Bundeswettbewerb Mathematik
Wissenschaftszentrum, Postfach 20 14 48, 53144 Bonn
Fon: 0228 - 3727 411 • Fax: 0228 - 3727 413
e-mail: info@bundeswettbewerb-mathematik.de
homepage: http://www.bundeswettbewerb-mathematik.de

Korrekturkommission • Karl Fegert

Aufgaben und Lösungen

1. Runde 2001

Stand: 19. Mai 2001

Aufgabe 1: Auf dem Tisch liegt ein Haufen mit 2001 Spielsteinen, der schrittweise in Haufen mit je drei Steinen umgewandelt werden soll. Dabei besteht ein Schritt darin, dass ein Haufen ausgewählt, daraus ein Stein entfernt und der Resthaufen in zwei Haufen zerlegt wird.

Kann dies mit einer Folge von vollständig ausgeführten Schritten erreicht werden?

Antwort: Nein, es gibt keine Folge von vollständig ausgeführten Schritten, mit der dieser Zustand erreicht werden kann.

1. Beweis (durch Widerspruch): Offensichtlich entsteht mit jedem Zug genau ein zusätzlicher Haufen, und es wird mit jedem Zug genau ein Stein entfernt. Wir bezeichnen die Anzahl der Haufen nach n Zügen mit $h(n)$, die der Steine auf dem Tisch nach n Zügen mit $s(n)$; dann ist $h(n) = n+1$ (A) sowie $s(n) = 2001-n$ (B). Hätte nun nach n Schritten jeder Haufen genau 3 Steine, so wäre auch $3h(n) = s(n)$ (C). Setzt man nun (A) und (B) in (C) ein, so erhält man $3(n+1) = 2001-n$ oder äquivalent $4\cdot n = 1998$. Da 1998 nicht durch 4 teilbar ist, kann diese Bedingung für keine natürliche Zahl n erfüllt werden.

Variante: Die Summe $h(n) + s(n) = n+1 + 2001-n = 2002$ ist invariant. Hätte nun nach n Schritten jeder Haufen genau 3 Steine, so wäre auch $s(n) = 3h(n)$, also $h(n) + s(n) = h(n) + 3h(n) = 4h(n) = 2002$. Da 2002 nicht durch 4 teilbar ist, kann diese Bedingung für keine natürliche Zahl $h(n)$ erfüllt werden.

2. Beweis (durch Umkehrung der Zugfolge): Ein Haufen werde als *zulässig* bezeichnet, wenn seine Spielstein-Anzahl von der Form $4m+3$ ($m\in \mathbb{N}$) [1] ist; in allen anderen Fällen, d.h. wenn die Spielstein-Anzahl von der Form $4m+i$ ($m\in \mathbb{N}$, $i\in\{0,1,2\}$) ist, als *unzulässig*.

Jeder mögliche Schritt lässt sich eindeutig umkehren, indem man die zwei gerade entstandenen Haufen vereinigt und einen Stein hinzufügt. Waren die beiden betroffenen Haufen zulässig, ihre Spielsteinanzahlen also von der Form $4m_1+3$ bzw. $4m_2+3$, so ist die Spielsteinanzahl des bei der Umkehrung entstehenden Haufens von der Form $(4m_1+3) + (4m_2+3) + 1 = (4m+3)$, also wieder zulässig.

Im gewünschten Endzustand sind alle auf dem Tisch liegenden Haufen zulässig. Mehrfaches Anwenden des obigen Schlusses ergibt, dass dieser nur erreicht werden kann, wenn vor jedem Schritt, also auch in der Ausgangssituation alle Haufen auf dem Tisch zulässig sind. Da die Spielsteinanzahl am Anfang von der Form $2001 = 4\cdot 500+1$ ist, ist dies jedoch nicht der Fall.

Bemerkung: Der 2. Beweis lässt sich natürlich auch durch vollständige Induktion über die Kontraposition führen: Ist auf dem Tisch ein unzulässiger Haufen (wie z.B. in der Ausgangssituation), so hat man nach jeder Schrittfolge mindestens einen unzulässigen Haufen auf dem Tisch.

Aufgabe 2: Von einer Folge (a_0, a_1, a_2, ...) reeller Zahlen sei bekannt:

$a_0 = 1$ und $a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_{n+1} + a_n}$ für alle natürlichen Zahlen n.

Man beweise, dass nur eine einzige Folge mit diesen Eigenschaften existiert, und gebe eine explizite Formel für a_n an.

Antwort: Die Folge der Dreieckszahlen, also die Folge (a_n) mit $a_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ hat die geforderte Eigenschaft und sie ist die einzige Folge mit diese Eigenschaft.

Beweisteil 1: Die Folge hat die geforderte Eigenschaft.

Beweis: Es ist tatsächlich $a_0 = \frac{(0+1)(0+2)}{2} = 1$; sowie für alle $n\in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} = \frac{((n+1)+1)((n+1)+2)}{2} = 0 + \frac{(n+2)(n+3)}{2}$$

[1] Mit $\mathbb{N}$ sei – im Gegensatz zur früher verwendeten Bezeichnung – der DIN-Norm folgend die Menge der natürlichen Zahlen *einschließlich* der Null bezeichnet.

$$= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{(n+1)(n+2)}{2}\right) + \frac{(n+2)(n+3)}{2}$$

$$= a_n + \frac{\left(-(n+1)+(n+3)\right)\cdot(n+2)}{2} = a_n + \frac{2(n+2)}{2} = a_n + \sqrt{(n+2)^2\cdot\frac{2}{2}}$$

$$= a_n + \sqrt{\frac{2n^2+8n+8}{2}} = a_n + \sqrt{\frac{n^2+5n+6}{2}+\frac{n^2+3n+2}{2}}$$

$$= a_n + \sqrt{\frac{(n+2)(n+3)}{2}+\frac{(n+1)(n+2)}{2}} = a_n + \sqrt{a_{n+1}+a_n}\,.$$

Beweisteil 2: Es gibt höchstens eine Folge mit dieser Eigenschaft.

1. Beweis: Falls es überhaupt eine solche Folge mit $a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_{n+1}+a_n}$ gibt, so muss a_{n+1} für alle $n\in\mathbb{N}$ eine der beiden Lösungen der quadratischen Gleichung $(a_{n+1}-a_n)^2 = a_{n+1}+a_n$ bzw. der hierzu äquivalenten Gleichung $a_{n+1}{}^2 - (2a_n+1)a_{n+1} + a_n(a_n-1) = 0$ sein. Dies sind

$$a_{n+1} = \frac{2a_n+1\pm\sqrt{(2a_n+1)^2-4a_n(a_n-1)}}{2} = a_n + \frac{1}{2} \pm \sqrt{2a_n+\frac{1}{4}}\,.$$

Von diesen beiden Lösungen kann für jeden Wert von n höchstens diejenige mit dem "+"-Zeichen zu einem existierenden a_{n+1} führen: Da $a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_{n+1}+a_n} \ge a_n$ für alle $n\in\mathbb{N}$, ist die Folge der a_n monoton steigend. Wegen $a_0 > 0$ sind insbesondere alle a_n positiv, die Folge also sogar streng monoton steigend. Damit führt die Lösung mit dem "–"-Zeichen zum Widerspruch

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2} - \sqrt{2a_n+\frac{1}{4}} \;<\; a_n + \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}} \;=\; a_n$$ und scheidet somit aus.

