Bundeswettbewerb Mathematik
Wissenschaftszentrum, Postfach 20 14 48, 53144 Bonn
Fon: 0228 - 3727 411 • Fax: 0228 - 3727 413
e-mail: info@bundeswettbewerb-mathematik.de
homepage: http://www.bundeswettbewerb-mathematik.de

Korrekturkommission • Karl Fegert

Aufgaben und Lösungen

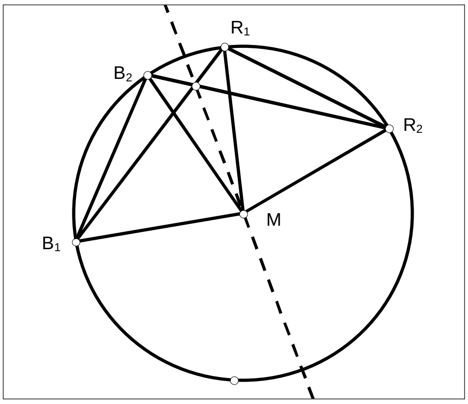
2. Runde 2001

Stand: Oktober 2001

Aufgabe 1: Zehn Ecken eines regelmäßigen 100–Ecks seien rot und zehn andere blau gefärbt.

Man beweise: Unter den Verbindungsstrecken zweier roter Punkte gibt es mindestes eine, die genauso lang ist wie eine der Verbindungsstrecken zweier blauer Punkte

Bezeichnungsweisen: Wir bezeichnen die rot gefärbten Ecken mit R_i, die blau gefärbten entsprechend mit B_i (i = 1, 2, ..., 10).



1. Beweis (Existenzbeweis mit Schubfachprinzip): Da das 100–Eck regelmäßig ist, besitzt es einen Umkreis; dessen Mittelpunkt bezeichnen wir mit M. Zu jedem geordneten Paar (R_iB_j) (i,j = 1, 2, ..., 10) rot und blau gefärbter Ecken – nach Zählprinzip gibt es 10·10 = 100 verschiedene solche Paare – betrachten wir den orientierten Mittelpunktswinkel $\angle R_iMB_j$. Weil stets $R_i \neq B_j$, folgt aus der Regelmäßigkeit des 100–Ecks zusätzlich, dass jeder dieser Winkel einen der 99 verschiedenen Werte $k \cdot \frac{360°}{100}$ (k = 1, 2,..., 99) annimmt. Es gibt also mehr Paare als angenommene Winkelwerte, nach Schubfachprinzip gibt es also zwei solche Paare mit gleichem orientiertem Mittelpunktswinkel, o.B.d.A. seien dies (R_1B_1) und (R_2B_2) (vgl. Figur).

Nun drehen wir R_1B_1 so um M, dass R_1 auf R_2 zu liegen kommt; dies ist möglich, da die Punkte R_1 und R_2 beide auf einem Kreis um M liegen. Da $\angle R_1MB_1$ und $\angle R_2MB_2$ gleichsinnig kongruent sind und die Punkte B_1 und B_2 ebenfalls beide auf dem Kreis um M liegen, kommt durch diese Drehung auch B_1 auf B_2 zu liegen. Die orientierten Mittelpunktswinkel $\angle R_1MR_2$ und $\angle B_1MB_2$ beschreiben also die gleiche Drehung um M und sind somit gleich; damit haben die zugehörigen Sehnen, also die Strecken B_1B_2 und R_1R_2 die gleiche Länge.

Variante: Die Existenz zweier Verbindungsstrecken R_1B_1 und R_2B_2 mit gleichem orientierten Mittelpunktswinkel kann auch folgendermaßen gezeigt werden:

Da das 100–Eck regelmäßig ist, besitzt es einen Umkreis; dessen Mittelpunkt bezeichnen wir mit M. Außerdem nehmen die Längen der Verbindungsstrecken zweier Eckpunkte E_iE_j (i,j = 1, 2, ..., 100, $i \neq j$) einen von 50 verschiedenen Werten d_1, d_2, ... , d_{50} an; dabei seien die Indizes so gewählt, dass $d_1 \leq d_2 \leq ... \leq d_{50}$. Zusätzlich gilt für jedes $k \in$ {1, 2,..., 50}: Hat die Strecke E_iE_j die Länge d_k, so hat der zugehörige orientierte Mittelpunktswinkel die Weite $w_1(k) := \angle E_iME_j = k \cdot \frac{360°}{100}$ oder $w_2(k) := \angle E_iME_j = (100-k) \cdot \frac{360°}{100}$.

Nun betrachten wir alle Verbindungsstrecken R_iB_j (i,j = 1, 2, ..., 10) , die eine rot und eine blau gefärbte Ecke verbinden. Mit der folgenden Fallunterscheidung können wir zeigen, dass es darunter stets zwei Verbindungsstrecken mit gleichem orientierten Mittelpunktswinkel gibt:

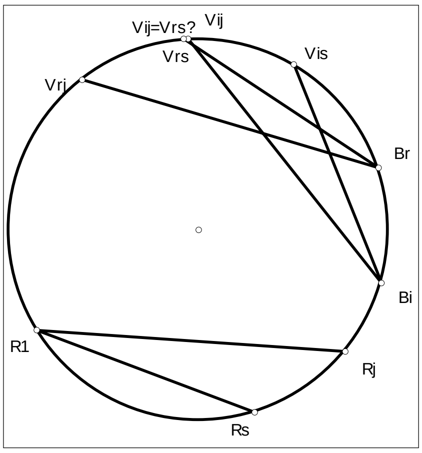
Fall 1: Es gibt drei solche Verbindungsstrecken, die die gleiche Länge d_k haben. Da $w(k)$ höchstens zwei verschiedene Werte annehmen kann, müssen zwei der Verbindungsstrecken den gleichen orientierten Mittelpunktswinkel besitzen.

Fall 2: Es gibt keine drei solche Verbindungsstrecken gleicher Länge. Da es nach Zählprinzip 10·10 = 100 verschiedene solcher Verbindungsstrecken und 50 mögliche Längen gibt, gibt es für jedes k genau zwei Verbindungsstrecken der Länge d_k , insbesondere gibt es zwei Verbindungsstrecken der Länge d_{50}. Es ist aber $w_1(50) = 50 \cdot \frac{360°}{100} = (100-50) \cdot \frac{360°}{100} = w_2(50)$; damit haben diese zwei Verbindungsstrecken den gleichen orientierten Mittelpunktswinkel.

2. Beweis: (Widerspruchsbeweis): Wir nehmen an, es gäbe keine Verbindungsstrecken gleicher Länge. Da das 100–Eck regelmäßig ist, liegen alle seine Ecken auf einem Umkreis; jede Verbindungsstrecke zweier Ecken ist damit eine Sehne dieses Kreises. Trägt man auf diesem Kreis von einer beliebigen Ecke aus diese Sehne ab, so ist deren Endpunkt wieder eine Ecke.

Wir betrachten eine beliebige rote Ecke, z.B. R_1. Von ihr gehen 9 Verbindungsstrecken zu den anderen roten Ecken R_2,..., R_{10} aus. Diese Sehnen R_1R_j (j=2,3,...,10) tragen wir von jeder blauen Ecke

B_i (i = 1,2,...,10) aus auf dem Umkreis in die gleiche Richtung ab[1]; die Endpunkte dieser von B_i aus abgetragenen Sehnen R_1R_j nennen wir V_{ij} und "mit B_i über eine Sehne verbunden". Nach obiger Bemerkung ist jedes V_{ij} eine Ecke des 100–Ecks (vgl. Figur).



