Bundeswettbewerb Mathematik
Wissenschaftszentrum, Postfach 20 14 48, 53144 Bonn
Fon: 0228 - 3727 411, Fax: 0228 - 3727 413,
e-mail: info@bundeswettbewerb-mathematik.de

Korrekturkommission
Karl Fegert

Aufgaben und Lösungen

2. Runde 2000

Stand: 26. Oktober 2000

Aufgabe 1: Gegeben ist ein Satz von n Gewichtsstücken ($n>3$) mit den Massen 1, 2, 3, ... , n Gramm. Man bestimme alle Werte von n, für die eine Zerlegung in drei Haufen gleicher Masse möglich ist.

Zur leichteren Lesbarkeit wird in den Formulierungen teilweise der Ausdruck "Gewichtsstück mit Masse i Gramm" ersetzt durch die Zahl "i"; ebenso "Maßzahl der Masse" durch "Masse". Eine Zerlegung des Satzes in drei Haufen gleicher Masse heiße *zulässig*.

Antwort: Eine solche Zerlegung ist genau dann möglich, wenn n Dreierrest 0 oder Dreierrest 2 hat.

Beweis:

Teil 1: Die Bedingung ist notwendig:

Teilt man den Satz in drei Haufen gleicher Masse auf, so hat jeder einzelne Haufen die Masse $\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{3}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$. Als Summe ganzer Zahlen muss dieser Ausdruck ganzzahlig sein. Notwendig hierfür ist $3|n(n+1)$ und, da 3 Primzahl ist, sogar $3|n$ oder $3|(n+1)$.

Teil 2: Die Bedingung ist hinreichend:

Variante 1 (vollständige Induktion nach der Gesamtzahl der Gewichtsstücke):

Induktionsanfang: Für n = 5 bzw. n = 6 (dies sind die kleinsten Zahlen n > 3 mit Dreierrest 0 bzw. Dreierrest 2) sind offensichtlich {1,4}, {2,3}, {5} bzw. {1,6}, {2,5}, {3,4} Zerlegungen in Haufen gleicher Masse.

Induktionsvoraussetzung: Sei für ein gegebenes n > 3 mit Dreierrest 0 bzw. Dreierrest 2 eine Zerlegung in drei Haufen gleicher Masse möglich.

Induktionsschluss (von n auf n+3; damit werden alle Zahlen n > 3 mit Dreierrest 0 oder Dreierrest 2 erreicht):

Wir zerlegen zunächst den Satz {1,2,...,n} in zulässiger Weise in drei Haufen (dies ist nach Induktionsvoraussetzung möglich), die wir A, B und C nennen, wobei o.B.d.A. der Haufen A das Gewichtstück 1 enthalten soll. Hieraus konstruieren wir eine zulässige Zerlegung von {1, 2,..., n, n+1, n+2, n+3}: Dem Haufen A fügen wir das Stück n+3 hinzu und entnehmen gleichzeitig das Stück 1; dieses fügen wir zusammen mit dem Stück n+1 dem Haufen B hinzu. Das letzte übrige Stück n+2 kommt zum Haufen C. Damit hat die Masse jedes Haufens um genau n+2 Gramm zugenommen; die drei Haufen haben also immer noch gleiche Masse.

Variante 2: (vollständige Induktion nach der Gesamtzahl der Gewichtsstücke):

Induktionsanfang: Für n = 5, n = 6, n = 8 bzw. n = 9 (dies sind die kleinsten Zahlen n > 3 mit einem Sechserrest aus {0, 2, 3, 5}) sind {1,4}, {2,3}, {5} bzw. {1,6}, {2,5}, {3,4} bzw. {1,5,6}, {2,3,7}, {4,8}, bzw. {1,6,8}, {2,4,9}, {3,5,7} zulässige Zerlegungen.

Induktionsvoraussetzung: Sei für ein gegebenes n > 3 mit einem Sechserrest aus {0, 2, 3, 5} eine zulässige Zerlegung möglich.

Induktionsschluss (von n auf n+6; damit werden alle Zahlen n > 3 mit Dreierrest 0 oder Dreierrest 2 erreicht): Aus der (nach Induktionsvoraussetzung existierenden) zulässigen Zerlegung des Satzes {1,2,...,n} konstruieren wir eine zulässige Zerlegung für {1, 2,..., n, n+1, n+2, ... , n+6}: Einem Haufen fügen wir die Stücke n+1 und n+6 hinzu, dem nächsten die Stücke n+2 und n+5 und dem letzten die Stücke n+3 und n+4. Damit hat die Masse jedes Haufens um genau 2n+7 Gramm zugenommen; die drei Haufen haben also immer noch gleiche Masse.

Variante 3: Es wird ein Konstruktionsverfahren angegeben, mit dem der Satz {1, 2, ... , n} in drei Haufen gleicher Masse zerlegt werden kann; dabei genügt es zu erreichen, dass davon zwei Haufen die Masse $S(n) := \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} i$ haben:

In den ersten Haufen nehmen wir zunächst der Reihe nach die schwersten Stücke n, n–1, n–2, ... , n–k; seine vorläufige Masse bezeichnen wir mit $T(k)$. Dabei wählen wir k so, dass $S(n)$ gerade noch nicht erreicht ist, d. h. dass $T(k) < S(n) \le T(k+1)$. (Evtl. ist der Haufen nach diesem Schritt noch leer.) Zur gewünschten Masse $S(n)$ fehlt damit ein Stück der offensichtlich ganzzahligen

Masse $p := S(n)-T(k)$. Aus obiger Gleichung folgt sofort $0 < S(n)-T(k) \leq T(k+1)-T(k) = n-(k+1)$, also gibt es unter den noch vollständig vorhandenen Stücken $n-k-1$, $n-k-2$, ... , 2, 1 ein solches. Wir fügen es zum ersten Haufen hinzu, der damit die gewünschte Masse S(n) hat.

