Bundeswettbewerb Mathematik

Wissenschaftszentrum, Postfach 20 14 48, 53144 Bonn
Fon: 0228 - 3727 411 • Fax: 0228 - 3727 413
e-mail: info@bundeswettbewerb-mathematik.de
www.bundeswettbewerb-mathematik.de

Korrekturkommission • Karl Fegert

Aufgaben und Lösungen

1. Runde 2002

Stand: Mai 2002

Aufgabe 1: Auf dem Planeten Ypsilon besteht das Jahr – wie bei uns – aus 365 Tagen. Auch dort gibt es nur Monate mit 28, 30 oder 31 Tagen.

Man beweise, dass auf Ypsilon das Jahr ebenfalls 12 Monate haben muss.

Gemeinsame Bezeichnungsweisen: Mit a, d bzw. e bezeichnen wir – den Anfangsbuchstaben der Zahlen entsprechend – die Anzahl der Monate mit 28, 30 bzw. 31 Tagen; mit m die Gesamtzahl der Monate des Jahres auf Ypsilon.

1. Beweis (durch Abschätzung): Eine Einteilung des Jahres auf Ypsilon in 11 Monate oder weniger ist nicht möglich, weil die größtmögliche Tageszahl bei einer solchen Einteilung $11 \cdot 31 = 341$ Tage wäre; dies sind 24 Tage zuwenig.

Die kleinstmögliche Zahl von Tagen bei einer Einteilung in 13 oder mehr Monate ist $13 \cdot 28 = 364$ Tage; sie ist gegeben, wenn man ausschließlich Monate mit 28 Tagen hat. Für eine Einteilung mit 365 Tagen, also genau einem Tag mehr, muss man mindestens einen Monat länger machen oder mindestens einen zusätzlichen Monat einführen. Die erste Maßnahme ergibt aber mindestens zwei Tage mehr, die zweite Maßnahme mindestens 28 Tage mehr.

Es bleibt also höchstens die Möglichkeit mit 12 Monaten.

Variante (abstrakte Formulierung): Wir betrachten die nicht-negativen ganzzahligen Lösungen (a,d,e,m) des Gleichungssystems

$$365 = 28a + 30d + 31e \quad \text{und} \quad m = a + d + e.$$

Es ist sicher $28m = 28(a+d+e) \le 28a + 30d + 31e = 365 \le 31(a+d+e) = 31m$; nach Division durch 28 bzw. 31 folgt $\frac{365}{31} \le m \le \frac{365}{28}$, also $11\frac{24}{31} < m < 13\frac{1}{28}$. Da m ganzzahlig ist, folgt $m = 12$ oder $m = 13$.

Wäre $m = 13$, ergäbe sich die notwendige Bedingung

$365 = 28a + 30d + 31e = 28(a + d + e) + 2d + 3e = 28m + 2d + 3e = 28 \cdot 13 + 2d + 3e = 364 + 2d + 3e$ oder äquivalent $1 = 2d + 3e$.

Falls $d = e = 0$, ist $2d + 3e = 0$; falls $d > 0$ oder $e > 0$, ist $2d + 3e \ge 2$. Da hiermit alle möglichen Werte für d und e untersucht sind, kann $2d + 3e$ niemals den Wert 1 annehmen. Damit scheidet $m = 13$ aus und es bleibt $m = 12$ als einzige Möglichkeit.

2. Beweis (Abschätzung und Betrachtung $mod(2)$): Wir betrachten die nicht-negativen ganzzahligen Lösungen (a,d,e,m) des Gleichungssystems

$$365 = 28a + 30d + 31e \quad \text{und} \quad m = a + d + e.$$

Da 365 ungerade ist, muss die Summe auf der rechten Seite der ersten Gleichung mindestens einen ungeraden Summanden enthalten; damit ist $e \ge 1$ und es gilt:

$$28(m-1) = 28(a+d+e-1) \le 28a + 30d + 31(e-1) = 365 - 31 = 334 \le 31(a+d+(e-1)) = 31(m-1);$$

Division durch 28 bzw. 31 ergibt $10\frac{24}{31} = \frac{334}{31} \le m - 1 \le \frac{334}{28} = 11\frac{26}{28}$. Da m ganzzahlig ist, folgt $m = 12$.

Bemerkung: Gefunden wird nur eine notwendige Bedingung. Es wird nicht untersucht, ob eine Einteilung mit 12 Monaten tatsächlich möglich ist. Dies wird in der Aufgabenstellung auch nicht verlangt.