Nach Konstruktion haben die Strecken B_iV_{ij} und R_1R_j stets gleiche Länge, nach Annahme ist also keine Ecke V_{ij} blau. Ferner sind die V_{ij} paarweise verschieden, d.h. kein V_{ij} ist mit zwei verschiedenen blauen Ecken über eine Sehne verbunden: Wäre nämlich $V_{ij} = V_{rs}$ mit $i \neq r$, also zwangsläufig auch $j \neq s$, so wären die Dreiecke $B_iV_{ij}B_r$ und $R_sR_1R_j$ gegensinnig kongruent (nach sws, vgl. Figur); insbesondere hätten B_iB_r und R_sR_j gleiche Länge im Widerspruch zur Voraussetzung.

Damit gibt es 10 blaue Ecken und nach Zählprinzip $9 \cdot 10 = 90$ paarweise verschiedene, nicht-blaue Ecken V_{ij}. Zusammen sind dies 100 paarweise verschiedene Ecken. Jede Ecke des 100–Ecks ist also entweder blau oder mit genau einer blauen Ecke über eine Sehne verbunden - letzteres gilt insbesondere für die 10 rot gefärbten Ecken.

Da es höchstens 9 verschiedene Sehnenlängen gibt, gibt es zwei rote Punkte, die mit Sehnen gleicher Länge mit einer blauen Ecke verbunden sind; o.B.d.A. sei $\overline{R_1B_1} = \overline{R_2B_2}$ (vgl. Figur bei Beweis 1). Als kongruente Sehnen am gleichen Kreis liegen sie damit achsensymmetrisch bezüglich der Mittelsenkrechten der Verbindungsstrecke eines Anfangs- und eines Endpunktes; nach Konstruktion z.B. der Mittelsenkrechten auf B_1R_2. Damit sind auch die Dreiecke $R_1R_2B_1$ und $B_2B_1B_2$ achsensymmetrisch bezüglich dieser Achse; insbesondere haben dann R_1R_2 und B_2B_1 gleiche Länge.

3. Beweis (Existenzbeweis mit Schubfachprinzip): Wir legen auf das 100–Eck eine transparente, nicht dehnbare Folie und markieren auf ihr die rot gefärbten Ecken. Die Länge der Verbindungsstrecke zwischen zwei Markierungen ist also gleich der Länge der Verbindungsstrecke zwischen den entsprechenden rote gefärbten Ecken. Anschließend fixieren wir die Folie drehbar mit einer Nadel im Mittelpunkt des 100–Ecks und drehen sie mehrfach so, dass nacheinander jede rote Markierung R_i auf jede blaue Ecke B_j (i,j = 1, 2, ..., 10) zu liegen kommt. Dies ist möglich, da das 100–Eck regelmäßig ist; deswegen kommen auch nach jeder solchen Drehung alle anderen Markierungen über Ecken des 100–Ecks zu liegen. Nach Zählprinzip haben wir insgesamt so $1 + 10 \cdot 10 = 101$ Lagen der Folie konstruiert.

Da aber z.B. die Markierung R_1 nur über 100 verschiedene Ecken zu liegen kommen kann, gibt es zusammen mit der Ausgangslage nur 100 verschiedene Lagen der Folie. Nach Schubfachprinzip sind also mindestens zwei Lagen der Folie gleich. Da die Ausgangslage offensichtlich verschieden von jeder anderen konstruierten Lage ist, es gibt eine Lage, bei der zwei verschiedene blau gefärbte Ecken von roten Markierungen überdeckt werden. Das heißt aber, dass die beiden zugehörigen Verbindungsstrecken gleiche Länge haben.

Bemerkung 1: Der gleiche Beweis kann auch abstrakter formuliert werden:

Sei Φ_{ij} ($i,j \in \{1,2,...,10\}$) diejenige Drehung um M, die R_i in B_j überführt. Da das 100-Eck regelmäßig ist, existieren diese Drehungen alle und Bilder von Ecken sind stets wieder Ecken. Zusammen mit der Identität haben wir nach Zählprinzip damit $1+10 \cdot 10 = 101$ Drehungen konstruiert, die Ecken des 100-Ecks in sich überführen. Da es aber offensichtlich nur 100 verschiedene solche Drehungen um M gibt, sind nach Schubfachprinzip darunter zwei identisch. Da die Identität offensichtlich verschieden von jeder Drehung Φ_{ij} ist, können wir o.B.d.A. annehmen, dass $\Phi_{11} = \Phi_{22}$. (Da die Drehungen bijektive Abbildungen sind, können weder die ersten noch die zweiten Indices gleich sein.) Da Drehungen Kongruenzabbildungen sind, folgt aber hieraus, dass die Strecken R_1R_2 und $\Phi_{11}(R_1R_2) = \Phi_{11}(R_1)\Phi_{11}(R_2) = B_1\Phi_{22}(R_2) = B_1B_2$ gleiche Länge haben.

Bemerkung 2: In allen Beweisen werden bei der Anwendung des Schubfachprinzips nicht alle möglichen gleichlangen Verbindungsstrecken gezählt, sondern nur die "gleichgerichteten". Deswegen könnte man meinen, dass die Behauptung der Aufgabenstellung verschärft werden kann durch Verkleinerung der Anzahl der gefärbten Punkte oder Vergrößerung der Anzahl der Ecken. Dies ist jedoch nicht der Fall: Reduziert man die Anzahl z.B. der blau gefärbten Punkte auf 9 oder erhöht man

[1] Formal: Wir betrachten die Strecke $B_i\Phi(B_i)$, wobei Φ diejenige Drehung um M ist, die R_1 in R_j überführt.

die Eckenzahl auf 101, so führt folgende Färbung zu einem Gegenbeispiel: Man färbt die Ecken 1, 2, 3, ..., 9, 10 rot und die Ecken 11, 21, 31, 41, ... , 91 und im Fall der erhöhten Eckenzahl auch noch die Ecke 101 blau. Dann gilt für die Längen r_{ij} der Verbindungsstrecken der roten Punkte R_i und R_j stets $r_{ij} \le 9$, für die Längen b_{mn} der Verbindungsstrecken der blauen Punkte B_m und B_n stets $b_{mn} \ge 10$; insbesondere ist also $r_{ij} \neq b_{mn}$ für alle möglichen Zahlen $i \neq j$, $m \neq n$.

Aufgabe 2: Man gebe für jede natürliche Zahl n zwei ganze Zahlen p_n und q_n mit folgender Eigenschaft an: Für genau n verschiedene ganze Zahlen x ist $x^2 + p_n x + q_n$ das Quadrat einer natürlichen Zahl.

Bemerkung: Die Menge der natürlichen Zahlen ist $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$.

1. mögliche Antwort: Eine Lösung ist $p_n = 0$ und $q_n = 2^{n+1}$.