Es genügt nun, aus dem Haufen $\{n-k-1, n-k-2, ... 2, 1\} \setminus \{ p \}$ (mit $1 \leq p \leq n-k-1$) einen Haufen der Masse $S(n)$ auszuwählen. Wie oben setzen wir ihn zunächst aus den schwersten Stücken $n-k-1$, $n-k-2$, ... , $n-k-r$ zusammen (evtl. fehlt in dieser Reihe das Stück p) und suchen dann noch ein geeignetes letztes Stück $q \leq n-k-r-1$. Nun gibt es zwei Möglichkeiten:

Fall 1.1: $p \neq q$; d.h. unter den restlichen Stücken ist ein solches Stück q vorhanden: Wir fügen es dem zweiten Haufen hinzu, dieser hat dann ebenfalls das Gewicht $S(n)$.

Fall 1.2: $p = q$; d.h. unter den restlichen Stücken ist ein solches Stück q nicht vorhanden: Dann erreichen wir, dass der zweite Haufen die Masse $S(n)$ erhält, indem wir Stücke wie folgt umtauschen:

Fall 1.2.1: $p = q \geq 3$ Wir fügen statt des Stückes q die beiden (sicher verschiedenen und noch nicht verwendeten) Stücke $q-1$ und 1 hinzu.

Fall 1.2.2: $p = q = 2$ Wir ersetzen im zweiten Haufen das Stück $n-k-r$ durch das Stück $n-k-r-1$ und fügen das Stück 3 hinzu. Dieser Umtausch ist auch möglich: Wären nämlich diese beiden Stücke identisch, also $4= n-k-r$, so wären vor dem Umtausch alle Stücke außer 1 und 3 einem der beiden Haufen zugeteilt. Da der zweite Haufen eine noch zu geringe Gesamtmasse hat, hat der restliche eine zu große; damit wäre $S(n) < 1+3 = 4$, also $3 \cdot S(n) < 12$, also $n \leq 4$, wegen $n > 3$ also $n = 4$. Dies steht im Widerspruch zur Tatsache, dass n den Dreierrest 0 oder den Dreierrest 2 hat.

Fall 1.2.3: $p = q = 1$ Dann ersetzen wir im zweiten Haufen das Stück $n-k-r$ durch das Stück $n-k-r-1$ und fügen das Stück 2 hinzu. Auch dieser Umtausch ist möglich: Wären nämlich diese beiden Stücke identisch, also $n-k-r = 3$, so wären vor dem Umtausch alle Stücke außer 2 einem Haufen zugeteilt. Damit wäre $3 \cdot S(n) < 6$, also $n \leq 2$ im Widerspruch zur Bedingung $n>3$.

Bemerkung 1: Hat n den Dreierrest 0, so ist eine Aufteilung in 3 Haufen möglich, bei der die einzelnen Haufen nicht nur die gleiche Masse haben, sondern auch die gleiche Anzahl von Gewichtsstücken.

Bemerkung 2: Zu einem gegebenen Gewichtssatz gibt es i. A. mehrere zulässige Zerlegungen.

Aufgabe 2: Man beweise:

Für jede ganze Zahl n ($n \geq 2$) gibt es n verschiedene natürliche Zahlen mit der Eigenschaft, dass für irgend zwei dieser Zahlen a und b die Summe $a+b$ durch die Differenz $a-b$ teilbar ist.

Wir bezeichnen n Zahlen r_1, r_2, ... , r_n ($n \geq 2$) als *zulässig*, wenn sie die Bedingungen der Aufgabe erfüllen und darüber hinaus gilt: Für $i < j$ ist auch $0 < r_i < r_j$ ($i,j \in \{1, 2, ... , n\}$).

Beweis (vollständige Induktion nach n):

Für $n = 2$ sind z.B. $r_1 = 1$ und $r_2 = 2$ zulässige Zahlen, da $0 < 1 < 2$ und $(2-1)$ Teiler von $(2+1)$ ist.

Nachstehend werden wir zeigen, dass sich aus n ($n \geq 2$) vorgegebenen zulässigen Zahlen r_1, r_2, ... , r_n stets $n+1$ zulässige Zahlen s_1, s_2, ... , s_{n+1} konstruieren lassen. Die Aussage der Aufgabe folgt damit sofort durch vollständige Induktion.

Seien also n zulässige Zahlen r_1, r_2, ... , r_n gegeben. Für $i = 1, 2,..., n$ ist (r_i+0) stets teilbar durch (r_i-0), damit sind die $n+1$ Zahlen $r_0 := 0$, r_1, r_2, ... , r_n zwar nicht zulässig, weil nicht alle positiv, sie erfüllen aber alle anderen Zulässigkeits-Kriterien. Für ein vorgegebenes A definiert man $n+1$ Zahlen $s_{i+1} := A + r_i$ ($i = 0, 1, 2,..., n$); dann ist $\dfrac{s_{i+1}+s_{j+1}}{s_{i+1}-s_{j+1}} = \dfrac{2A+r_i+r_j}{r_i-r_j} = \dfrac{2A}{r_i-r_j} + \dfrac{r_i+r_j}{r_i-r_j}$ für alle $i \neq j$, $i,j = 0, 1, 2,..., n$. Da der rechte Bruch nach Voraussetzung ganz ist, sind die $n+1$ Zahlen s_i dann zulässig, wenn A positiv ganz und so gewählt werden kann, dass $\frac{2A}{r_i - r_j}$ ganz ist für alle $i \neq j$, $i,j = 0, 1, 2, \ldots, n$. Hierfür gibt es mehrere, teilweise offensichtliche Möglichkeiten:

Variante 1: Jedes gemeinsame Vielfache der Differenzen $r_i - r_j$, also $A := \prod_{0 \leq j < i \leq n} (r_i - r_j)$ oder $A := \operatorname{kgV}_{0 \leq j < i \leq n} (r_i - r_j)$. (Man beachte, dass $j = 0$ eingeschlossen ist; damit enthält das Produkt nicht nur alle Differenzen $r_i - r_j$, sondern auch die Zahlen r_i selbst als Faktoren.)

