. Damit ist ∠BTC = ∠C'TB (Symmetrie zu AB) = ∠DTA (Scheitelwinkel). Hieraus folgt wie im 1. Beweis (Variante 3) die Behauptung.◊

Quellen: Barth, Krumbacher, Matschiner, Osiander: Anschauliche Geometrie 3, ISBN 3-431-02949-3;
Athen / Bruhn: Lexikon der Schulmathematik, ISBN 3-89350-174-6, S. 755;
H. Dörrie: 100 Great Problems of Elementary Mathematics..., ISBN 0-486-61348-8, S. 257ff.;
E. W. Weisstein. et al.: http://mathworld.wolfram.com/PascalsTheorem.html.

Hinweis auf häufige Fehler: Spiegelt man die Figur an AB, so kann man die Identität ∠BDC = ∠C'DB = ∠TDB erst benutzen, wenn man bewiesen hat, dass ∠C'TD = 180°.

Aufgabe 4: Ein kreisförmiges Spielbrett sei in n Sektoren (n≥3) eingeteilt, von denen jeder entweder leer oder mit einem Spielstein besetzt ist. Die Verteilung der Spielsteine wird schrittweise verändert: Ein Schritt besteht daraus, dass man einen besetzten Sektor auswählt, seinen Spielstein entfernt und die beiden Nachbarsektoren "umpolt", d.h. einen besetzten Sektor leert und einen leeren Sektor mit einem Spielstein besetzt. Für welche Werte von n kann man in endlich vielen Schritten lauter leere Sektoren erzielen, wenn anfangs ein einziger Sektor besetzt ist?

Antwort:

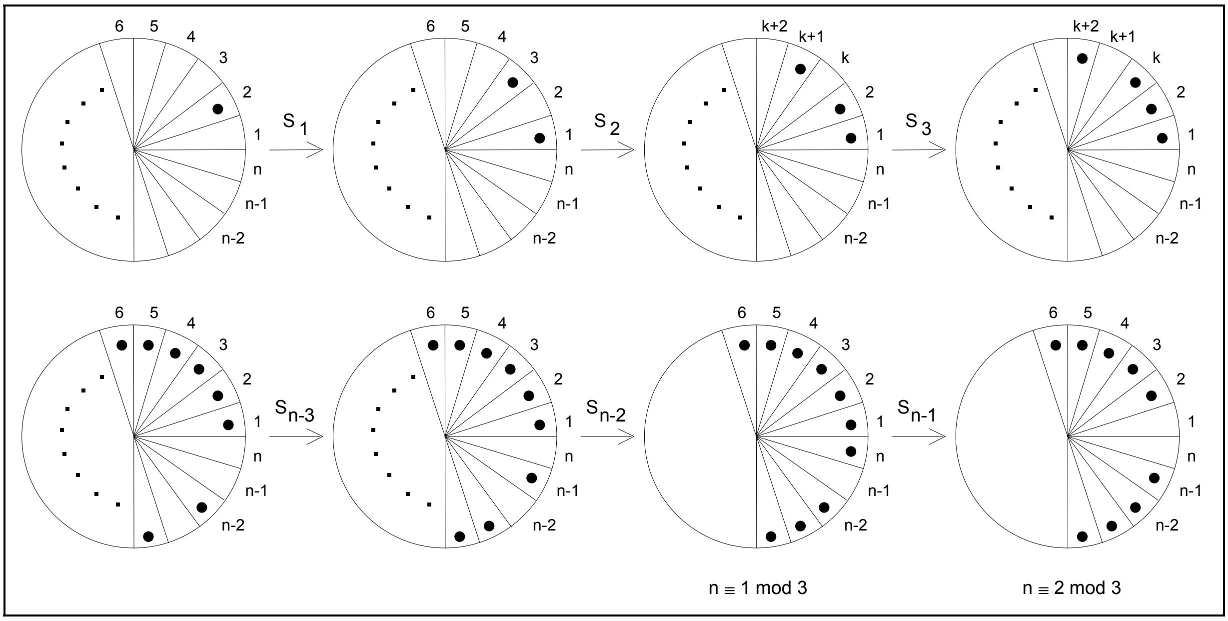
Man kann lauter leere Sektoren genau dann erzielen, wenn n bei Division durch 3 den Rest 1 oder den Rest 2 lässt, d.h. wenn n ≡ 1 mod 3 oder n ≡ 2 mod 3.