Beweis:

Beweisteil 1: Es gibt mindestens n verschiedene ganze Zahlen x mit der geforderten Eigenschaft:

Für $n = 0$ gibt es nichts zu zeigen, für $n > 0$ sind die n Zahlen $x_k := \frac{1}{2}(2^{n+1-k} - 2^k)$ mit $k \in \{1,2,...,n\}$ paarweise verschieden (mit wachsendem k wird der Minuend kleiner, der Subtrahend größer, die Folge der x_k ist also streng monoton fallend) und alle ganz (durch die Wahl der k sind sowohl Minuend als auch Subtrahend in der Klammer gerade ganze Zahlen, damit ist deren Differenz ebenfalls gerade und durch 2 teilbar). Ferner ist wie gewünscht

$$\begin{aligned} x_k^{\,2} + 2^{n+1} &= \left(\tfrac{1}{2}(2^{n+1-k} - 2^k)\right)^2 + 2^{n+1} = \left(\tfrac{1}{4}(2^{2(n+1-k)} - 2\cdot 2^{n+1} + 2^{2k})\right) + \tfrac{1}{4}\cdot 4 \cdot 2^{n+1} \\ &= \left(\tfrac{1}{4}(2^{2(n+1-k)} + 2\cdot 2^{n+1} + 2^{2k})\right) = \left(\tfrac{1}{2}(2^{n+1-k} + 2^k)\right)^2 = \left(2^{n-k} + 2^{k-1}\right)^2; \end{aligned}$$

wegen $k \in \{1,2,...,n\}$ das Quadrat einer ganzen Zahl .

Beweisteil 2: Es gibt höchstens n verschiedene ganze Zahlen x mit der geforderten Eigenschaft:

Für eine ganze Zahl x sei $x^2 + 2^{n+1}$ das Quadrat einer natürlichen Zahl d, also $x^2 + 2^{n+1} = d^2$. Äquivalentes Umformen ergibt $2^{n+1} = d^2 - x^2 = (d - x)\cdot(d + x)$. Hieraus schließen wir:

2^{n+1} ist wegen $n+1 \ge 1$ gerade. Da $d - x$ und $d + x$ beide ganzzahlig und von gleicher Parität sind, kann kein Faktor den Wert ± 1 haben.

Im Fall $n = 0$ führt dies zum Widerspruch, da $2 = (\pm 1)\cdot(\pm 2)$ die einzigen Zerlegungen von 2^{0+1} in zwei ganzzahlige Faktoren sind; d.h. es gibt tatsächlich keine, also 0 Lösungen.

Im Falle $n > 0$ gibt es wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung also ein $k \in \{1,2,...,n\}$, sodass $d - x = \pm 2^k$ und hieraus folgend $d + x = \pm 2^{n+1-k}$. Auflösung dieser beiden Gleichungen ergibt, dass x dargestellt werden kann in der Form $x = x(k)_+ := +\frac{1}{2}(2^{n+1-k} - 2^k)$ oder $x = x(k)_- := -\frac{1}{2}(2^{n+1-k} - 2^k)$ mit einem geeigneten $k \in \{1,2,...,n\}$. Da k höchstens n verschiedene Werte annehmen kann, können die $x(k)$ zunächst höchstens $2n$ verschiedene Werte annehmen. Davon sind aber je zwei gleich, nämlich $x(k)_+ = x(n+1-k)_-$; also kann x höchstens n verschiedene Werte annehmen.

2. mögliche Antwort: Eine mögliche Lösung ist $p_n = 0$ $(n \ge 0)$ und $q_0 = 2$, $q_n = 3^{n-1}$ $(n>0)$

Beweis (konstruktive Lösung mit einer Beschreibung aller Möglichkeiten): Wir betrachten allgemein die diophantische Gleichung $d^2 = x^2 + bx + c$ mit ganzzahligen Koeffizienten b und c. Die Anzahl der Lösungen (x,d) nach Vorgabe von (b,c) sei mit $\Phi(b,c)$ bezeichnet; die Anzahl der Zahlen x, für die $x^2 + bx + c$ eine Quadratzahl ist, mit $\Psi(b,c)$.

Äquivalentes Umformen und quadratisches Ergänzen ergibt

$$d^2 \quad = \quad (x + \tfrac{1}{2}b)^2 + (c - \tfrac{1}{4}b^2) \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow \quad (d + (x + \tfrac{1}{2}b))\cdot((d - (x + \tfrac{1}{2}b)) \quad = \quad (c - \tfrac{1}{4}b^2)$$

Fall 1: b ist gerade: Dann steht rechts vom Gleichheitszeichen eine ganze Zahl, die links vom Gleichheitszeichen als Produkt zweier ganzer Zahlen dargestellt wird; diese Faktoren sind als Summe und Differenz gleicher ganzen Zahlen zudem noch von gleicher Parität.

Für $(c - \frac{1}{4}b^2) = 0$ gibt es offensichtlich unendlich viele Lösungen; wir schließen diesen Fall deswegen für die weiteren Überlegungen aus.

Nun betrachten wir alle möglichen Zerlegungen von $(c - \frac{1}{4}b^2) = r \cdot s$ in ein Produkt ganzer (positiver oder negativer!) Zahlen gleicher Parität und setzen $r = (d + (x + \frac{1}{2}b))$ sowie $s = ((d - (x + \frac{1}{2}b))$. Eine äquivalente Auflösung ergibt $d(r,s) = \frac{1}{2}(r+s)$ und $x(r,s) = \frac{1}{2}(r-s-b)$. Unmittelbar einsichtig ist dabei, dass $x(r,s) = \frac{1}{2}(r-s-b) = \frac{1}{2}(-s+r-b) = x(-s,-r)$.

Zu einem gegebenen (r_1,s_1) gibt es also ein zweites, evtl. gleiches $(r_2,s_2) = (-s_1,-r_1)$, das zum gleichen x-Wert führt. Außer diesem gibt es aber kein weiteres (r_2,s_2), das zum gleichen x–Wert führt, wie folgende Umformung zeigt:

$$x(r_1,s_1) = x(r_2,s_2) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(r_1 - s_1 - b) = \frac{1}{2}(r_2 - s_2 - b)\quad) \quad \Leftrightarrow \quad r_1 - r_2 = s_1 - s_2$$

$$\Leftrightarrow \quad r_1r_2(r_1-r_2) = r_1r_2s_1 - r_1r_2s_2 \qquad \text{(Multiplikation mit } r_1r_2 \neq 0 \text{ !)}$$

$$\Leftrightarrow \quad r_1r_2(r_1-r_2) = r_1s_1(r_2-r_1) \qquad \text{(es ist } r_1s_1 = r_2s_2 \text{ und } r_2 - r_1 \neq 0 \text{ !)}$$

$$\Leftrightarrow \quad r_2 = -s_1.$$

Da ferner $(-(-r),-(-s)) = (r,s)$, finden wir im Fall $r \neq -s$ genau ein weiteres Paar, im Fall $r = -s$ kein weiteres Paar (r,s), das zum gleichen x-Wert führt. Der Fall $r = -s$ tritt aber genau dann auf, wenn $-(c - \frac{1}{4}b^2)$ eine Quadratzahl ist, und es gibt dann genau zwei solche Paare.

Um die Richtigkeit der obigen Angabe der q_n nachzuweisen, verwenden wir das hieraus folgende Teilergebnis:

Wenn $(c - \frac{1}{4}b^2)$ eine ungerade positive ganze Zahl ist (z.B. $(c - \frac{1}{4}b^2) = q_n = 3^{n-1}$ $(n>0)$), dann sind alle Teiler ungerade und damit sicher von gleicher Parität. $\Phi(b,c)$ ist dann identisch mit der Anzahl der ganzen (positiven oder negativen) Teiler von $|c - \frac{1}{4}b^2|$. Da stets genau zwei Lösungen mit gleichem x-Wert existieren, ist $\Psi(b,c)$ gerade die Hälfte davon, also gleich der Anzahl der positiven Teiler. Weil 3^{n-1} die n positiven Teiler $3^0, 3^1, \ldots, 3^{n-1}$ hat, folgt hieraus für $n>0$ sofort die Richtigkeit der obigen Angabe von q_n.