Variante 2: Jedes gemeinsame Vielfache der r_i, also $A := \prod_{i=1}^{n} r_i$ (oder $A := \operatorname{kgV}_{1 \leq i \leq n} (r_i)$ oder $A := r_n!$) genügt sogar schon: Dann ist für alle $0 \leq j < i < n$ (also $i \geq 1$!) die Zahl $A_i := \frac{A}{r_i}$ ganz, ebenso $\frac{r_i + r_j}{r_i - r_j}$. Damit entsteht die Zahl $\frac{2A}{r_i - r_j} = \frac{2r_i}{r_i - r_j} \cdot A_i = \frac{(r_i - r_j) + (r_i + r_j)}{r_i - r_j} \cdot A_i = \left(1 + \frac{r_i + r_j}{r_i - r_j}\right) \cdot A_i$ durch Addition und Multiplikation ganzer Zahlen, ist somit ebenfalls ganz.

Bemerkung 1: Für die Aussage der Aufgabe ist es unerheblich, ob man die "0" zu den natürlichen Zahlen gehörig betrachtet oder nicht. Dagegen ist bei den hier angegebenen Konstruktionen der s_i die Bedingung, dass alle r_i positiv sind, wesentlich.

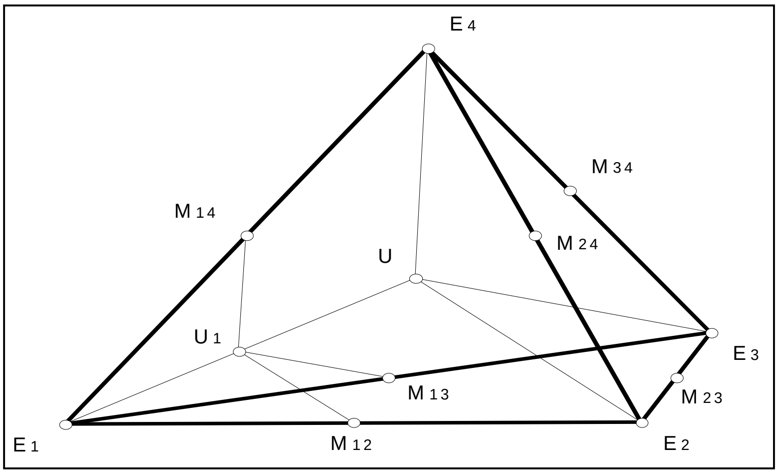
Bemerkung 2: Die Definition $s_1 = A$, $s_{i+1} = A + \frac{A}{r_{n+1-i}}$. ($i = 1, 2, \ldots, n$). führt ebenfalls zu einer Konstruktion von zulässigen Zahlen; ebenso - wenn zusätzlich $A - r_n > 0$ gefordert wird - die Definition $s_1 = A$, $s_{i+1} := A - r_{n+1-i}$

Bemerkung 3: Eine explizite Darstellung von n Zahlen mit den geforderten Eigenschaften ist nicht bekannt.

Aufgabe 3: Durch jede Ecke eines (nicht notwendigerweise regulären) Tetraeders und die Mittelpunkte der drei von dieser Ecke ausgehenden Kanten wird eine Kugel gelegt.

Man beweise, dass es einen Punkt gibt, der auf allen vier Kugeln liegt.

Wir dürfen als bekannt voraussetzen, dass bei einer zentrischen Streckung das Bild einer Kugel wieder eine Kugel ist und dass jedes Tetraeder eine eindeutig bestimmte Umkugel besitzt. Es wird gezeigt, dass deren Mittelpunkt auf allen vier Kugeln liegt.



Die Ecken des Tetraeders seien mit E_i bezeichnet, die Mittelpunkte der Kanten E_iE_j mit M_{ij}, die Kugel durch E_i und die Mitten der davon ausgehenden Kanten mit k_i (i,j=1,2,3,4; $i<j$).

1. Beweis: Der Mittelpunkt der Umkugel sei mit U bezeichnet, ihr Radius mit r. Damit haben die Strecken UE_1, UE_2, UE_3, UE_4 alle die gleiche Länge r. Die Mitte der Strecke UE_1 sei mit U_1 bezeichnet, damit haben die Strecken U_1E_1 und U_1U die Länge ½r, ebenso U_1M_{12} (sie ist als Mittelparallele im Dreieck E_1UE_2 halb so lang wie UE_2) und analog U_1M_{13} und U_1M_{14}. Also ist U_1 der Mittelpunkt von k_1 und U liegt auf dieser Kugel. Analoge Betrachtungen führen zu $U \in k_i$ (i=1,2,3,4).

2. Beweis (mit zentr. Streckung): Offensichtlich werden durch die zentrische Streckung $S(E_1;2)$ die vier Punkte E_1, M_{12}, M_{13}, und M_{14} in die vier Eckpunkte des Tetraeders $E_1E_2E_3E_4$ übergeführt, ebenso die Kugel k_1 in die Umkugel des Tetraeders $E_1E_2E_3E_4$. Damit wird der Mittelpunkt von k_1 einerseits auf den Mittelpunkt der Umkugel abgebildet, andererseits - da der Streckfaktor 2 beträgt und das Streckzentrum auf k_1 liegt - auf einen Punkt auf k_1. Also liegt der Mittelpunkt der Umkugel auf k_1. Diese Überlegungen gelten analog für $S(E_2;2)$ $S(E_3;2)$ und $S(E_4;2)$, also liegt der Mittelpunkt der Umkugel des Tetraeders auf allen 4 Kugeln k_i (i=1,2,3,4).

3. Beweis (mit Satz des Thales): Man betrachte eine beliebige der 4 Kugeln, z. B. k_1. E_1 ist Endpunkt eines Durchmesser von k_1; dessen von E_1 verschiedenen Endpunkt auf k_1 bezeichnen wir mit U. Einer der Halbkreise über dem Durchmesser E_1U enthält M_{12}; nach dem Satz des Thales ist also $\angle E_1M_{12}U = 90°$. Damit liegt U auf einer Mittelsenkrechten von E_1E_2, ist also gleich weit von E_1 und E_2 entfernt. Mit analoger Schlussweise (man ersetze M_{12} durch M_{13} bzw. M_{14}) folgern wir, dass die Entfernungen von U zu allen 4 Ecken gleich sind. Damit ist der Punkt U der Umkugelmittelpunkt des Tetraeders $E_1E_2E_3E_4$. Analoge Betrachtungen führen für jede der vier zu betrachtenden Kugeln zum gleichen Ergebnis.