Beweis:

Teil 1: Wenn n ≡ 1 oder n ≡ 2 mod 3, kann man lauter leere Sektoren erzielen:

Die Felder seien fortlaufend mit den Zahlen 1,2,...n beschriftet, dabei soll das besetzte Feld die Nummer 2 erhalten.

Nun führen wir (n–2) Spielschritte S_i (i=1,2,...,n–2) aus. Dabei werde im Schritt S_i der Stein in Feld (i+1) ausgewählt und entfernt und die Felder i und (i+2) werden mit einem Stein besetzt. Dies ist auch tatsächlich möglich: Da n≥3, werden so im ersten Schritt Feld 2 geleert und die von vornherein freien Felder 1 und 3 besetzt; im k-ten Schritt (2≤k≤n–2) werden das im vorhergehenden Schritt besetzte Feld (k+1) geleert und das im vorigen Schritt geleerte Feld k ebenso wie das von Anfang an freie und von bisherigen Schritten nicht betroffene Feld (k+2) besetzt; zudem ist durch die Einschränkung 2≤k≤n-2 immer (k+2)≤n. Nach diesen n–2 Spielschritten sind also die n–1 nebeneinander liegenden Felder n, 1, 2,..., n–2 besetzt; der Rest, nämlich das Feld n–1 ist leer.



Wenn n ≡ 1 mod 3, d.h. n–1 ≡ 0 mod 3, können wir diese n–1 besetzten Felder zu Tripeln nebeneinanderliegender Felder zusammenfassen und jedes Tripel durch Auswahl des mittleren Steins vollständig leeren. Damit ist aber auch das Spielbrett vollständig geleert.

Wenn n ≡ 2 mod 3, führen wir noch einen weiteren Schritt S_{n-1} aus, bei dem wir den Stein auf Feld n auswählen und entfernen, dazu das Feld n–1 besetzen und das Feld 1 leeren. Dann sind die n–2 nebeneinander liegenden Felder 2,3,...,n–1 besetzt und alle übrigen, nämlich die Felder n und 1, sind leer. Da n–2 ≡ 0 mod 3 können wir wie im obigen Fall die besetzen Felder zu Tripel nebeneinanderliegender Felder zusammenfassen, die wir durch Auswahl des mittleren Steins vollständig leeren.

Teil 2: In allen anderen Fällen (d.h., wenn n ≡ 0 mod 3) bleibt immer mindestens ein Stein übrig:

Um dies nachzuweisen färben wir die Spielfelder fortlaufend mit den Farben rot, blau, grün, rot, blau, grün, …. O.B.d.A. liege der Stein am Anfang auf einem blauen Feld. Wir bezeichnen die Gesamtzahl der Steine auf den roten bzw. blauen Feldern mit r bzw. b.

Da n ≡ 0 mod 3, kommt in jedem Tripel von benachbarten Spielfeldern (auch in denen, die die Felder n und 1 enthalten) jede Farbe genau einmal vor. Bei jedem Schritt wird somit in jeweils genau einem Feld jeder Farbe entweder ein Stein hinzugefügt oder ein Stein entfernt, d.h. die Zahl r wird um genau eins größer oder kleiner, ebenso die Zahl b. Folglich wird die Summe r+b um 2 größer oder bleibt gleich oder wird um 2 kleiner; in jedem Falle ist die Parität der Summe r+b invariant.

Anfangs ist r = 0 und b = 1, d.h. die Summe r+b = 1 ist ungerade. Dagegen ist bei einem leeren Spielbrett aber r+b = 0 gerade, also von anderer Parität. Deswegen kann dieser Zustand nicht erreicht werden.◊

Zusatzbemerkung: *Aus der Beweisführung wird klar, dass die Aussagen richtig bleiben, wenn man auch "umgekehrte" Schritte (Besetzen eines leeren Spielfeldes mit einem Stein bei gleichzeitigem "Umpolen" der Nachbarfelder) zulässt.*

Hinweise: "n ≡ a mod c" heißt, dass n und a bei Division durch c den gleichen Rest lassen. "Parität" einer Zahl bezeichnet deren Eigenschaft, gerade oder ungerade zu sein.

Diese Lösungsbeispiele lassen sich auch von der Home-Page des Bundeswettbewerbs Mathematik herunterladen: http://www.bubev.de/mathe/index.htm.