Wenn $(c - \frac{1}{4}b^2)$ den Primfaktor 2 genau einmal enthält (z.B. $(c - \frac{1}{4}b^2) = q_0 = 2$), kann $(c - \frac{1}{4}b^2)$ nicht als Produkt zweier Faktoren gleicher Parität geschrieben werden, es gibt dann also keine Lösungen, hieraus folgt die Richtigkeit der obigen Angabe für q_0.

Fall 2: b ist ungerade: Aus (*) erhält man durch äquivalentes Umformen (Multiplikation mit 4) $(2d)^2 = (2x + b)^2 + (4c - b^2)$ (**). Mit ungeradem b sind $C := (4c - b^2)$ und $X := (2x + b)$ beide ungerade, also auch X^2 ungerade, und ihre Summe stets gerade. Jeder ganzzahligen Lösung (D,X) von $D^2 = X^2 + C$ entspricht also umkehrbar eindeutig eine ganzzahlige Lösung (d,x) von (**) mit der Transformation $d = \frac{1}{2}D$ und $x = \frac{1}{2}(X-b)$.

Bemerkung 1: Weitere Eigenschaften von $\Psi(b,c)$ sind:

Wenn $-(c - \frac{1}{4}b^2)$ keine Quadratzahl ist, so kann man die Zerlegungen in Paare zusammenfassen, die Anzahl der Lösungen x ist also genau halbsogroß wie die Anzahl der ganzen Zahlen r, die eine Zerlegung von $(c - \frac{1}{4}b^2) = r \cdot s$ in ein Produkt ganzer Zahlen gleicher Parität ermöglicht. Das ist gerade die Anzahl solcher positiven ganzen Zahlen r.

Wenn $(c - \frac{1}{4}b^2)$ eine negative Quadratzahl ist, ist die Anzahl der Lösungen um 1 größer.

Bemerkung 2: Aus der Primfaktorzerlegung $|c - \frac{1}{4}b^2| = 2^m \cdot \prod_{\substack{p\ prim \\ p\ ungerade}} p^{\alpha_p}$ kann man die Anzahl der Zerlegungen in ein Produkt zweier Faktoren gleicher Parität und damit $\Phi(b,c)$ direkt ableiten:

$$\Psi(b,c) = \begin{cases} \infty & \text{falls } c - \frac{1}{4}b^2 = 0 \\ 0 & \text{falls } m = 1 \\ 1 + |m-1| \cdot \prod(\alpha_p + 1) & \text{falls } c - \frac{1}{4}b^2 = -t^2 \text{für eine ganze Zahl t} \neq 0 \\ |m-1| \cdot \prod(\alpha_p + 1) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bemerkung 3: Falls b gerade, kann man aus obiger Formel für $\Psi(b,c)$ für jedes n in vielfältiger Weise Zahlen p_n und q_n konstruieren: Aus der Primfaktorzerlegung $n = \prod p_i^{\alpha_i}$ konstruieren wir z.B.

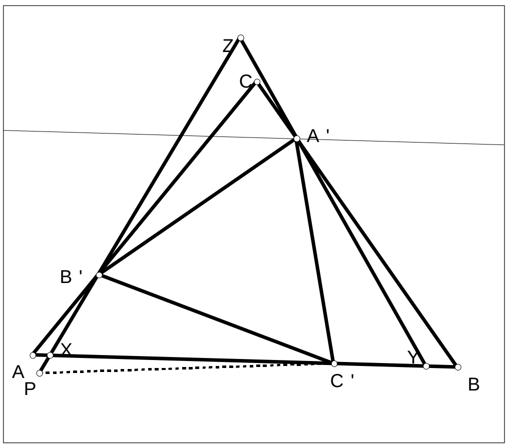
$c := \frac{1}{4}b^2 + \prod\limits_{p_j \text{ ungerade}} p_j^{p_i^{\alpha_i}-1}$ mit beliebigen, evtl. sogar gleichen ungeraden Primzahlen p_j.

Falls b ungerade, gibt es hingegen keine Lösung für ungerade n: Die Variablen b und c müssen so gewählt werden, dass die Anzahl der Teiler von $(4c - b^2)$ den Wert von n annimmt. Für ungerade n heißt das aber, dass $(4c - b^2)$ eine Quadratzahl ist, also Viererrest 1 haben müsste. Das ist aber unmöglich, da $(4c - b^2)$ stets den Viererrest 3 hat.

Aufgabe 3: Gegeben sei ein Dreieck ABC.

Die Punkte A', B' und C' liegen auf den Seiten BC bzw. CA bzw. AB so, dass $\overline{A'B'} = \overline{B'C'} = \overline{C'A'}$ und $\overline{AB'} = \overline{BC'} = \overline{CA'}$ gilt.

Man beweise, dass das Dreieck ABC gleichseitig ist.



1. Beweis (Widerspruchsbeweis) Wir nehmen an, dass das Dreieck ABC nicht gleichseitig ist. Dann ist ein Innenwinkel kleiner als 60°, o.B.d.A sei dies α.

Nun betrachtet man eine Drehung Φ um den Mittelpunkt des Dreiecks A'B'C' um 120° im Uhrzeigersinn. Das Bild von B unter dieser Drehung nennen wir P, damit wird das Dreieck A'BC' in das Dreieck C'PB' überführt (vgl. Figur).

Die Gerade (PB') ist das Bild der Geraden (BC'), damit hat der Schnittwinkel dieser beiden Geraden die gleiche Weite wie der Drehwinkel, also 120°, der Nebenwinkel also 60°. Da nach Annahme α<60°, liegt der Scheitel dieses Winkels - er sei mit X bezeichnet - im Innern der Strecke AC'. Im Dreieck B'XA hat nun $\angle$B'XA die Weite 120°, ist damit größter Innenwinkel, hieraus leiten wir die (Un-)Gleichungskette $\overline{XB'} < \overline{AB'} = \overline{BC'}$ (nach Eingangsvoraussetzung) $= \overline{PB'}$ (Definition von P) ab. Insbesondere ist X ein innerer Punkt der Strecke PB', damit ist $\angle$C'PB'<60°; ebenso gilt dies für das Urbild dieses Winkels, also ist auch $\beta = \angle$A'BC' < 60°.

Mit der gleichen Argumentation (nach zyklischer Umbenennung B$\to$A, A$\to$C, C$\to$B bleiben die Eingangsvoraussetzungen erhalten) folgt nun, dass auch γ < 60°. Damit wäre die Innenwinkelsumme im Dreieck ABC < 180°, was den gewünschten Widerspruch ergibt.

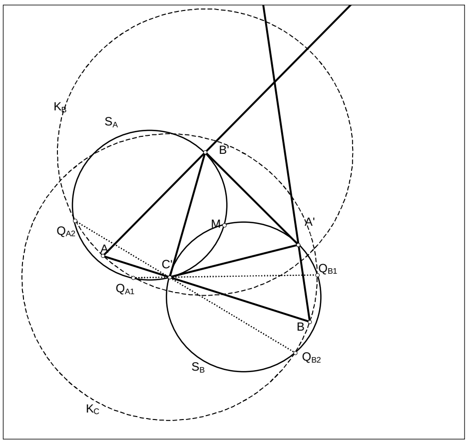
2. Beweis (Widerspruchsbeweis) Wir nehmen an, dass das Dreieck ABC nicht gleichseitig ist. Dann kann man, ohne dass sich die Eingangsvoraussetzungen verändern, stets so zyklisch umbenennen, dass entweder $\alpha\leq$60° und $\beta\leq$60° oder $\alpha\geq$60° und $\beta\geq$60° (wobei Gleichheit natürlich nicht gleichzeitig gegeben ist).