Bemerkung: Die "–"-Lösung muss für <u>alle</u> Werte von n ausgeschlossen werden!

2. Beweis: (durch Widerspruch): Falls es überhaupt Folgen mit den geforderten Eigenschaften gibt, sind diese wegen $a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_{n+1}+a_n} \ge a_n$ monoton steigend; da $a_0 = 1$, ist dann insbesondere $\sqrt{a_{n+1}+a_n} \ge \sqrt{2}$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Wir betrachten eine zweite Folge (b_n), die ebenfalls die geforderte Eigenschaft hat. Wären die beiden Folgen verschieden, gäbe es – nachdem $a_0 = b_0 = 1$ – einen kleinsten Index $k \ge 0$, für den $a_k = b_k$, aber $a_{k+1} \ne b_{k+1}$. Für $n = k$ folgt dann aus den beiden Gleichungen $a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_{n+1}+a_n}$ und $b_{n+1} = b_n + \sqrt{b_{n+1}+b_n}$ sofort durch Subtraktion

$$a_{k+1} - b_{k+1} = a_k - b_k + \sqrt{a_{k+1}+a_k} - \sqrt{b_{k+1}+b_k}\,;$$

dies kann durch Multiplikation mit dem wegen der Monotonie der Folgen positiven Term $\sqrt{a_{k+1}+a_k} + \sqrt{b_{k+1}+b_k}$ sowie unter Berücksichtigung von $a_k = b_k$ äquivalent umgeformt werden zu

$$\left(a_{k+1}-b_{k+1}\right)\cdot\left(\sqrt{a_{k+1}+a_k}+\sqrt{b_{k+1}+b_k}\right) = \left(a_{k+1}-b_{k+1}\right) \quad \text{oder}$$

$$\left(a_{k+1}-b_{k+1}\right)\cdot\left(\sqrt{a_{k+1}+a_k}+\sqrt{b_{k+1}+b_k}-1\right) = 0\,.$$

Dies führt zum gewünschten Widerspruch, da keiner der beiden Faktoren verschwindet: Nach Voraussetzung ist $a_{k+1} \ne b_{k+1}$, also $a_{k+1} - b_{k+1} \ne 0$ sowie $\sqrt{a_{k+1}+a_k} + \sqrt{b_{k+1}+b_k} - 1 \ge 2\sqrt{2} - 1 > 0$.

3. Beweis: Wir definieren unter der Annahme, dass eine Folge (a_n) überhaupt existiert, für alle $n\in\mathbb{N}$ die Hilfsgrößen $b_{n+1} := \frac{a_{n+1}+a_n}{2}$ und $c_{n+1} := \frac{a_{n+1}-a_n}{2}$; es ist dann $a_{n+1} = b_{n+1} + c_{n+1}$ sowie $a_n = b_{n+1} - c_{n+1}$.

Mit diesen Bezeichnungen folgt aus der zweiten Bedingung der Aufgabenstellung sofort (alle Aussagen gelten für alle $n\in\mathbb{N}$ bzw. – falls die Größen b_n oder c_n vorkommen – für alle $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$):

$2c_{n+1} = \sqrt{2b_{n+1}}$ und $c_{n+1}{}^2 = \dfrac{b_{n+1}}{2}$. Dann ist

$$(c_{n+1} + c_n)\cdot(c_{n+1} - c_n) = c_{n+1}{}^2 - c_n{}^2 = \frac{b_{n+1} - b_n}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{a_{n+2} + a_{n+1}}{2} - \frac{a_{n+1} + a_n}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{2} + \frac{a_{n+1} - a_n}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(c_{n+1} + c_n)\,.$$

Da $a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_{n+1} + a_n} \ge a_n$, ist die Folge der a_n monoton steigend, wegen $a_0 > 0$ sind insbesondere alle a_n positiv, die Folge damit sogar streng monoton steigend und $(c_{n+1} + c_n) \neq 0$. Wir können also beide Seiten obiger Gleichung durch diesen Term teilen und erhalten so $(c_{n+1} - c_n) = \dfrac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Hieraus erhalten wir über die Teleskopsumme $c_{n+1} = (c_{n+1} - c_n) + (c_n - c_{n-1}) + (c_{n-1} - c_{n-2}) + ... + (c_2 - c_1) + c_1$ die expliziten Darstellungen

$$c_{n+1} = n\cdot\frac{1}{2} + c_1 \quad \text{und} \quad b_{n+1} = 2c_{n+1}{}^2 = 2\cdot\left(\frac{n}{2} + c_1\right)^2 .$$

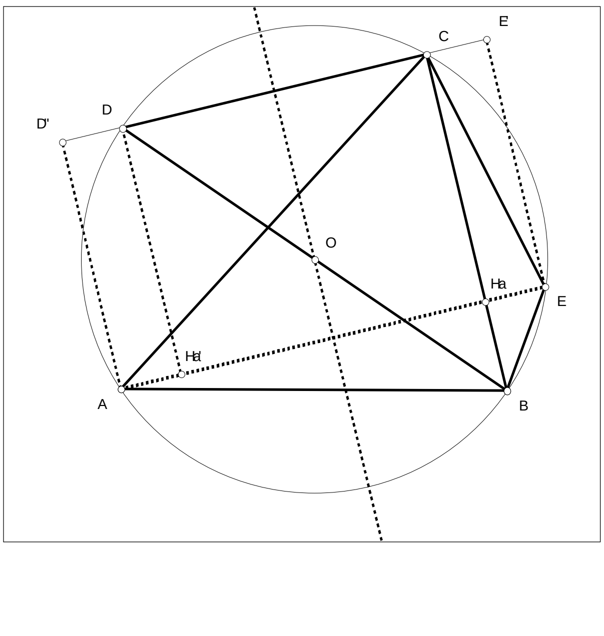
Es folgt $a_n = b_{n+1} - c_{n+1} = 2\cdot\left(\dfrac{n}{2} + c_1\right)^2 - \left(\dfrac{n}{2} + c_1\right) = \dfrac{n^2}{2} + n\cdot\left(2c_1 - \dfrac{1}{2}\right) + (2c_1{}^2 - c_1)$; a_n ist also nach Vorgabe von n und c_1 eindeutig bestimmt. c_1 ist aber ebenfalls bestimmt: Es ist $1 = a_0 = b_1 - c_1 = 2c_1{}^2 - c_1$; diese quadratische Gleichung hat zwar zunächst zwei Lösungen $c_1 = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4}$, also $c_1 = 1$ oder $c_1 = -\dfrac{1}{2}$.

Wegen der strengen Monotonie der Folge (a_n) ist aber $c_1 := \dfrac{a_1 - a_0}{2} > 0$, es bleibt also $c_1 = 1$ als einzige mögliche Lösung. Einsetzen ergibt zusammenfassend: Falls die Folge (a_n) überhaupt existiert, gilt

$$a_n = \frac{n^2}{2} + n\cdot\left(2c_1 - \frac{1}{2}\right) + (2c_1{}^2 - c_1) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\,.$$

Bemerkung: Auch wenn dieser 3. Beweis auf eine explizite Formel für a_n führt, ist damit zunächst nur eine *notwendige* Eigenschaft der Folge gezeigt. Beweisteil 1 ist damit nicht überflüssig.