4. Beweis (vektoriell, dabei wird der Begriff "der zum Ortsvektor $\mathbf{x}$ gehörende Punkt X" verkürzt zu "Punkt $\mathbf{x}$".): Man legt das Tetraeder mit einer Ecke, z.B. mit E_1 in den Ursprung, der Mittelpunkt seiner Umkugel sei mit U bezeichnet. U hat zu allen Ecken die gleiche Entfernung, also ist $(\mathbf{u}-\mathbf{e_2})^2 = (\mathbf{u}-\mathbf{e_3})^2 = (\mathbf{u}-\mathbf{e_4})^2 = (\mathbf{u}-\mathbf{0})^2$. Äquivalente Umformung ergibt mit

$\left(\frac{\mathbf{u}}{2}-\frac{\mathbf{e}_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{\mathbf{u}}{2}-\frac{\mathbf{e}_3}{2}\right)^2 = \left(\frac{\mathbf{u}}{2}-\frac{\mathbf{e}_4}{2}\right)^2 = \left(\frac{\mathbf{u}}{2}-\mathbf{0}\right)^2 = \left(\frac{\mathbf{u}}{2}-\mathbf{u}\right)^2$, dass $\frac{\mathbf{u}}{2}$ zu $\frac{\mathbf{e}_2}{2}, \frac{\mathbf{e}_3}{2}, \frac{\mathbf{e}_4}{2}$ (dies sind die Mittelpunkte der von E_1 ausgehenden Kanten!) und E_1 die gleiche Entfernung hat wie zu U. Also ist $\frac{\mathbf{u}}{2}$ der Mittelpunkt der Kugel k_1 und $U \in k_1$. Analoge Betrachtungen (man legt die Ecke E_2 bzw. E_3 bzw. E_4 in den Ursprung) ergeben $U \in k_2$, $U \in k_3$ und $U \in k_4$.

Bemerkung 1: Alle vier in der Aufgabe gegebenen Kugeln haben den gleichen Radius!

Bemerkung 2: Im zweiten Beweis führt $S(E_1;0{,}5)$ letztlich zum gleichen Ergebnis.

Bemerkung 3: Die Beweise 1, 2 und 4 verwenden letztlich alle drei die Ähnlichkeit der Tetraeder $E_1E_2E_3E_4$ und $E_1M_{12}M_{13}M_{14}$ bzw. die zentrische Streckung, die beide aufeinander abbildet.

Bemerkung 3: Es ist eine offene Frage, ob die Aussage des Satzes gültig bleibt, wenn man anstatt der Mittelpunkte der Tetraederkanten beliebige Teilpunkte auf den Kanten wählt. Jedenfalls ist der analoge Satz in der Ebene gültig (Satz von Miquel): Wählt man auf den Seiten BC, AC, bzw. AB eines Dreiecks ABC je einen Teilpunkt T_A, T_B, bzw. T_C, so haben die drei durch AT_BT_C, BT_CT_A bzw. DT_AT_C festgelegten Kreise genau einen Punkt gemeinsam. (Quelle: Ross Honsberger, Episodes in 19th and 20th Century Euclidean Geometry, Math. Association of America; ISBN 0-88385-639-5, p. 79 ff.)

Aufgabe 4: Man betrachte Summen der Form $\sum_{k=1}^{n} e_k k^3$. mit $e_k \in \{-1, 1\}$.

Gibt es eine solche Summe mit dem Wert 0, wenn

a) $n = 2000$,

b) $n = 2001$ ist?

Antwort: Im Fall a) gibt es eine solche Summe, im Falle b) nicht.

zu a) 1. Beweis (Zusammenfassen der Summanden und stückweise Konstruktion der e_k):

Wir fassen je zwei aufeinanderfolgende Summanden zusammen und geben ihnen entgegengesetzte e_k, setzen also $e_{2i} = -e_{2i-1} =: a_i \in \{1,-1\}$ ($i \in \{1,2,...,1000\}$). Damit erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{2000} e_k k^3 = \sum_{i=1}^{1000}\left(e_{2i-1}\cdot(2i-1)^3 + e_{2i}(2i)^3\right) = \sum_{i=1}^{1000}\left(a_i \cdot \left((2i)^3 - (2i-1)^3\right)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{1000} a_i \cdot \left((2i)^3 - \left((2i)^3 - 3(2i)^2 + 3(2i) - 1\right)\right) = \sum_{i=1}^{1000} a_i \cdot \left(12i^2 - 6i + 1\right).$$

Diesen Gedanken wenden wir zweimal an: Mit $a_{2j} = -\,a_{2j-1} =: b_j \in \{1,-1\}$ ($j \in \{1,2,...,500\}$). sowie $b_{2m} = -\,b_{2m-1} =: c_m \in \{1,-1\}$ ($m \in \{1,2,...,250\}$) erhalten wir

$$... = \sum_{j=1}^{500} b_j \cdot \left(\left(12(2j)^2 - 6(2j) + 1\right) - \left(12(2j-1)^2 - 6(2j-1) + 1\right)\right) = \sum_{j=1}^{500} b_j \cdot (48j - 18).$$

$$... = \sum_{m=1}^{250} c_m \cdot \left(48(2m) - 18\right) - \left(48(2m-1) - 18\right) = \sum_{m=1}^{250} 48 \cdot c_m \ .$$

Z. B. für $c_m := (-1)^m$ sind offensichtlich alle e_k aus $\{-1,1\}$ und ebenso offensichtlich hat der letzte Ausdruck (und damit auch die betrachtete Summe $\sum_{k=1}^{2000} e_k k^3$) Wert Null.