Fall 1: $\alpha\leq$60° und $\beta\leq$60°, wobei Gleichheit höchstens einmal gegeben ist. Dann enthalten die Strecken AC' bzw. C'B Punkte X bzw. Y, sodass $\angle$C'XB' = $\angle$A'YC' = 60°, dabei liegt mindestens ein Punkt echt im Innern der zugehörigen Strecke (vgl. Figur zum 1. Beweis). Die Geraden XB' und YA' schneiden sich in einem Punkt Z; dabei ist das Dreieck XYZ - da es zwei Innenwinkel zu 60° hat - gleichseitig, ferner liegt der Punkt C im Innern dieses Dreiecks, sogar im Innern des gleichseitigen Dreiecks, das durch Z, A' und die Parallele zu AB durch A' bestimmt ist. Da der Kreis um A' durch Z mit diesem Teildreieck nur zwei Randpunkte gemeinsam hat, ist $\overline{A'Z} > \overline{A'C}$.

Des Weiteren sind die Dreiecke C'XB', A'YC' und B'A'Z nach sww kongruent: sie besitzen die gleichlangen Seiten B'C', C'A' bzw. A'B', denen allen ein 60°-Winkel gegenüber liegt, ferner ist – man betrachte die Winkelsumme im Dreieck bzw. an einem gestreckten Winkel – $\angle$XB'C' = 180°–60°–$\angle$B'C'X = $\angle$YC'A' = 180°–60°–$\angle$C'A'Y = $\angle$ZA'B'. Insbesondere ist $\overline{XB'} = \overline{YC'} = \overline{ZA'}$.

Der zu $\angle$C'XB' = 60° gehörende Nebenwinkel $\angle$B'XA hat die Weite 120°, ist damit der größte Innenwinkel im Dreieck AB'X. Ihm gegenüber liegt die größte Seite, zusammen mit der Eingangsvoraussetzung und der Aussage aus dem vorigen Absatz erhalten wir wie gewünscht den Widerspruch $\overline{XB'} \le \overline{AB'} = \overline{CA'} < \overline{A'Z} = \overline{XB'}$. (Evtl. ist das Dreieck AB'X entartet, dann gilt in der Abschätzung beim ≤-Zeichen die Gleichheit.)

Fall 2, nur skizziert: $\alpha \ge 60°$ und $\beta \ge 60°$, wobei Gleichheit höchstens einmal gegeben ist. Hier wird völlig analog argumentiert wie im Fall 1; allerdings vertauschen wir in der Figur die Bezeichnungen von A mit X, B mit Y und C mit Z sowie in der Beweisführung "<" und ">"-Zeichen. Für den Nachweis von $\overline{CA'} > \overline{A'Z}$ muss man noch zusätzlich argumentieren, dass C und A' in verschiedenen Halbebenen bezüglich des Lotes auf A'Z durch Z liegen.



3. Beweis (durch Widerspruch): Wir gehen vom gleichseitigen Dreieck A'B'C' mit Mittelpunkt M aus und konstruieren über jeder seiner Seiten die Fasskreisbögen zum Umfangswinkel 60°; diese nennen wir S_C, S_A bzw. S_B.

Die Punkte A, B, bzw. C liegen wegen der Voraussetzung $\overline{AB'} = \overline{BC'} = \overline{CA'}$ auf Kreisen um B', C' bzw. A' mit gleichem Radius (sie seien K_B, K_C, K_A benannt) und gleichzeitig auf den Geraden (BC'), (CA') bzw. (AB').

K_B und S_A haben maximal 2 Schnittpunkte, diese seien – sofern existent – mit Q_{A1} und Q_{A2} bezeichnet. Da das Dreieck A'B'C' rotationssymmetrisch mit Zentrum M ist, führt eine Drehung von 120° um M auch diese Schnittpunkte Q_{A1} und Q_{A2} in die Schnittpunkte Q_{B1} und Q_{B2} von K_C mit S_B über. Da zusätzlich $\angle$C'Q_{Ai}B' (i = 1, 2) die Weite 60° hat, liegt Q_{B1} auf der Geraden (Q_{A1}C') und entsprechend Q_{B2} auf der Geraden (Q_{A2}C'). Dreht man also die Gerade (Q_{A1}C') um C' bis sie die Lage von (Q_{A2}C') erreicht, so sind die Schnittpunkte mit K_B und K_C entweder beide innerhalb von S_A bzw. S_B oder beide außerhalb.

Damit gilt: Wäre der Punkt A innerhalb von S_A, also $\alpha<60°$, so wäre auch B innerhalb von S_B, also auch $\beta<60°$ und in analoger Schlussweise auch $\gamma<60°$. Entsprechend würde eine Lage von A außerhalb von S_A erzwingen, dass $\alpha>60°$, $\beta>60°$ und auch $\gamma>60°$ wäre. Beides würde zum gewünschten Widerspruch führen, dass die Innenwinkelsumme des Dreiecks ABC nicht 180° beträgt. Also bleibt nur die Möglichkeit, dass A auf S_A liegt, mithin ist $\alpha=60°$ und $\beta=60°$, also das Dreieck ABC gleichseitig.

Bemerkung 1: Die Fälle $\alpha\le\beta\le\gamma$ und $\alpha\le\gamma\le\beta$ sind fundamental verschieden. Eine Bemerkung "o.B.d.A. sei $\alpha\le\beta\le\gamma$" ist daher ohne weitere Randbedingungen im Regelfall eine unzulässige Einschränkung!

Bemerkung 2: Mit den Widerspruchsbeweisen haben wir natürlich nicht nachgewiesen, dass es eine Konfiguration von Punkten A, B, C, A', B', und C' mit den in der Aufgabenstellung angegebenen Eigenschaften gibt. Da die Aufgabenstellung diese Existenz annimmt, ist dies auch nicht nötig.

Aufgabe 4: In einem Quadrat Q der Seitenlänge 500 liegt ein Quadrat R der Seitenlänge 250. Man beweise:

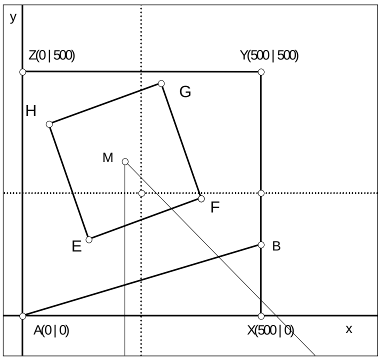
Auf dem Rand von Q lassen sich stets zwei Punkte A und B so wählen, dass die Strecke AB mit R keinen Punkt gemeinsam hat und ihre Länge größer als 521 ist.

In einer Vorbetrachtung schätzen wir zwei Wurzelausdrücke ab:

Wegen $0{,}7071^2 = 0{,}49999041 < 0{,}5 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 < 0{,}5000469796 = 0{,}70714^2$

ist $0{,}7071 < \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) < 0{,}70714$ (*)

und $1 - 0{,}7071 = 0{,}2929 > 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0{,}29286 = 1 - 0{,}70714$ (**).