Aufgabe 3: Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck ABC mit Umkreismittelpunkt O. Die Gerade (BO) schneide den Umkreis nochmals in D, und die Verlängerung der von A ausgehenden Höhe schneide den Kreis in E. Man beweise, dass das Viereck BECD und das Dreieck ABC den gleichen Flächeninhalt haben.



1. Beweis (Zerlegungsbeweis unter Verwendung der Diagonalen BC): Wir bezeichnen den Fußpunkt der Höhe von A auf BC mit H_a, den Fußpunkt des Lotes von D auf AE mit H_a'. Da das Dreieck spitzwinklig ist, ist H_a innerer Punkt sowohl von Strecke BC als auch von Strecke AE. Mit der gleichen Begründung ist O innerer Punkt des Dreiecks ABC; damit liegt H_a' zwischen A und H_a, und die Diagonale CB verläuft im Innern des Vierecks BECD.

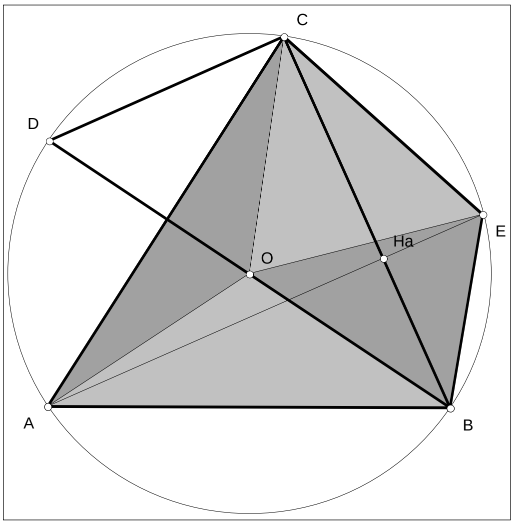
Nach Konstruktion von D ist der Umkreis von Dreieck ABC gleichzeitig Thaleskreis über DB, also ist $\angle DCB = 90°$. Damit stehen DC und AE beide senkrecht auf BC, sind also parallele Sehnen am gleichen Kreis. Sie besitzen also eine gemeinsame Mittelsenkrechte, die gleichzeitig Symmetrieachse für das Trapez ADCE ist. Insbesondere haben die Strecken AH_a' und H_aE gleiche Länge; ebenso im

Rechteck $H_aH_a'CD$ die gegenüberliegenden Seiten CD und H_aH_a'. Nun kann verschieden weiter argumentiert werden:

Variante 1: Das Viereck BECD setzt sich aus den Dreiecken DBC und CBE zusammen; für die Flächeninhalte gilt also wie behauptet

$$|ABC| = 0{,}5\,\overline{BC}\cdot\overline{AH_a} = 0{,}5\cdot\overline{BC}\cdot\left(\overline{AH_a'}+\overline{H_a'H_a}\right) = 0{,}5\cdot\overline{BC}\cdot\left(\overline{H_aE}+\overline{DC}\right) = |BCE| + |BCD| = |BECD|.$$

Variante 2: Das Viereck ABCD wird in drei schulüblichen Schritten in das flächengleiche Dreieck ABC umgewandelt: Wir verschieben E um $\overrightarrow{H_aC}$, damit kommt E zu einem Punkt, den wir E' nennen. E' liegt auf der Gerade (DC), ferner ist $H_aC||BC$, also ist |BECD|=|BE'D|. Nun verschieben wir die Strecke DE' um $\overrightarrow{EH_a}$, damit kommt E' nach C und D zu einem Punkt, den wir D" nennen; da $EH_a||DC$, ist |BE'D| = |BCD"|. Zuletzt verschieben wir D" um $\overrightarrow{CH_a}$; da EH_a und $H_a'A$ gleiche Länge haben, kommt dabei D" nach A, und – da D"A||BC – ist |BECD| = |BE'D| = |BCD"| = |BCA| .



2. Beweis: (Zerlegung unter Verwendung des Umkreismittelpunktes): Da das Dreieck ABC spitzwinklig ist, liegt sein Umkreismittelpunkt O im Innern, damit ist

|ABC| = |BOC| + |AOB| + |COA|.

Nach Konstruktion liegen auf demjenigen Halbkreisbogen über BD, der den Punkt A nicht enthält, der Punkt E zwischen B und C, sowie C zwischen E und D; damit ist

|BECD| = |COD| + |EOC| + |BOE|.

Wir zeigen die Behauptung, indem wir zeigen, dass in den beiden Summen die Summanden paarweise gleich sind:

Variante 1: Da O Mittelpunkt der Strecke BD ist, teilt die Strecke CO das Dreieck BCD in zwei flächengleiche Dreiecke COD und BOC auf, also ist |COD| = |BOC|.

AE ist eine Verlängerung der Höhe auf BC, C liegt auf dem Thaleskreis über BD, also besitzen DC und AE das gemeinsame Lot BC. Sie sind also parallele Sehnen im gleichen Kreis und besitzen daher eine gemeinsame Symmetrie-Achse, bezüglich derer auch die Strecken EC und AD symmetrisch liegen. Also ist $\angle EOC = \angle DOA$, damit gibt es eine Drehung um den Punkt O, die das Dreieck EOC in das Dreieck DOA überführt. Letzteres bildet zusammen mit dem Dreieck AOB das Dreieck DAB. Dieses wird wie oben durch die Strecke AO in zwei flächengleiche Dreiecke aufgeteilt, also ist |EOC| = |AOD| = |AOB|.

In analoger Weise führen wir mit einer Drehung um den Punkt O das Dreieck AOC in das Dreieck DOE über; nun teilt die Strecke EO das Dreieck DBE in zwei flächengleiche Dreiecke auf; also ist |COA| = |DOE| = |BOE|.

Variante 2: Den Radius des Umkreises von Dreieck ABC bezeichnen wir mit r. Mit bekannten Formeln gilt dann: $\angle AOB = 2\gamma$ (Umfangswinkel über Bogen AB) = $2\cdot(90°-\angle H_aAC)$ (Innenwinkelsumme im rechtwinkligen Dreieck H_aAC) = $180°-2\cdot\angle EAC$ (Konstruktion von E) = $180°-\angle EOC$ (Umfangswinkel über Bogen CE).

Damit ist $|AOB| = 0{,}5r^2 sin(\angle AOB) = 0{,}5r^2 sin(180°-\angle EOC) = 0{,}5r^2 sin(\angle EOC) = |EOC|$.