2. Beweis (Zerlegung der Summe und stückweise Definition der e_k):

Wir spalten die Summe auf in zwei Summen mit gleichviel Summanden und formen nach binomischem Lehrsatz um:

$$\sum_{k=1}^{2000} e_k k^3 = \sum_{k=1}^{1000} e_k k^3 + \sum_{k=1001}^{2000} e_k k^3 = \sum_{k=1}^{1000} \left(e_k k^3 + e_{k+1000}(k+1000)^3\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{1000} \left(e_k + e_{k+1000}\right) k^3 + \sum_{k=1}^{1000} \left(e_{k+1000}\left(3 \cdot k^2 \cdot 1000 + 3 \cdot k \cdot 1000^2 + 1000^3\right)\right)$$

Für beliebig vorgegebene e_k ($1 \le k \le 1000$) können wir erreichen, dass die linke Teilsumme den Wert Null erhält, indem wir definieren: $e_{k+1000} := -\,e_k$. Dies setzen wir in der rechten Teilsumme ein:

$$... = 0 - 3 \cdot 1000 \cdot \sum_{k=1}^{1000} e_k k^2 - 3 \cdot 1000^2 \cdot \sum_{k=1}^{1000} e_k k - 1000^3 \cdot \sum_{k=1}^{1000} e_k \ .$$

$\sum_{k=1}^{n} e_k k^3$ kann also dann den Wert Null haben, wenn es für $\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} e_k k^r$ mit $r \in \{0,1,2\}$ geeignete e_k gibt, so dass alle diese Summen gleichzeitig (!) verschwinden.

Die Möglichkeit der Wahl von geeigneten e_k weist man nach, indem man das gleiche Verfahren mehrmals anwendet (zur leichteren Lesbarkeit werden Koeffizienten vor den Summen durch große Buchstaben abgekürzt, da deren Wert bei der Frage, ob die Summen und damit der Gesamtausdruck den Wert Null haben, unerheblich ist:

$$= -A \cdot \sum_{k=1}^{500} \left(e_k k^2 + e_{k+500}(k+500)^2\right) - B \cdot \sum_{k=1}^{500} \left(e_k k + e_{k+500}(k+500)\right) - C \cdot \sum_{k=1}^{500} \left(e_k + e_{k+500}\right).$$

Wieder können wir für beliebig vorgegebene e_k ($1 \le k \le 500$) erreichen, dass die rechte Teilsumme den Wert Null annimmt, indem wir definieren: $e_{k+500} := -\,e_k$; dies setzen wir im restlichen Term ein. Analoges Aufspalten und Umformen lässt auch einen Teil der linken Summe verschwinden und ergibt:

$$... = -A \cdot \sum_{k=1}^{500} \left(e_k k^2 - e_k (k+500)^2\right) - B \cdot \sum_{k=1}^{500} \left(e_k k - e_k (k+500)\right) - 0$$

$$... = +A \cdot \left(2 \cdot 500 \cdot \sum_{k=1}^{500} e_k k + 500^2 \cdot \sum_{k=1}^{500} e_k\right) + B \cdot \left(500 \cdot \sum_{k=1}^{500} e_k\right)$$

Wieder können wir für beliebig vorgegebene e_k ($1 \le k \le 250$) erreichen, dass die beiden rechten Teilsummen den Wert Null annehmen, indem wir definieren: $e_{k+250} := -\,e_k$; wie oben formt man um zu

$$\ldots = \quad A \cdot \left(D \cdot \sum_{k=1}^{250} \left(e_k k + e_{k+250}(k+250) \right) + 0 \right) + \ 0 \ = \ E \cdot \sum_{k=1}^{250} \left((e_k - e_k)\, k - e_k \cdot 250 \right) \ = \ F \cdot \sum_{k=1}^{250} e_k \ .$$

Nun können wir für beliebig vorgegebene e_k ($1 \le k \le 125$) durch die Definition $e_{k+125} := -e_k$ erreichen, dass diese letzte Summe und damit der ganze Ausdruck den Wert Null annimmt.

Zuletzt wählen wir beliebige $e_k \in \{-1, 1\}$ ($1 \le k \le 125$); damit sind die restlichen e_k ($126 \le k \le 2000$) eindeutig bestimmt und es sind alle $e_k \in \{-1, 1\}$.

3. Beweis: Es wird allgemeiner folgender Satz bewiesen:

(1) Es seien e_k für $k \in \{1, 2, \ldots, B\}$ beliebig vorgegeben und für $k \in \{2^m \cdot B + 1, 2^m \cdot B + 2, \ldots, 2^{m+1} \cdot B\}$ ($m \in \{0, 1, 2, .3, \ldots\}$) rekursiv durch die Definition $e_k := -\,e_{k-2^m \cdot B}$ definiert.

Für alle $R = 0, 1, 2, \ldots$ gilt dann: $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^{R+1}B} e_k k^r = 0$ für alle $r \in \{0, 1, 2, \ldots, R\}$.

Beweis durch vollständige Induktion nach R:

Induktionsanfang: Für $R = 0$ und alle $r \in \{0, 1, 2, \ldots, R\}$ ist offensichtlich

$$\sum_{k=1}^{2^{R+1}B} e_k k^r \ = \ \sum_{k=1}^{2 \cdot B} e_k k^0 \ = \ \sum_{k=1}^{B} \left(e_k + e_{k+B} \right) \ = \ \sum_{k=1}^{B} \left(e_k - e_k \right) = 0.$$

Induktionsvoraussetzung: Für ein bestimmtes R sei $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^{R+1}B} e_k k^r = 0$ für alle $r \in \{0, 1, 2, \ldots, R\}$.