1. Beweis Wir legen die aus Q und R (dessen Mittelpunkt mit $M(x_m|y_m)$ bezeichnet werde) bestehende Gesamtfigur so in ein Koordinatensystem, dass eine Seite auf die positive x- Achse, eine zweite Seite auf die positive y-Achse zu liegen kommen. O.B.d.A können wir annehmen, dass $x_m \le 250$ und $y_m \ge 250$ und dass keine Ecke von R im Innern des 45°-Sektors liegt, der durch die Parallelen durch M zur 2. Winkelhalbierenden und zur y-Achse bestimmt ist. (Falls $x_m > 250$, spiegeln wir Q und R an der senkrechten Mittelparallelen von Q, dabei behält Q seine Lage relativ zum Koordinatensystem und M seinen y-Wert bei, falls $y_m < 250$ spiegeln wir an der waagrechten Mittelparallelen von Q, hier behält ebenfalls Q seine Lage und M seinen x-Wert. Falls nun noch eine Ecke von R im angegebenen Sektor liegt, spiegeln wir noch an an der Diagonalen von Q, die parallel zur zweiten Winkelhalbierenden ist; auch hier behält Q seine Lage und M bleibt im linken oberen Viertel von Q.)

Nun bezeichnen wir die Ecken von Q wie folgt: A(0|0), X(500|0), Y(500|500) und Z(0|500), Mit E sei diejenige Ecke von R bezeichnet, die die kleinste x-Koordinate hat, falls es zwei Punkte mit minimaler x-Koordinate gibt, diejenige mit der kleineren y-Koordinate. (vgl. Figur).

Nun betrachten wir die Gerade g: $0{,}29286 \cdot x - y = 0$; sie schneidet den Rand von Q in den Punkten A(0|0) sowie B(500| 0,29286·500). Wir werden zeigen, dass diese zwei Punkte A und B die in der Aufgabenstellung geforderte Eigenschaft haben. Dazu ist zu zeigen:

(1) Die Strecke AB hat eine Länge, die größer als 521 ist.

(2) Die Strecke AB hat mit R keinen Punkt gemeinsam; dabei genügt bereits zu zeigen, dass AB mit dem Rand von R keine gemeinsamen Punkte hat.

zu (1): Nach Pythagoras ist

$$\overline{AB}^2 = \overline{AX}^2 + \overline{XB}^2 = 500^2 + (0{,}29286 \cdot 500)^2 = 500^2\,(1 + 0{,}29286^2)$$
$$= 250000 \cdot 1{,}0857669796 = 271441{,}7449 > 271441 = 521^2.$$

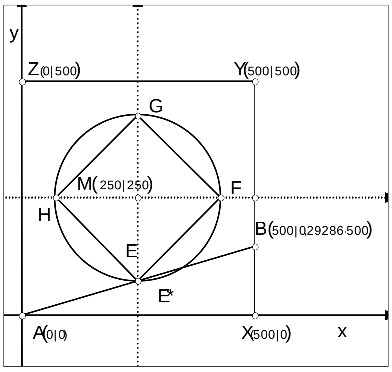
also ist $\overline{AB} > 521$.

zu (2):

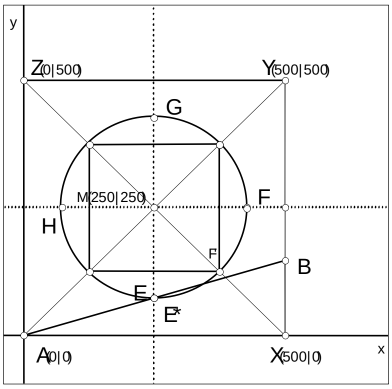
Mit τ bezeichnen wir die offene Halbebene bez. (AB), die M enthält und definieren zu jedem Punkt P mit den Koordinaten (x_P, y_P) die Zahl $d(P) = d(x_P, y_P) := 0{,}29286 \cdot x_P - y_P$; dies ist die linke Seite der Normalen-Gleichung der Geraden (AB). Offensichtlich ist wegen $x_m \le 250$ und $y_m \ge 250$ $d(M) < 0$ für alle M, damit besteht nach der bekannten Theorie der Hesse-Normalenform die Halbebene τ genau aus den Punkten Q, für die $d(Q) < 0$. Es genügt also zu zeigen, dass für alle Punkte P von R stets $d(P) < 0$ gilt; es genügt sogar, dies für die Punkte des Randes von R nachzuweisen.

Aus der Konstruktion von d ist sofort ersichtlich: Wird ein Punkt P, der auf τ oder auf (AB) liegt, so bewegt, dass seine x–Koordinate abnimmt oder seine y–Koordinate zunimmt, wird d(P) sicher kleiner, somit bleibt bzw. wird d(P) negativ und P liegt nach der Bewegung in τ.

(a) Zunächst betrachten wir einen Spezialfall: R liege so, dass M die Koordinaten (250|250) hat und E die x-Koordinate 250.



ME ist halbe Diagonale in einem Quadrat der Kantenlänge 250; nach bekannter Herleitung mit Pythagoras ist $\overline{ME}$ = $\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 250$. Für die y-Koordinate von E können wir also zusammen mit der Vorüberlegung abschätzen: $y_E = 250 - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 250 = (1 - \frac{\sqrt{2}}{2})\cdot 250 > 0{,}29286\cdot 250$. Letzteres ist die y-Koordinate des Punktes E* auf (AB) mit x–Koordinate 250; die Bewegung von E* nach E vergrößert also die y-Koordinate und lässt die x-Koordinate gleich, damit liegt E in τ. Die Seite EF hat die Steigung 1 > 0,29286, ist also steiler als (AB), somit gilt Gleiches für alle Punkte von EF. Analog können wir für alle Punkte von HE und damit alle Punkte von R schließen. Insbesondere haben AB und R keine gemeinsamen Punkte.

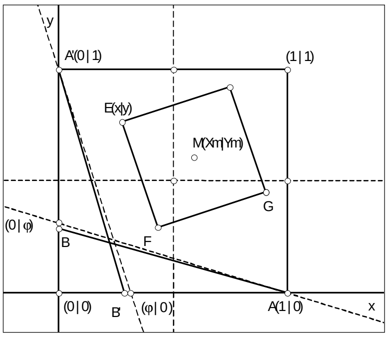


(b) Nun werde R um maximal 45° im Uhrzeigersinn gedreht. Nach der Eingangsbemerkung über die möglichen Lagen überstreicht R dabei alle möglichen Lagen von R bei festem Mittelpunkt M(250|250). Der Punkt E und die Seite EH bleiben bei dieser Drehung sicher in τ, da die x-Koordinate abnimmt und gleichzeitig die y-Koordinate zunimmt; HG bleibt in τ, weil die y-Koordinaten der betroffenen Punkte stets größer als 250 bleiben. EF und GF bleiben sicher so lange in τ, wie F in τ bleibt. Es genügt also zu zeigen, dass die Ecke F bei der Drehung stets in τ bleibt.

Hierfür stellen wir zunächst fest, dass R nach einer Drehung um 45° im Uhrzeigersinn seitenparallel mit Q liegt und dass die Ecke F deswegen zum Punkt F'(375|125) bewegt worden ist. Wegen $125 > 112{,}5 = 0{,}3 \cdot 375 > 0{,}29286 \cdot 375$ liegt F' sicher in τ.

Läge nun ein Punkt des Bogens FF' nicht in τ, so hätte der Kreisbogen FF' zwei (evtl. zusammenfallende) Schnittpunkte mit AB und zwischen diesen beiden Schnittpunkten einen Kreispunkt dieses Kreisbogens FF' mit einer zu AB parallele Tangente. Dies kann jedoch nicht sein, da jede solche Tangente eine Steigung hat, die größer als 1 und damit größer als die Steigung von AB ist.