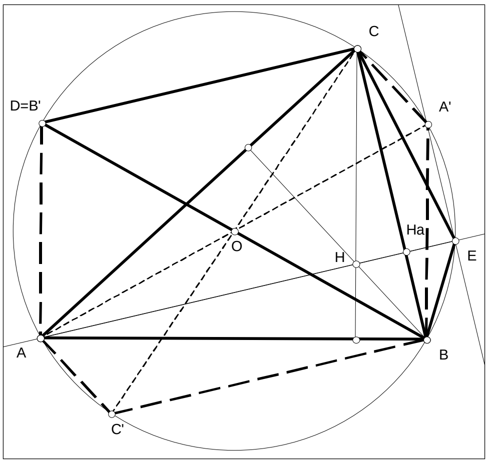
Ferner ist $|BOC| = 0{,}5r^2 sin(\angle BOC) = 0{,}5r^2 sin(180°-\angle COD) = 0{,}5r^2 sin(\angle COD) = |COD|$.

Analog zur ersten Überlegung schließen wir $\angle COA = 2\beta$ (Umfangswinkel über Bogen CA) = $2\cdot(90°-\angle BAH_a)$ (Innenwinkelsumme im rechtwinkligen Dreieck BAH_a) = $180°-2\angle BAE$ (Konstruktion von E) = $180°-\angle BOE$ (Umfangswinkel über Bogen BE).

Damit ist $|COA| = 0{,}5r^2 sin(\angle COA) = 0{,}5r^2 sin(180°-\angle BOE) = 0{,}5r^2 sin(\angle BOE) = |BOE|$.

Hieraus folgt sofort die Behauptung |ABC| = |AOB|+|BOC|+|COA| = |EOC|+|COD|+|BOE|=|BECD|.

Bemerkung: Die Flächengleichheit der betrachteten Dreiecke kann man auch ohne Verwendung der Sinusfunktion beweisen, indem man sie durch die Höhe von O jeweils in zwei rechtwinklige Teildreiecke zerlegt. Alle diese vier Teildreiecke sind dann kongruent.



3. Beweis: (Zerlegung unter Verwendung des Höhenschnittpunktes H): Da das Dreieck ABC spitzwinklig ist, liegt sein Höhenschnittpunkt H im Innern, sein Flächeninhalt ist also die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke AHB, BHC und CHA. Da nach Konstruktion E zwischen B und C sowie C zwischen E und D liegt, ist der Flächeninhalt des Vierecks BECD die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke EOC, COD und BOE.

Wir spiegeln die Punkte A, B, und C am Umkreismittelpunkt O und erhalten so die Punkte A', B' und C'. (Natürlich ist B' = D und alle Punkte liegen ebenfalls auf dem Umkreis von Dreieck ABC.) Anschließend zeigen wir, dass das Dreieck ABC und das Viereck BECD beide den halben Flächeninhalt von Sechseck AC'BA'CB' haben:

Es ist CH||A'B, da diese Geraden das gemeinsame Lot AB haben (CH ist Höhe im Dreieck ABC und B liegt auf dem Thaleskreis über AA'); analog ist BH||A'C, da sie das gemeinsame Lot AC haben. Damit ist das Viereck CHBA' ein Parallelogramm, das durch die Diagonale BC nach bekanntem Lehrsatz in zwei flächengleiche Dreiecke geteilt wird, also ist |CHBA'| = 2·|BHC|.

Nach gleicher Argumentation (man muss nur die Punkte zyklisch umbenennen) sind die Vierecke AHCD bzw. BHAC' Parallelogramme mit |AHCD| = 2·|AHC| bzw. |BHAC'| = 2·|AHB|. Insgesamt ist 2·|ABC| = |AC'BA'CB'|.

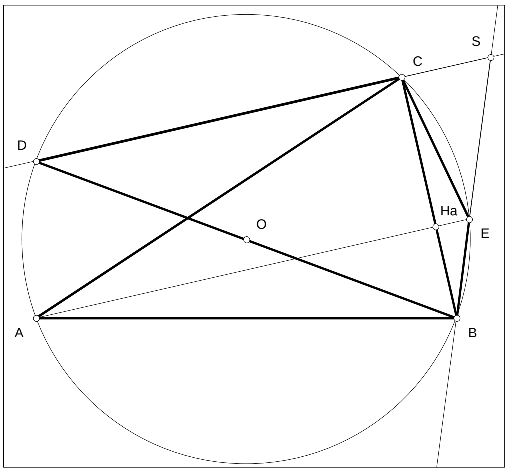
Nun formen wir das Viereck BECD flächengleich um: Es ist AE Höhe im Dreieck ABC, steht also senkrecht auf BC, gleichzeitig ist E auf dem Halbkreis über AA', also steht AE auch senkrecht auf A'E, mithin ist A'E||BC. Damit haben die Dreiecke BCE und BCA' gleiche Höhe und Grundseite, sind also flächengleich. Damit ist |BECD| = |BA'CB'|.

Die Punktspiegelung an O führt das Viereck BA'CD in das Viereck DAC'B über, Urbild und Bild liegen auf verschiedenen Seiten der gemeinsamen Seite BD. Damit ist 2·|BECD| = 2·|BA'CD| = |AC'BA'CB'|.

Variante (als Beweisskizze formuliert): Man definiert H als Schnittpunkt von AE mit der Parallelen zu AD durch C; da AD ⊥ AB (Thales!) ist dann auch AH ⊥ AB. Wie im 1. Beweis ist zu zeigen, dass $\overline{BC}\cdot\left(\overline{H_aE}+\overline{DC}\right)=\overline{BC}\cdot\overline{AH_a}$. Da AHCD ein Parallelogramm ist, ist $\overline{DC}=\overline{AH}$ und es genügt, $\overline{HH_a}=\overline{H_aE}$ zu zeigen. Eine Betrachtung der Winkel bei C (∠BCE = ∠BAE (gleicher Bogen BE) = ∠HCB (Schenkel stehen paarweise senkrecht)) ergibt, dass im Dreieck HCE die Höhe CH_a gleichzeitig Winkelhalbierende und damit auch Seitenhalbierende ist. Dies entspricht gerade der Behauptung.

Bemerkung: Da das Viereck CHBA' ein Parallelogramm ist, haben die Dreiecke BHC und CBA' die gleiche Höhe und damit auch das Dreieck CBE. Das heißt aber, dass CB die Strecke HE halbiert. Dies – oder auch die Gedankenführung in der Variante – führt zu folgendem Lehrsatz:

Spiegelt man den Höhenschnittpunkt in einem spitzwinkligen Dreieck an dessen Seiten, so liegen die Spiegelbilder auf dem Umkreis des Dreiecks.



4. Beweis (über ähnliche Dreiecke): Zur Beweisführung ergänzen wir die Figur durch den sicher außerhalb des Kreises liegenden Schnittpunkt der Geraden (DC) und (BE), er wird mit S bezeichnet. Die Dreiecke ABC, DBS und ECS sind ähnlich, da sie gleiche Innenwinkel besitzen:

∠BDS
= ∠BAC (beide sind Winkel über dem Bogen BC)
= 180° – ∠CEB (gegenüberliegender Winkel im Sehnenviereck ABEC)
= ∠CES (Nachbarwinkel); ferner ist

∠ACB
= ∠AEB (beide sind Winkel über dem Bogen AB)
= ∠DSB (Stufenwinkel an den Geraden (AE) || (DS))
= ∠ESC (da C auf DS liegt).