Induktionsschluss: Für alle $r \in \{0, 1, 2, \ldots, R+1\}$ lässt sich

$$\sum_{k=1}^{2^{(R+1)+1}B} e_k k^r \ = \ \sum_{k=0}^{2 \cdot 2^{R+1}B} e_k k^r \ = \ \sum_{k=1}^{2^{(R+1)}B} \left(e_k k^r + e_{k+2^{(R+1)}B} \left(k + 2^{(R+1)} B \right)^r \right) \ = \ \sum_{k=1}^{2^{R+1}B} \left(e_k k^r - e_k \left(k + 2^{R+1} B \right)^r \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{2^{R+1}B} \left(e_k - e_k \right) k^r \ - \binom{r}{1} \cdot 2^{R+1} B \cdot \sum_{k=1}^{2^{R+1}B} e_k k^{r-1} \ - \binom{r}{2} \cdot \left(2^{R+1} B \right)^2 \cdot \sum_{k=1}^{2^{R+1}B} e_k k^{r-2} \ - \ \ldots$$

$$\ldots - \binom{r}{r-1} \cdot \left(2^{R+1} B \right)^{r-1} \cdot \sum_{k=1}^{2^{R+1}B} e_k k \ - \ \left(2^{R+1} B \right)^r \cdot \sum_{k=1}^{2^{R+1}B} e_k k^0$$

in Teilsummen aufspalten, von denen die erste unabhängig vom Exponenten r den Wert Null hat und von denen die restlichen nach Induktionsvoraussetzung (alle Exponenten der k sind kleiner oder gleich R) ebenfalls den Wert Null haben.

Nun kann verschieden weiter geschlossen werden:

Variante 1: Man kann in (1) für alle $k \in \{1,2,\ldots,B\}$ alle e_k beliebig aus $\{-1, 1\}$ wählen, damit sind alle anderen nach (1) konstruierten e_k ebenfalls aus $\{-1, 1\}$. Mit $B = 125$ und $R = 3$ hat man dann wie gewünscht $\displaystyle\sum_{k=1}^{2000} e_k k^r \ = \ \sum_{k=1}^{2^{3+1} \cdot 125} e_k k^r = 0$.

Variante 2: Zunächst wird ein weiterer Hilfssatz bewiesen:

(2) Für ein geeignetes B, geeignete e_k ($k \in \{1,2,\ldots,B\}$) und für alle $0 \le r \le R$ sei $\displaystyle\sum_{k=1}^{B} e_k k^r = 0$.

Dann ist auch $\displaystyle\sum_{k=i \cdot B+1}^{(i+1) \cdot B} e_{k-i \cdot B} k^r = 0$ für alle $i = 0,1,2\ldots$ und alle $r \le R$. Die Richtigkeit dieser Behauptung zeigt man wie oben durch einfaches Ausrechnen:

$$\sum_{k=i \cdot B+1}^{(i+1) \cdot B} e_{k-i \cdot B} k^r \ = \ \sum_{k=1}^{B} e_k \left(k + iB \right)^r \ =$$

$$\sum_{k=1}^{B} e_k k^r + \binom{r}{1} \cdot iB \cdot \sum_{k=1}^{B} e_k k^{r-1} + \binom{r}{2} \cdot (iB)^2 \cdot \sum_{k=1}^{B} e_k k^{r-2} + \ldots + \binom{r}{r} \cdot \left(iB^r \right) \cdot \sum_{k=1}^{B} e_k k^0$$

besteht aus Teilsummen, die nach Voraussetzung alle den Wert Null haben.

Zum Nachweis der Aussage der Aufgabe wenden wir zunächst (1) auf B = 2, $e_k = (-1)^k$ ($k\in\{1,2^1\}$) und R = 0 dreimal hintereinander an und erhalten so die Existenz von geeigneten $e_k\in\{-1, 1\}$ ($k\in\{1,2,...,16\}$) mit $\sum_{k=1}^{16} e_k k^3 = 0$ für alle $r\in\{0, 1, 2,.3\}$. Hierauf wenden wir 124 Mal (2) an und erhalten wie gewünscht $\sum_{k=1}^{2000} e_k k^r = \sum_{i=0}^{124} \sum_{k=i\cdot 16+1}^{(i+1)\cdot 16} e_k k^r = \sum_{i=0}^{124} 0 = 0$.

4. Beweis:

Wir zeigen, dass man Koeffizienten $e_k\in\{-1, 1\}$ mit $k\in\{1,2,...,16\}$ so bestimmen kann, dass das Polynom $F(x) := \sum_{k=1}^{16} e_k (x+k)^3$ konstant den Wert Null hat. Dann setzen wir $e_{k+16i} := e_k$ für alle $i\in\{1,2,...,124\}$ und erhalten wie gewünscht $\sum_{k=1}^{2000} e_k k^3 = \sum_{i=0}^{124} \sum_{k=1}^{16} e_k (16i+k)^3 = \sum_{i=0}^{124} F(16i) = 0$

Nachweis-Variante 1: Wie man "leicht" durch Probieren findet und nachrechnet, ist

$(n+1)^3 - (n+2)^3 - (n+3)^3 + (n+4)^3 - (n+5)^3 + (n+6)^3 + (n+7)^3 - (n+8)^3 - (n+9)^3 + (n+10)^3 + (n+11)^3 - (n+12)^3 + (n+13)^3 - (n+14)^3 - (n+15)^3 + (n+16)^3 = 0$ für alle reellen n.

(Eine nachvollziehbare Darstellung dieser Rechnung gehört zu einem vollständigen Beweis, trotzdem wird hierauf an dieser Stelle aus Platzgründen verzichtet.)

Nachweis-Variante 2: Ausgehend von der Funktion $F_0(x) := (x+1)^3$ definiert man durch die Rekursionsgleichung $F_{n+1}(x) := F_n(x) - F_n(x+2^n)$ eine Folge von Polynomfunktionen. Wie unten aus der Durchführung für n = 0, 1, 2, 3 auch ohne konkretes Ausmultiplizieren ersichtlich ist, steht auf der rechten Seite die Differenz zweier Polynome mit gleichem Leitkoeffizienten; die höchste Potenz von x fällt also heraus und der Grad von F_{n+1} ist kleiner als der Grad von F_n. Da F_0 vom Grad 3 ist, ist F_3 höchstens vom Grad 0 und F_4 schließlich konstant Null. Man erhält so für geeignete e_k (diese sind offensichtlich alle aus $\{-1, 1\}$) und geeignete ganze Zahlen $A, B, ..., G$:

$$F_1(x) := F_0(x) - F_0(x+1) = (x+1)^3 - (x+2)^3 = \sum_{k=1}^{2} e_k (x+k)^3 = Ax^2+Bx+C,$$