(c) Jede beliebige Lage von R, die in der Eingangsbemerkung zugelassen wurde, können wir aus den bei (a) und (b) beschriebenen Lagen durch eine Verschiebung nach links parallel zur x-Achse und einer anschließenden Verschiebung nach oben parallel zur y-Achse erreichen. Dabei nehmen aber stets die x-Koordinaten aller Punkte von R ab, die y-Koordinaten nehmen zu, also bleiben alle Punkte von R in τ.



2. Beweis (direkte Abschätzung mit Koordinaten): Wir legen Q so in ein orthogonales Koordinatensystem, dass eine Ecke in den Ursprung und zwei Kanten auf die positiven Achsen zu liegen kommen. Um mit einfacheren Zahlen rechnen zu können, wählen wir die Einheiten des Koordinatensystems so, dass die Ecken von Q die Koordinaten (0|0), (1|0), (1|1) und (0|1) haben; in unserem Koordinatensystem hat also das Quadrat Q Kantenlänge 1, das Quadrat R die Kantenlänge 0,5 und es ist nachzuweisen, dass es zwei Randpunkte von Q gibt, deren Verbindungsstrecke keine gemeinsamen Punkte mit R und mindestens die Länge $521\cdot\frac{1}{500}$ = 1,042 hat.

Wir bezeichnen drei gegen den Uhrzeigersinn folgende Ecken von R mit E(x|y), F und G, den Mittelpunkt von R mit M(x_m|y_m), den Winkel, den die Strecke EM mit einer beliebig gewählten Richtung (z.B. der x-Achse) bildet, mit α. Jede mögliche Lage von R kann nun mit den drei Variablen x,y, und α

(wobei $x,y \in [0,1]$ und $\alpha \in [0°,360°)$) beschrieben werden. Die Koordinaten der beteiligten Punkte sind dann (es ist ja $\angle FEM = 45°$, $\overline{EM} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\overline{EF} = \frac{1}{2}$ und $\overline{EG} = \frac{\sqrt{2}}{2}$):

$E(x,y)$, $M(x+\frac{\sqrt{2}}{4}\cos(\alpha) \mid y+\frac{\sqrt{2}}{4}\sin(\alpha))$, $F(x+\frac{1}{2}\cos(\alpha-45°) \mid y+\frac{1}{2}\sin(\alpha-45°))$, sowie $G(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\alpha) \mid y+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\alpha))$.

O.B.d.A. sei $x_m \geq 0,5$ und $y_m \geq 0,5$, andernfalls spiegele man R und Q an einer oder beiden Mittelparallelen von Q. (Bei diesen Spiegelungen behält ja Q seine Lage relativ zum Koordinatensystem)

Wir werden zeigen, dass bei der so beschriebenen Lage von Q und R wenigstens eines der Punktepaare A(1|0) und B(0|0,28296) oder A'(0,28296|0) und B'(0|1) die geforderte Eigenschaften hat; dies geschieht durch Nachweis folgender dreier Tatsachen:

1. Die Punkte A, B, A' und B' liegen auf dem Rand von Q: Da jeweils eine Koordinate den Wert Null, die andere Koordinate einen Wert aus [0,1] hat, ist dies offensichtlich der Fall.

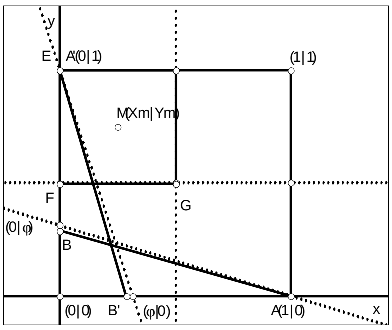
2. Es ist $\overline{AB} = \overline{A'B'} > 1,042$: Dies ergibt sich sofort mit Pythagoras aus $\overline{AB}^2 = \overline{A'B'}^2 = 1^2 + 0,28926^2 = 1,0857669796 > 1,085764 = 1,042^2$.

3. Wenigstens eine der beiden Verbindungsstrecken hat keinen Punkt mit R gemeinsam: Dies beweisen wir, indem wir die Annahme "Beide Verbindungsstrecken haben einen Punkt mit R gemeinsam" zum Widerspruch "$x_m < 0,5$ oder $y_m < 0,5$ " führen.

Hierzu definieren wir $\varphi := 1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ sowie die beiden offenen Halbebenen $\rho := \{(x,y) \mid \varphi x + y < \varphi\}$ und $\sigma := \{(x,y) \mid x + \varphi y < \varphi\}$; die Ränder dieser beiden Halbebenen sind durch die Geraden durch die Punkte (1|0) und $(0|\varphi)$ bzw. $(\varphi|0)$ und (0|1) definiert. Beide enthalten den Ursprung, aber keinen Punkt, bei dem die x-Koordinate oder die y-Koordinate mindestens den Wert 0,5 annimmt.

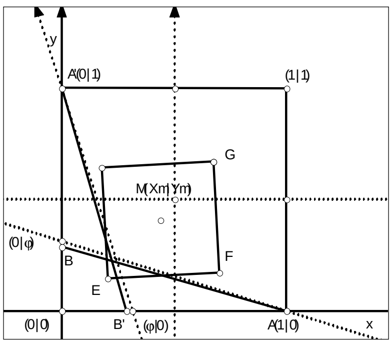
Der Punkt A(1|0) liegt auf dem Rand von ρ. Nach der Vorbetrachtung ist $\varphi = 1-\frac{\sqrt{2}}{2} > 0,29286$, damit liegt B(0|0,29286) in ρ, ebenso die Verbindungsstrecke AB mit Ausnahme des Punktes A(0|1). Analog ist A'(0|1) auf dem Rand von σ, B'(2,9286|0) und A'B' mit Ausnahme von A' in σ .

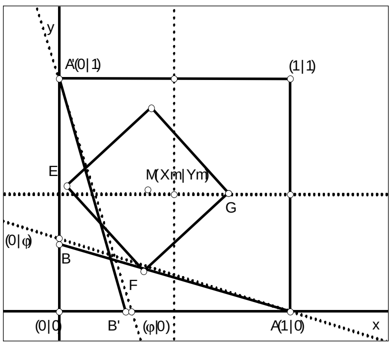
Haben nun beide Verbindungsstrecken einen Punkt mit R gemeinsam, unterscheiden wir zwei Fälle:

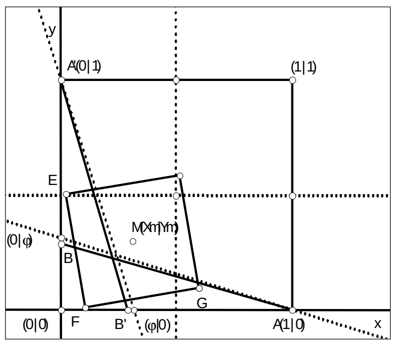


Fall 1: Einer der gemeinsamen Punkte sei (1|0) oder (0|1). Da R vollständig in Q liegt, ist (1|0) oder (0|1) dann eine Ecke von R, o.B.d.A. sei dies E. Dann hat aber M die Koordinaten $M(1+\frac{\sqrt{2}}{4}\cos(\alpha)|0+\frac{\sqrt{2}}{4}\sin(\alpha))$ oder $M(0+\frac{\sqrt{2}}{4}\cos(\alpha)|1+\frac{\sqrt{2}}{4}\sin(\alpha))$; dies führt wegen $\frac{\sqrt{2}}{4} < \frac{1}{2}$, $\sin(\alpha) \leq 1$ und $\cos(\alpha) \leq 1$ zum gewünschten Widerspruch $y_m < 0,5$ oder $x_m < 0,5$.