(Zum Nachweis, dass (AE)||((DS), benützen wir, dass nach Konstruktion BC ⊥ AE und nach Thalessatz BC ⊥ DC, also ist BS gemeinsames Lot zu DS und AE.)

Wegen der Ähnlichkeit können wir den Flächeninhalt der Dreiecke DBS und ECS als Vielfaches des Flächeninhaltes des Dreiecks ABC darstellen:

$$|DBS| = |ABC| \cdot \left(\frac{\overline{BS}}{\overline{BC}}\right)^2 \text{ und } |ECS| = |ABC| \cdot \left(\frac{\overline{CS}}{\overline{BC}}\right)^2.$$

Ferner ist nach dem Satz von Thales das Dreieck BCS bei C rechtwinklig: Damit ist $\overline{BS}^2 - \overline{CS}^2 = \overline{BC}^2$ und es folgt unmittelbar die Behauptung (S liegt sicher außerhalb des Vierecks BECD!):

$$|BECD| = |DBS| - |ECS| = |ABC| \cdot \left(\frac{\overline{BS}}{\overline{BC}}\right)^2 - |ABC| \cdot \left(\frac{\overline{CS}}{\overline{BC}}\right)^2 = |ABC| \cdot \left(\frac{\overline{BS}^2 - \overline{CS}^2}{\overline{BC}^2}\right) = |ABC|.$$

Bemerkung: Zu einem vollständigen Beweis gehört stets eine Diskussion der Lagebeziehungen der einzelnen verwendeten geometrischen Objekte. Z.B. gilt die Beziehung |ABC| = |BOC| + |AOB| + |COA| nur dann, wenn der Punkt O im Innern des Dreiecks ABC liegt. Im Rahmen der ersten Runde wurde das Fehlen einer solchen Diskussion nicht preismindernd gewertet.

Aufgabe 4: Man beweise: Bei jeder positiven ganzen Zahl ist die Anzahl der Teiler, deren Dezimaldarstellung auf 1 oder 9 endet, nicht kleiner als die Anzahl der Teiler, deren Dezimaldarstellung auf 3 oder 7 endet.

Alle folgenden Aussagen über Ziffern einer Zahl beziehen sich stets auf deren Darstellung im Zehnersystem. In der Beweisführung wählen wir folgende Bezeichnungen:

$T(n)$	sei die Menge der Teiler von n,
$T_{x,y,...}(n)$	die Menge der Teiler von n, deren Endziffer aus $\{x,y,...\}$ ist,
$t_{x,y,...}(n)$:=	$\lvert T_{x,y,...}(n)\rvert$,
P	sei die Menge der Primzahlen,
$P_{x,y,...}$	die Menge derjenigen Primzahlen, deren Endziffer aus $\{x,y,...\}$ ist.

Ohne Beweis werden im Folgenden mehrfach die häufig aus der Schule bekannten, aber dort auch nicht bewiesenen Sätze angewandt :

(1) Jede positive ganze Zahl n besitzt eine bis auf Reihenfolge eindeutige Primfaktorzerlegung (abgekürzt: PFZ) $n = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{e(p_i)}$.

Dabei seien p_1, p_2, ... die der Größe nach geordneten Primzahlen, $e(p_i)$ seien nichtnegative ganze Zahlen; mit $e(p_i) = 0$ für alle i hat man mit dem leeren Produkt auch der Zahl $n = 1$ eine PFZ zugewiesen. (Der Exponent $e(p_i)$ hängt natürlich auch von n ab, dies wird zur besseren Lesbarkeit nicht extra durch einen Index angegeben.)

***Bemerkung**: Aus formulierungstechnischen Gründen wurde für die Beweise 1 bis 3 die PFZ einer Zahl als <u>unendliches</u> Produkt $n = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{e(p_i)}$ dargestellt, d.h. ein Produkt, in dem die Potenzen <u>aller</u> Primzahlen vorkommen; dabei haben dann fast alle Exponenten $e(p_k)$ den Wert 0. Im 4. Beweis wird die <u>endliche</u> Darstellung $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{e(p_i)}$ gewählt; hier werden nur die "echten" Primzahlen in der PFZ verwendet, d.h. hier sind alle $e(p_k) \geq 1$.*

(2) Jeder Teiler m der positiven ganzen Zahl $n = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{e(p_i)}$ lässt sich mit $m = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{d(p_i)}$ (wobei $d(p_i) \leq e(p_i)$ für alle i =1,2,3,...) eindeutig als Teilprodukt dieser PFZ schreiben; und jedes solches Teilprodukt der PFZ von n ist Teiler von n.

Unmittelbar einsichtig sind die folgenden weiteren Hilfssätze:

Die Endziffer eines Produktes ist die Endziffer des Produktes der Endziffern der Faktoren.

Hieraus ergibt sich unmittelbar:

(3) Enthält ein Produkt mindestens einen Faktor mit einer Endziffer aus {0; 2; 4; 5; 6; 8}, so ist die Endziffer des Produktes gerade oder 5, also nicht aus {1; 3; 7; 9}.

(3') Ein Produkt hat also genau dann eine Endziffer aus {1; 3; 7; 9}, wenn alle Faktoren eine Endziffer aus {1; 3; 7; 9} haben oder wenn es das leere Produkt ist.

Wie eine einfache Multiplikationstabelle (1·1=1, 1·3=3, 1·7=7, 1·9=9, 3·3=9, 3·7=21, 3·9=27, 7·7=49, 7·9=63, 9·9=81) zeigt, gilt schärfer:

(4) Ein Produkt aus Faktoren mit Endziffern aus {1; 3; 7; 9} hat genau dann eine Endziffer aus {3,7}), wenn die Anzahl der Faktoren mit Endziffern aus {3; 7} ungerade ist; sonst ist die Endziffer aus {1,9}. (Der Fall des leeren Produktes mit Endziffer 1 ist hierin enthalten.)

1. Beweis (vollständige Induktion nach n):

Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist offenbar $T_{1,9}(1) = \{1\}$ und $T_{3,7}(1) = \{\}$. Damit ist mit $t_{1,9} = 1 > 0 = t_{3,7}(1)$ die Aussage richtig.

Induktionsannahme: Für ein bestimmtes n sei $t_{1,9}(i) \geq t_{3,7}(i)$ für alle $i \leq n$.

Induktionsschluss: Bei der Untersuchung von n+1 unterscheiden wir zwei Fälle:

Fall 1: Die PFZ $n+1=\prod_{p\in P} p^{e(p)}$ enthält weniger als zwei Primfaktoren mit positivem Exponenten.

Es ist also n+1 eine reine Primzahlpotenz, d. h. $n+1 = p^e$ für ein geeignetes $p\in$ P und ein geeignetes $e\in \mathbb{N}$; da $n+1 > 1$, ist sogar $e \geq 1$. Dann ist $T(n+1) = \{p^0, p^1, p^2, \ldots , p^e\}$. Wie nachfolgende Fallunterscheidung zeigt, ist nach Hilfssatz (3) und (4) stets $t_{1,9}(p^e) \geq t_{3,7}(p^e)$:

Fall 1 *i*) Endziffer von p ist aus {2,5}: Für alle $p\in$ P und $e\in \mathbb{N}$ ist $T_{1,9}(p^e) = \{1\}$ und $T_{3,7}(p^e) = \{\}$, also mit $t_{1,9}(p^e) = 1 > 0 = t_{3,7}(p^e)$ die Aussage richtig.