$$\begin{aligned} F_2(x) &:= F_1(x) - F_1(x+2) = (x+1)^3 - (x+2)^3 - [(x+3)^3 - (x+4)^3] \\ &= \sum_{k=1}^{4} e_k (x+k)^3 = Ax^2+Bx+C - (A(x+2)^2+B(x+2)+C) = Dx + E, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_3(x) &:= F_2(x) - F_2(x+4) = (x+1)^3 - (x+2)^3 - (x+3)^3 + (x+4)^3 - [(x+5)^3 - (x+6)^3 - (x+7)^3 + (x+8)^3] \\ &= \sum_{k=1}^{8} e_k (x+k)^3 = Dx + E - (D(x+4) + E) = G, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_4(x) &:= F_3(x) - F_3(x+8) = (x+1)^3 - (x+2)^3 - (x+3)^3 + (x+4)^3 - (x+5)^3 + (x+6)^3 + (x+7)^3 - (x+8)^3 \\ &\quad - [(x+9)^3 - (x+10)^3 - (x+11)^3 + (x+12)^3 - (x+13)^3 + (x+14)^3 + (x+15)^3 - (x+16)^3] \\ &= \sum_{k=1}^{16} e_k (x+k)^3 = G - G = 0. \end{aligned}$$

Nachweis-Variante 3: Wie man "leicht" durch Probieren findet und nachrechnet, ist

$1^r - 2^r - 3^r + 4^r - 5^r + 6^r + 7^r - 8^r - 9^r + 10^r + 11^r - 12^r + 13^r - 14^r - 15^r + 16^r = 0$ für $r\in\{0,1,2,3\}$.

(Eine nachvollziehbare Darstellung dieser Rechnungen gehört zu einem vollständigen Beweis, trotzdem wird hierauf an dieser Stelle aus Platzgründen verzichtet.)

Wählt man nun für $k\in\{1,2,...,16\}$ die $e_k\in\{-1, 1\}$ so, dass sgn(e_k) gleich dem Vorzeichen von k^r in obiger Summe ist, so ist – weil jede Teilsumme nach Voraussetzung verschwindet –

$$F(x) = \sum_{k=1}^{16} e_k (x+k)^3 = x^3 \sum_{k=1}^{16} e_k k^0 + 3x^2 \sum_{k=1}^{16} e_k k^1 + 3x^1 \sum_{k=1}^{16} e_k k^2 + x^0 \sum_{k=1}^{16} e_k k^3 = 0 \text{ für alle reellen } x.$$

5. Beweis (Konstruktion geeigneter e_k, nach einer Idee von Timo Neumann):

Wir definieren vorläufig $e_k := -1$ falls k ungerade und $e_k := 1$ falls k gerade. Die betrachtete Summe hat dann für die gerade Zahl $n = 2000$ den Wert

$$\sum_{k=1}^{n} e_k k^3 = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} (2i)^3 - \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} (2i-1)^3 = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} (12i^2 - 6i + 1) = 12 \cdot \frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)\left(2\frac{n}{2}+1\right)}{6} - 6 \cdot \frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)}{2} + \frac{n}{2}$$

$$= 4\left(\frac{n}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{n}{2}\right)^2 = 4\cdot 1000^3 + 3\cdot 1000^2 = 2\cdot(1000^3 + (50\cdot 20)^3 + 50^3\cdot 12) = 2\cdot(1000^3 + 50^3\cdot 8012)$$

$$= 2\cdot(1000^3 + 50^3\cdot(6859 + 1000 + 125 + 27 + 1)) = 2\cdot(1000^3 + 50^3\cdot(19^3 + 10^3 + 5^3 + 3^3 + 1^3)),$$

ist also noch um das Doppelte der Summe der dritten Potenzen der Zahlen 1000, $50\cdot 19$, $50\cdot 10$, $50\cdot 5$, $50\cdot 3$ und $50\cdot 1$ zu groß. Wir können sie um diesen Wert verkleinern z.B. durch Ändern der vorläufigen Definition der e_k für eben diese verschiedenen geraden k von +1 nach –1.

Damit ist $\sum_{k=1}^{2000} e_k k^3 = 0$, falls $e_k := -1$ für alle ungeraden k oder $k \in \{1000, 950, 500, 250, 150, 50\}$ sowie $e_k := 1$ für alle andern k.

6. Beweis (Konkrete Angabe geeigneter e_k):

Es sei $e_k := -1$ falls $k \in \{1, 3, 5, 11, 13, 27, 106, 1109, 1683, 1684, \ldots, 2000\}$ und $e_k := 1$ sonst.

Dann ist $\sum_{k=1}^{n} e_k k^3 = \sum_{k=1}^{2000} k^3 - 2\cdot \sum_{\{k|e_k=-1\}} k^3$

$$= \sum_{k=1}^{2000} k^3 - 2\cdot(1^3 + 3^3 + 5^3 + 11^3 + 13^3 + 27^3 + 106^3 + 1109^3 + \sum_{k=1683}^{2000} k^3)$$

$$= \sum_{k=1}^{2000} k^3 - 2\cdot(1 + 27 + 125 + 1331 + 2197 + 19683 + 1191016 + 1363938029 + \sum_{k=1683}^{2000} k^3)$$

$$= \left(\frac{2000\cdot 2001}{2}\right)^2 - 2\cdot\left(1365152409 + \left(\frac{2000\cdot 2001}{2}\right)^2 - \left(\frac{1682\cdot 1683}{2}\right)^2\right)$$

$$= 4004001000000 - 2730304818 - 8008002000000 + 4006731304818 = 0.$$

Bemerkung zum 5. und 6. Beweis: Bei den letzten beiden Lösungen wurde zur Lösungsfindung offensichtlich ein Computer mit einem geeigneten Suchprogramm eingesetzt. Sicher stellt die Entwicklung eines solchen Suchprogramms eine bemerkenswerte Leistung dar, vor allem wenn dieses eine Lösung in zumutbarer Zeit findet. Ein solches Programm darf auch zur Lösungsfindung benützt werden. Zu einem vollständigen Beweis wird aber nach den Teilnahmebedingungen gefordert, dass "*alle für den jeweiligen Nachweis wesentlichen Schritte und Resultate ohne [diese] Hilfsmittel nachvollziehbar und überprüfbar sind*". Deswegen ist – gerade in einem Hausaufgabenwettbewerb – ein ausführliches Vorrechnen wie oben unerlässlich. Ein bloßer Hinweis auf die Möglichkeit "dies leicht ausrechnen zu können" genügt ebenso wenig wie das Beifügen des Listings des Suchprogramms, eines Derive-Arbeitsblattes oder gar einer Excel-Tabelle.