Fall 2: Keiner der gemeinsamen Punkte sei (1|0) oder (0|1): Dann liegt jeder dieser gemeinsamen Punkte in einer der beiden Halbebenen σ oder ρ. Falls $x_m < 0,5$ oder $y_m < 0,5$, haben wir bereits den Widerspruch. Falls $x_m \geq 0,5$ und $y_m \geq 0,5$, hat das Quadrat R mit dem Punkt M auch mindestens einen Punkt, der in keiner der beiden Halbebenen liegt, damit schneiden die Verbindungsstrecken AB und A'B' das Quadrat R und auch seine Seiten. Damit liegt aber auch eine Ecke von R in σ und eine (evtl. mit der ersten identischen) Ecke von R in ρ. Nun unterscheiden wir drei Unterfälle:







Fall 2 (i): Eine Ecke liegt sowohl in σ als auch in ρ, d.h. o.B.d.A. ist E ∈ σ und E ∈ ρ:

Dann gelten die beiden Ungleichungen

$$x + \varphi y < \varphi$$
$$\varphi x + y < \varphi\,;$$

hieraus folgt nacheinander mit Addition und anschließender Division durch $(1+\varphi) \neq 0$

$$(1+\varphi)\cdot x + (1+\varphi)\cdot y < 2\varphi \quad \text{und}$$

$$x + y < \frac{2\varphi}{1+\varphi}$$

$$= \frac{2-\sqrt{2}}{2-\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \frac{2+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2+\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4+\sqrt{2}-2\sqrt{2}-1}{4-\frac{2}{4}} = \frac{3-\sqrt{2}}{3{,}5} < \frac{3-1{,}4}{3{,}5} < \frac{1{,}6}{3{,}5} < 0{,}5\,.$$

Andererseits ist

$$x_m + y_m = x + \tfrac{\sqrt{2}}{4}\cos(\alpha) + y + \tfrac{\sqrt{2}}{4}\sin(\alpha) = x + y + \tfrac{\sqrt{2}}{4}(\sin(\alpha)+\cos(\alpha))$$
$$= x + y + \tfrac{\sqrt{2}}{4}\cdot\tfrac{2}{\sqrt{2}}\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin(\alpha) + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos(\alpha)\right) = x + y + \tfrac{1}{2}\cdot(\cdot\sin(\alpha+45°) < \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1.$$

Aus $x_m + y_m < 1$ folgt aber sofort der gewünschte Widerspruch $x_m < 0{,}5$ oder $y_m < 0{,}5$.

Fall 2 (ii): Eine Ecke liegt in σ, eine benachbarte in ρ; also o.B.d.A. ist E ∈ σ und F ∈ ρ:

Dann gilt $x + \varphi y < \varphi$ und $\varphi(x + \tfrac{1}{2}\cos(\alpha\text{-}45°)) + y + \tfrac{1}{2}\sin(\alpha\text{-}45°) < \varphi$; hieraus folgt durch Addition, Anwendung der Additionstheoreme sowie ähnliche Umformungen wie in Fall 2 (i):

$$(1+\varphi)\cdot x + (1+\varphi)\cdot y + \tfrac{1}{2}\cdot\varphi\cdot(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos(\alpha)\cdot + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\sin(\alpha)) + \tfrac{1}{2}(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\sin(\alpha) - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos(\alpha) < 2\varphi$$

$$\Leftrightarrow\ (1+\varphi)\cdot(x+y) + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\sin(\alpha)[\tfrac{1}{2}\cdot\varphi + \tfrac{1}{2}] + \cos(\alpha)[\tfrac{1}{2}\cdot\varphi - \tfrac{1}{2} + 1 - 1]) < 2\varphi$$

$$\Leftrightarrow\ (1+\varphi)\cdot(x+y) + (1+\varphi)\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\sin(\alpha) + \cos(\alpha)) < 2\varphi + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow\ (x+y) + \tfrac{\sqrt{2}}{4}\cdot(\sin(\alpha) + \cos(\alpha)) < \frac{2\varphi}{1+\varphi} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\alpha)}{1+\varphi}\,.$$

Die linke Seite können wir – wie in Fall 2(i) hergeleitet – durch $x_m + y_m$ ersetzten, also folgt

$$x_m + y_m < \frac{3-\sqrt{2}}{3{,}5} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2-\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \frac{2+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2+\frac{\sqrt{2}}{2}}\cos(\alpha) < \frac{3-\sqrt{2}}{3{,}5} + \frac{\sqrt{2}+\frac{1}{2}}{3{,}5} = 1.$$

Wie im Fall (i) folgt auch hier der gewünschte Widerspruch $x_m < 0{,}5$ oder $y_m < 0{,}5$.

Fall 2 (iii): Eine Ecke liegt in σ, die gegenüberliegende in ρ; also o.B.d.A ist E ∈ σ und G ∈ ρ:

Dann gilt $x + \varphi y < \varphi$ und $\varphi\cdot(x + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\cos(\alpha)) + \cdot y + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\sin(\alpha) < \varphi$; hieraus folgt durch Addition

$$(1+\varphi)\cdot(x+y) + \varphi\cdot\tfrac{\sqrt{2}}{2}\cos(\alpha) + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\sin(\alpha) < 2\varphi\,.$$

Wir spalten von der linken Seite wieder $(1+\varphi)\cdot(x+y) + \tfrac{\sqrt{2}}{4}\cdot(\sin(\alpha) + \cos(\alpha))$ ab:

$$\Leftrightarrow\ (1+\varphi)\cdot(x+y) + [\varphi\cdot\tfrac{\sqrt{2}}{4}\cos(\alpha) + \varphi\cdot\tfrac{\sqrt{2}}{4}\cos(\alpha)] + [\tfrac{\sqrt{2}}{4}\cos(\alpha) - \tfrac{\sqrt{2}}{4}\cos(\alpha)] + [\tfrac{\sqrt{2}}{4}\sin(\alpha) +$$
$$\tfrac{\sqrt{2}}{4}\sin(\alpha)] + [\varphi\cdot\tfrac{\sqrt{2}}{4}\sin(\alpha) - \varphi\tfrac{\sqrt{2}}{4}\sin(\alpha)] < 2\varphi$$

$$\Leftrightarrow \quad (1+\varphi)\cdot(x+y)+(1+\varphi)\cdot\tfrac{\sqrt{2}}{4}(\cos(\alpha)+\sin(\alpha)) < 2\varphi - \varphi\tfrac{\sqrt{2}}{4}\cos(\alpha)+\tfrac{\sqrt{2}}{4}\cos(\alpha) - \tfrac{\sqrt{2}}{4}\sin(\alpha) + \varphi\tfrac{\sqrt{2}}{4}\sin(\alpha);$$

nach Division durch $(1+\varphi)\neq 0$ können wir dies unter Verwendung weiter oben erzielter Zwischenergebnisse recht grob abschätzen

$$\Rightarrow \quad x_m + y_m < \frac{2\varphi}{1+\varphi} + \tfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\cos(\alpha)-\sin(\alpha)\right)\cdot\frac{1-\varphi}{1+\varphi} < \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos(\alpha+45°)\cdot\frac{0{,}8}{1} < 1.$$

Wieder folgt der gewünschte Widerspruch $x_m < 0{,}5$ oder $y_m < 0{,}5$.