Fall 1 *ii*) Endziffer von p ist aus {1,9}: Dann ist jeder Teiler ein Produkt, von dessen Faktoren keiner eine Endziffer aus {3,7} hat. Damit ist die Endziffer jedes Teilers aus {1,9} und mit $t_{1,9}(p^e) = e+1 > 0 = t_{3,7}(p^e)$ die Aussage richtig.

Fall 1 *iii*) Endziffer von p ist aus {3,7}: Die Endziffer von p^e ist für gerade e (also für e = 0, 2, 4,...) aus {1,9}; für ungerade e (also e = 1, 3, 5,...) aus {3,7}. Durch einfaches Abzählen folgt für ungerade e die Beziehung $t_{1,9}(p^e) = t_{3,7}(p^e)$, für gerade e folgt $t_{1,9}(p^e) = t_{3,7}(p^e) +1$, in beiden Fällen also $t_{1,9}(p^e) \geq t_{3,7}(p^e)$.

Weitere Primzahlen gibt es nicht, die Fallunterscheidung ist damit abgeschlossen.

Fall 2: Die PFZ $n+1=\prod_{p\in P} p^{e(p)}$ enthält mindestens zwei Primfaktoren mit positivem Exponenten.

Ein solcher Primfaktor sei p_k. Wir spalten die zugehörige Primzahlpotenz in der PFZ von n+1 ab, schreiben also $n+1 = p_k^{e(p_k)} \cdot \prod_{p\in P, p\neq p_k}^{\infty} p^{e(p)} = r \cdot s$ mit $r := p_k^{e(p_k)}$ und $s := \prod_{p\in P, p\neq p_k} p^{e(p)}$ als Produkt zweier teilerfremder Zahlen. Da außer $e(p_k)$ noch ein weiteres $e(p)$ positiv ist, ist $1 < r < n+1$ und $1 < s < n+1$. Analog schreiben wir nun jeden Teiler m von n+1 als Produkt: $m = p_k^{d(p_k)} \cdot \prod_{p\in P, p\neq p_k}^{\infty} p^{d(p)} = r' \cdot s'$ mit $r' := p_k^{d(p_k)}$ und $s' := \prod_{p\in P, p\neq p_k} p^{d(p)}$. Aus der Eindeutigkeit der PFZ folgt sofort, dass r' Teiler von r und s' Teiler von s ist und dass zu jedem solchen m genau ein solches Paar r', s' gehört; umgekehrt führt auch jedes Produkt von Teilern von r bzw. s zu einem Teiler von n+1. Damit ist $T(n+1) = \{r' \cdot s' |\ r'$ ist Teiler von r und s' ist Teiler von s } und nach dem Zählprinzip zusätzlich: $|T(n+1)| = |T(r)| \cdot |T(s)|$.

Nach Hilfssatz (4) hat dabei m genau dann die Endziffer aus {1,9}, wenn beide Faktoren r' und s' Endziffern aus {1,9} haben oder wenn beide Faktoren r' und s' Endziffern aus {3,7} haben. m hat genau dann Endziffern aus {3,7}, wenn einer der beiden Faktoren r' und s' Endziffern aus {1,9} und der andere Endziffern aus {3,7} hat. Also gilt nach dem Zählprinzip

$$t_{1,9}(n+1) = t_{1,9}(r) \cdot t_{1,9}(s) + t_{3,7}(r) \cdot t_{3,7}(s) \quad \text{und}$$

$$t_{3,7}(n+1) = t_{1,9}(r) \cdot t_{3,7}(s) + t_{3,7}(r) \cdot t_{1,9}(s) .$$

Da $r < n+1$ und $s < n+1$, gilt für beide Zahlen die Induktionsannahme. Es ist also

$$t_{1,9}(r) \geq t_{3,7}(r) \quad \text{und} \quad t_{1,9}(s) \geq t_{3,7}(s) .$$

Nun lässt sich die Behauptung leicht nachweisen:

$$\begin{aligned} t_{1,9}(n+1) - t_{3,7}(n+1) &= t_{1,9}(r) \cdot t_{1,9}(s) + t_{3,7}(r) \cdot t_{3,7}(s) - [\, t_{1,9}(r) \cdot t_{3,7}(s) + t_{3,7}(r) \cdot t_{1,9}(s) \,] \\ &= t_{1,9}(r) \cdot [t_{1,9}(s) - t_{3,7}(r)] + t_{3,7}(r) \cdot [\, t_{3,7}(s) - t_{1,9}(s) \,] \\ &= [t_{1,9}(r) - t_{3,7}(r)] \cdot [t_{1,9}(s) - t_{3,7}(s)] \\ &\geq 0 \text{ , da nach Voraussetzung beide Faktoren nicht negativ sind.} \end{aligned}$$

2. Beweis (vollständige Induktion nach der Anzahl r verschiedener Primzahlpotenzen mit positivem Exponenten in der PFZ von n):

Dieser Beweis verläuft letztlich gleich wie der erste Beweis: Die im Induktionsschritt hinzukommende (r+1)-te Primzahlpotenz wird als eigener Faktor abgespalten. Dabei lässt sich evtl. kürzer argumentieren, weil man direkt mit der Endziffer der hinzukommenden Primzahl argumentieren kann.

3. Beweis: Für $n = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{e(p_i)}$ ist nach der einleitenden Bemerkung

$$T_{1,3,7,9}(n) = \left\{ \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{d(p_i)} \mid d(p_i) \leq e(p_i),\ \ d(2) = d(5) = 0,\ \ i = 1,2,3,... \right\}.$$

Das Produkt in dieser Mengendefinition spalten wir auf in zwei Produkte: das erste Produkt enthält alle Potenzen von Primzahlen mit Endziffer 3 oder 7, das zweite alle solchen mit Endziffern 1 oder 9; andere Primzahlen gibt es wegen des Ausschlusses von 2 und 5 nicht. Gleichzeitig schreiben wir etwas kürzer, indem wir die Bedingungen $d(p_i) \leq e(p_i)$, $d(2) = d(5) = 0$, $i = 1,2,3,...$ nicht mehr explizit anführen und die Zählindizes weglassen:

$$T_{1,3,7,9}(n) = \left\{ \prod_{p \in P_{3,7}} p^{d(p)} \cdot \prod_{p \in P_{1,9}} p^{d(p)} \right\}.$$

Diese Menge zerlegen wird in disjunkte Teilmengen, von denen jede entweder ganz in $T_{1,9}$ oder ganz in $T_{3,7}$ enthalten ist. Anschließend zeigen wir die Behauptung, indem wir deren Mächtigkeiten vergleichen.

Fall 1: In der PFZ von n hat mindestens eine Primzahl aus $P_{3,7}$ einen ungeraden Exponenten.