zu b) **Variante 1** (Widerspruchsbeweis durch Paritätsbetrachtung): Ein Summe aus ganzen Zahlen ist bekanntlich genau dann gerade, wenn die Anzahl der ungeraden Summanden gerade ist. Da k^3 genau dann ungerade ist, wenn k ungerade ist, kann die betrachtete Summe nur dann den geradzahligen Wert 0 haben, wenn die Anzahl der ungeraden Zahlen im Intervall $[1,n]$, nämlich $[½\cdot(n+1)]$ gerade ist. Für $n = 2001$ erhalten wir aber mit $[½\cdot(2001+1)] = 1001$ eine ungerade Anzahl.

Variante 2 (Widerspruchsbeweis durch Paritätsbetrachtung): Aus $\sum_{k=1}^{n} e_k k^3 = 0$ und $e_k \in \{-1, 1\}$ folgt sofort $\sum_{\{k|e_k=1\}} k^3 = \sum_{\{k|e_k=-1\}} k^3$; damit ist $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{\{k|e_k=1\}} k^3 + \sum_{\{k|e_k=-1\}} k^3 = 2 \cdot \sum_{\{k|e_k=1\}} k^3$ eine gerade Zahl. Andererseits ist bekanntlich $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2$; dieser Ausdruck ist aber nur dann gerade, wenn im Zähler der Klammer der Faktor 2 mindestens zweimal vorkommt. Da n und n+1 nicht beide den Faktor 2 enthalten können, muss entweder n oder n+1 durch 4 teilbar sein. Diese Bedingung ist aber für n = 2001 nicht erfüllt.

Bemerkung 1: Es gibt also mehrere, prinzipiell verschiedene Möglichkeiten, die e_k so zu wählen, dass die Summe verschwindet.

Bemerkung 2: Das Zwischenergebnis im 4. Beweis besagt: Für positive ganze Zahlen k sei $z(k)$ die größte Zweierpotenz, die kleiner als k ist; ferner werden e_k rekursiv definiert durch $e_1 = 1$; $e_k := -\, e_{k-z(k)}$ für $k \in \{2, \ldots, 2^{n+1}\}$. Für alle reellen Zahlen r und alle nicht-negativen ganzen Zahlen n ist dann $\sum_{k=1}^{2^{n+1}} e_k (k+r)^n = 0$. Anders formuliert:

Versieht man die n-ten Potenzen von beliebigen 2^{n+1} reellen, im Abstand 1 aufeinander folgenden Zahlen mit den durch die e_k ($k = 1, 2, \ldots, 2^{n+1}$) bestimmten Vorzeichen, so hat deren Summe den Wert Null.

Bemerkung 3: Mit dem oben verwendeten Beweisgedanken erhält man

$2^4 \mid n \quad \Rightarrow \quad$ Es gibt $e_k \in \{-1, 1\}$, sodass $\sum_{k=1}^{n} e_k k^3 = 0$

n hat Viererrest 0 oder –1 $\quad \Rightarrow \quad$ Für alle $e_k \in \{-1, 1\}$ ist $\sum_{k=1}^{n} e_k k^3 \neq 0$.

Darüber hinaus lassen Computerberechnungen vermuten:

$\sum_{k=1}^{n} e_k k^3 = 0$ mit $e_k \in \{-1, 1\}$ $\Leftrightarrow$ n hat den Viererrest 0 oder –1 und gleichzeitig $n \geq 12$.

"Beweis"skizze: Die Bedingung ist hinreichend: Man gibt zunächst geeignete e_k für $n \in \{12,15, 16,19,20,23,24\}$ an; man findet diese mit einem geeigneten Suchprogramm auf dem Computer. Zu einer vollständigen Beweisführung gehört dann, dass man die e_k angibt und in nachvollziehbarer Weise ausrechnet, dass die zugehörigen Summen alle den Wert Null haben. (Für n = 15 bzw. n = 16 kann man geeignete e_k auch direkt aus dem Satz aus Bemerkung 2 mit r = –1 bzw. r = 0 erhalten.) Der Rest folgt nun mit dem Satz aus Bemerkung 2 und vollständiger Induktion: Wenn es für ein n geeignete e_k gibt, dann kann man die dritten Potenzen der auf n folgenden 16 ganzen Zahlen zu Null kombinieren und zur Summe hinzufügen, die Behauptung gilt also auch für n+16. Die Bedingung ist notwendig: Es bleibt zu zeigen, dass für $n \in \{3,4,7,8,11\}$ keine geeigneten e_k existieren; dieses Ergebnis liefert ebenfalls das Computerprogramm. In einem vollständigen Beweis muss gerade ein solches Negativ-Ergebnis des Computers in einer nachvollziehbarer Weise bestätigt werden. Im Gegensatz zur Verifizierung der 7 Summen aus dem ersten Teil wird man hier auf Schwierigkeiten stoßen, da man wohl einen Großteil der über 2000 Summen "von Hand" nachrechnen muss.

Bemerkung 4: In Bemerkung 2 ist $e_k = (-1)^{P(k-1)}$ für alle k, wobei $P(n)$ den Zweierrest der Anzahl der Einser in der Binärdarstellung von n bezeichnet. Leider wird dieses $P(n)$ ebenfalls "Parität einer Zahl" genannt (Weisstein, Eric W. "Parity" *Eric Weisstein's World of Mathematics.* http://mathworld.wolfram.com/Parity.html.), ebenso wie "die Eigenschaft, gerade oder ungerade zu sein" (The Concise Dictionary of Mathematics, Oxford University Press, Oxford, New York 1990).