Die zugehörige Primzahl nennen wir p_k, es ist also $e(p_k) \geq 1$. Die zugehörige Primzahlpotenz spalten wir ab und zerlegen weiter in vier Teilmengen, die wir entsprechend ihrer Konstruktion mit T_{gg}, T_{uu}, T_{gu} und T_{ug} bezeichnen:

$$T_{1,3,7,9}(n) = \left\{ p_k^{d(p_k)} \cdot \prod_{p\in P_{3,7},\, p\neq p_k} p^{d(p)} \cdot \prod_{p\in P_{1,9}} p^{d(p)} \right\}$$

$$= \left\{ p_k^{d(p_k)} \cdot \prod_{p\in P_{3,7},\, p\neq p_k} p^{d(p)} \cdot \prod_{p\in P_{1,9}} p^{d(p)} \mid d(p_k) \text{ gerade und } \sum_{p\in P_{3,7},\, p\neq p_k} d(p) \text{ gerade} \right\}$$

$$\cup \left\{ p_k^{d(p_k)} \cdot \prod_{p\in P_{3,7},\, p\neq p_k} p^{d(p)} \cdot \prod_{p\in P_{1,9}} p^{d(p)} \mid d(p_k) \text{ ungerade und } \sum_{p\in P_{3,7},\, p\neq p_k} d(p) \text{ ungerade} \right\}$$

$$\cup \left\{ p_k^{d(p_k)} \cdot \prod_{p\in P_{3,7},\, p\neq p_k} p^{d(p)} \cdot \prod_{p\in P_{1,9}} p^{d(p)} \mid d(p_k) \text{ gerade und } \sum_{p\in P_{3,7},\, p\neq p_k} d(p) \text{ ungerade} \right\}$$

$$\cup \left\{ p_k^{d(p_k)} \cdot \prod_{p\in P_{3,7},\, p\neq p_k} p^{d(p)} \cdot \prod_{p\in P_{1,9}} p^{d(p)} \mid d(p_k) \text{ ungerade und } \sum_{p\in P_{3,7},\, p\neq p_k} d(p) \text{ gerade} \right\}.$$

Offensichtlich kommt jeder Teiler aus $T_{1,3,7,9}(n)$ in genau einer dieser vier Teilmengen vor; mit T_{gg}, T_{uu}, T_{gu} und T_{ug} ist also tatsächlich eine Zerlegung von $T_{1,3,7,9}(n)$ gegeben.

In jedem Produkt aus T_{gg} bzw. T_{uu} ist nach Konstruktion $d(p_k) + \sum_{p\in P_{3,7},\, p\neq p_k} d(p)$, also die Summe der Exponenten der Primfaktoren mit Endziffer 3 oder 7, als Summe zweier gerader bzw. ungerader Zahlen wieder gerade. Damit ist nach Hilfssatz (4) $T_{gg}\subset T_{1,9}$ und auch $T_{uu}\subset T_{1,9}$; mit gleicher Argumentation gilt $T_{gu}\subset T_{3,7}$ und $T_{ug}\subset T_{3,7}$. Damit ist $T_{1,9} = T_{gg}\cup T_{uu}$.und $T_{3,7} = T_{gu}\cup T_{ug}$. Andererseits enthalten – da es bei ungeradem $e(p_k)$ in der Menge $\{0,1,2, ...e(p_k)\}$ gleich viele gerade wie ungerade Zahlen gibt – T_{gg} und T_{ug} gleich viele Elemente, ebenso T_{gu} und T_{uu}. Hieraus folgt schärfer als behauptet: $|T_{1,9}| = |T_{gg}|+|T_{uu}| = |T_{gu}|+|T_{ug}| = |T_{3,7}|$.

Fall 2: In der PFZ von n hat jede Primzahl aus $P_{3,7}$ einen geraden Exponenten.

(Man beachte, dass hierin der Fall $n = 1$ enthalten ist.)

Ähnlich wie in Fall 1 zerlegen wir $T_{1,3,7,9}(n)$, jetzt allerdings in fünf Teilmengen. Dabei enthält die erste Teilmenge (sie sei mit T_{Null} bezeichnet) alle solchen Teiler aus $T_{1,3,7,9}(n+1)$, in deren PFZ keine Primzahl aus $P_{3,7}$ vorkommen, d.h. in deren PFZ alle Primzahlen aus $P_{3,7}$ den Exponenten Null haben; nach Hilfssatz 4 haben alle diese Teiler Endziffer 1 oder 9. In die anderen vier Teilmengen kommen alle anderen Teiler, d.h. diejenigen, in deren PFZ wenigstens eine Primzahl aus $P_{3,7}$ mit positivem Exponenten vorkommt, falls keine solche Primzahl existiert, bleiben diese Teilmengen einfach leer. Die kleinste dieser Primzahlen bezeichnen wir die mit p_k; eine weitere Aufteilung wie in Fall 1 ergibt dann

$$T_{1,3,7,9}(n) = \left\{ \prod_{p\in P_{1,9}} p^{d(p)} \right\}$$

$$\cup \left\{ p_k^{d(p_k)} \cdot \prod_{p\in P_{3,7},\, p> p_k} p^{d(p)} \cdot \prod_{p\in P_{1,9}} p^{d(p)} \mid d(p_k) \text{ gerade und } \sum_{p\in P_{3,7},\, p> p_k} d(p) \text{ gerade} \right\}$$

$$\cup \left\{ p_k^{d(p_k)} \cdot \prod_{p\in P_{3,7},\, p> p_k} p^{d(p)} \cdot \prod_{p\in P_{1,9}} p^{d(p)} \mid d(p_k) \text{ ungerade und } \sum_{p\in P_{3,7},\, p> p_k} d(p) \text{ ungerade} \right\}$$

$$\cup \left\{ p_k^{d(p_k)} \cdot \prod_{p\in P_{3,7},\, p> p_k} p^{d(p)} \cdot \prod_{p\in P_{1,9}} p^{d(p)} \mid d(p_k) \text{ gerade und } \sum_{p\in P_{3,7},\, p> p_k} d(p) \text{ ungerade} \right\}$$

$$\cup \left\{ p_k^{d(p_k)} \cdot \prod_{p\in P_{3,7},\, p> p_k} p^{d(p)} \cdot \prod_{p\in P_{1,9}} p^{d(p)} \mid d(p_k) \text{ ungerade und } \sum_{p\in P_{3,7},\, p> p_k} d(p) \text{ gerade} \right\}.$$

Bei geradem $e(p_k)$ gibt es in der Menge $\{1,2, \ldots e(p_k)\}$ gleich viele gerade wie ungerade Zahlen; damit können wir in gleicher Weise wie in Fall 1 die Behauptung aus Hilfssatz (4) schließen (dabei sei die erste Menge mit T_{Null} bezeichnet):

$$|T_{1,9}| = |T_{Null}| + |T_{gg}| + |T_{uu}| = |T_{Null}| + |T_{gu}| + |T_{ug}| = |T_{Null}| + |T_{3,7}| > |T_{3,7}|.$$

4. Beweis (direkt, nach einer Idee des Teilnehmers Johannes Gerberding):

Wir definieren die Hilfsfunktion $f: \mathbb{N} \to \{-1, 0, 1\}$

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \text{ die Endziffer 1 oder 9 hat,} \\ -1 & \text{falls } x \text{ die Endziffer 3 oder 7 hat,} \\ 0 & \text{sonst, d.h. falls } x \text{ die Endziffer 0, 2, 4, 5, 6 oder 8 hat,} \end{cases}$$

die Behauptung $t_{1,9} \geq t_{3,7}$ ist dann äquivalent zu $\sum_{t|n} f(t) \geq 0$.

Diese Hilfsfunktion hat folgende Eigenschaften:

(5) $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$ für alle $a, b \in \mathbb{N}$; dies folgt sofort aus Vorbemerkung (4).

(6) $f(p^0) + f(p^1) + f(p^2) + \ldots + f(p^\alpha) \geq 0$ für alle $p, \alpha \in \mathbb{N}$;

auch dies ist nach einer kurzen Fallunterscheidung schnell einsichtig:

Mit (5) gilt $f(p^0) + f(p^1) + f(p^2) + \ldots + f(p^\alpha) = 1 + f(p)^1 + f(p)^2 + \ldots + f(p)^\alpha$;

falls $f(p) = 1$, hat diese Summe offensichtlich den Wert $\alpha+1 > 0$;

falls $f(p) = 0$, hat die Summe den Wert $1 > 0$;

falls $f(p) = -1$, ist $f(p)^\beta = -1$ für ungerade β und $f(p)^\beta = 1$ für gerade β, die Summe hat dann also für ungerade α den Wert 0 und für gerade α den Wert $1 > 0$.

Zum eigentlichen Beweis betrachten wir zur PFZ von $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{e(p_i)}$ das Produkt $\prod_{i=1}^{k} \left(f(p_i^0) + f(p_i^1) + f(p_i^2) + \ldots + f(p_i^{e(p_i)}) \right)$. (Der Fall $n = 1$ ist hierbei z.B. mit $k = 1$, $p_1 = 2$, $e(p_1) = 0$ enthalten.) Nach (6) ist kein Faktor dieses Produktes negativ, damit ist das Produkt selbst ebenfalls nicht negativ. Ein einfaches Ausmultiplizieren ergibt dann die Behauptung:

$$0 \leq \prod_{i=1}^{k} \left(f(p_i^0) + f(p_i^1) + f(p_i^2) + \ldots + f(p_i^{e(p_i)}) \right)$$

$$= \left(f(p_1^0) + f(p_1^1) + f(p_1^2) + \ldots + f(p_1^{e(p_1)}) \right) \cdot \left(f(p_2^0) + f(p_2^1) + f(p_2^2) + \ldots + f(p_2^{e(p_2)}) \right) \cdot \ldots$$
$$\ldots \cdot \left(f(p_k^0) + f(p_k^1) + f(p_k^2) + \ldots + f(p_k^{e(p_k)}) \right)$$

$$= \sum f(p_1^{d(p_1)}) \cdot f(p_2^{d(p_2)}) \cdot \ldots \cdot f(p_k^{d(p_k)}) = \sum f(p_1^{d(p_1)} \cdot p_2^{d(p_2)} \cdot \ldots \cdot p_k^{d(p_k)})$$

$$= \sum_{t|n} f(t) .$$

(Da beim Ausmultiplizieren jede Kombination von Gliedern der einzelnen Klammern genau einmal vorkommt, taucht in den beiden Summen jede mögliche Kombination $(d(p_1), d(p_2), \ldots, d(p_k))$ mit $0 \leq d(p_i) \leq e(p_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, k$ genau einmal auf, damit erhält man tatsächlich jeden Teiler von n genau einmal.)

Bemerkung 1: Die Beweise ermöglichen folgende quantitative Aussagen über $t_{1,9}$ und $t_{3,7}$:

$t_{1,9} = t_{3,7} \iff \sum_{t|n} f(t) = 0 \iff$ Die PFZ von n enthält mindestens einen Primfaktor aus $P_{3,7}$ mit ungeradem Exponenten. Zusätzlich gilt dann $t_{1,9} = t_{3,7} = \frac{1}{2}\cdot \prod_{p\neq 2, p\neq 5}\left(e(p)+1\right)$.

$t_{1,9} > t_{3,7} \iff \sum_{t|n} f(t) > 0 \iff$ jeder Primfaktor aus $P_{3,7}$ in der PFZ von n hat einen geraden Exponenten. Zusätzlich gilt dann

$$t_{3,7} = \frac{1}{2}\cdot\left(\prod_{p\neq 2, p\neq 5}\left(e(p)+1\right) - \prod_{p\in P_{1,9}}\left(e(p)+1\right)\right) \quad \text{sowie} \quad t_{1,9} = \frac{1}{2}\cdot\left(\prod_{p\neq 2, p\neq 5}\left(e(p)+1\right) + \prod_{p\in P_{1,9}}\left(e(p)+1\right)\right).$$

Bemerkung 2: Die Argumentation im 4. Beweis ist die gleiche, mit der Euler Teilsummen der harmonischen Reihe, also $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$, durch das Produkt $\prod_{p\le N}\frac{1}{1-\frac{1}{p}}$ abschätzt:

Sei $N = \prod_{i=1}^{k} p_i^{e(p_i)}$ eine PFZ von N (wir setzen dabei nicht voraus, dass diese eindeutig ist), wobei die Darstellung so gewählt sei, dass $\{p_1, p_2, ..., p_k\}$ die Menge aller Primzahlen aus $\{1, 2, ..., N\}$ bezeichne. Jede positive ganze Zahl $n \le N$ hat dann eine (nicht notwendigerweise eindeutige) PFZ der Form $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{d(p_i)}$, in der die gleichen Primfaktoren $p_1, p_2, ..., p_k$ vorkommen und in der $0 \le d(p_i)$ und $p_i^{d(p_i)} \le N$ (i=1, 2, ..., k). Nun betrachtet man alle möglichen Produkte von Primzahlpotenzen $P_T = \prod_{i=1}^{k} p_i^{d(p_i)}$; jedes dieser Produkte ist dabei eindeutig beschrieben durch ein k-tupel $T := (d(p_1), d(p_2), ... , d(p_k))$ mit $1 \le p_i \le N$ und $1 \le p_i^{d(p_i)} \le N$. Unter diesen Produkten kommt jede Zahl aus $\{1, 2, ..., N\}$ mindestens einmal vor. Dann kann man abschätzen und mit der Summenformel für die geometrische Reihe umformen:

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} \le \sum_{T}\frac{1}{P_T} = \sum_{T}\frac{1}{\prod_{i=1}^{k} p_i^{d(p_i)}} = \prod_{i=1}^{k}\left(1+\frac{1}{p_i^{\,1}}+\frac{1}{p_i^{\,2}}+...+\frac{1}{p_i^{\max\{d(p_i)\}}}\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{k}\frac{1-\frac{1}{p^{\max\{d(p_i)\}}}}{1-\frac{1}{p}} < \prod_{p\le N}\frac{1}{1-\frac{1}{p}}$$

Aus dieser Abschätzung folgt z.B. wegen der Divergenz der harmonischen Reihe sofort, dass es unendlich viele Primzahlen gibt; die Abschätzung kann auch benützt werden, um die Anzahl der Primzahlen bis zu einer bestimmten Zahl N abzuschätzen.