3. Beweis (Betrachtung mod 30 und mod 10 mit Angabe aller möglichen Kalendereinteilungen): Wir suchen alle ganzzahligen und nicht-negativen Lösungen (a,d,e,m) des Gleichungssystems

$$365 = 28a + 30d + 31e \quad \text{(A)} \quad \text{und} \quad m = a + d + e. \quad \text{(B)}$$

Da die Variablen a, d und e ganzzahlig und nicht negativ sind, folgt aus (A)

$$0 \le a \le 13,\ 0 \le d \le 12 \text{ und } 0 \le e \le 11.$$

Betrachtet man in Gleichung (A) die Reste mod 30, so erhält man die notwendige Bedingung

$$5 \equiv -2a + 0d + e \ mod\ 30 \text{ oder äquivalent } e \equiv 5 + 2a \ mod\ 30.$$

$a = 13$ scheidet aus, sonst wäre $e \equiv 5 + 2\cdot 13 \equiv 5 + 26 \equiv 31 \equiv 1 \; mod \; 30$; wegen $0 \le e \le 11$ sogar $e = 1$. Einsetzen in (A) ergäbe $365 = 28\cdot 13 + 30d + 31 \Leftrightarrow 365 = 364 + 30d + 31 \Leftrightarrow d = -1$; dies widerspricht der Bedingung $0 \le d \le 12$.

Also ist $0 \le a \le 12$, damit ist $0 < 5+2a < 30$ und aus der Gleichung $e \equiv 5 + 2a \; mod \; 30$ folgt zusammen mit $0 \le e \le 11$ sogar $e = 5 + 2a$. Dies setzen wir in (A) ein und erhalten $365 = 28a + 30d + 31(5 + 2a)$ $\Leftrightarrow$ $210 = 90a + 30d \Leftrightarrow d = 7 - 3a$. Dies setzen wir schließlich in (B) ein und erhalten die notwendige Bedingung $m = a + (7 - 3a) + (5 + 2a) = 12$.

Aus $0 \le d = 7 - 3a$ folgt sofort $a < \frac{7}{3}$, also $a \in \{0,1,2\}$. Setzt man diese Werte in (A) ein, so erhält man zusammen mit der Bedingung $e \le 12$ und der Überlegung, dass die Einerziffer des Ausdrucks $30d + 31e$ allein durch die Zahl e bestimmt wird, die notwendigen Bedingungen

$a = 0 \;\Rightarrow\; 365 = 28\cdot 0 + 30d + 31e \;\Rightarrow\; e = 5$, mit (B) folgt $d = 12 - 5 = 7$,

$a = 1 \;\Rightarrow\; 365 = 28\cdot 1 + 30d + 31e \;\Rightarrow\; 337 = 30d + 31e \;\Rightarrow\; e = 7$, mit (B) folgt $d = 12 - 1 - 7 = 4$,

$a = 2 \;\Rightarrow\; 365 = 28\cdot 2 + 30d + 31e \;\Rightarrow\; 309 = 30d + 31e \;\Rightarrow\; e = 9$, mit (B) folgt $d = 12 - 2 - 9 = 1$.

Überprüfung in (A) ergibt, dass diese notwendigen Bedingungen auch hinreichend sind, d.h. dass die so gefundenen Quadrupel (0,7,5,12), (1,4,7,12), und (2,1,9,12) tatsächlich Lösungen des Gleichungssystems (A) und (B) sind.

Aufgabe 2: Die Loszettel einer gewissen Lotterie enthalten sämtliche neunstelligen Zahlen, die mit den Ziffern 1, 2, 3 gebildet werden können; dabei steht auf jedem Loszettel genau eine Zahl. Es gibt nur rote, gelbe und blaue Loszettel.

Zwei Losnummern, die sich an allen neun Stellen unterscheiden, stehen stets auf Zetteln verschiedener Farbe. Jemand zieht ein rotes Los und ein gelbes Los; das rote Los hat die Nummer 122 222 222, das gelbe Los hat die Nummer 222 222 222.

Der Hauptgewinn fällt auf das Los mit der Nummer 123 123 123. Welche Farbe hat es? Die Richtigkeit der Antwort ist zu beweisen.

Antwort: Das Los mit der Nummer 123 123 123 hat die Farbe rot.

1. Beweis: Wir geben der Reihe nach 6 Losnummern an und schließen aus den Bedingungen der Aufgabe jeweils auf deren Farbe (vgl. Tabelle):

<table>
<tr><th>Zeile</th><th>Losnummer</th><th>Farbe</th><th colspan="2">Begründung für die Farbe:</th></tr>
<tr><td>1</td><td>122 222 222</td><td>rot</td><td colspan="2">Voraussetzung</td></tr>
<tr><td>2</td><td>222 222 222</td><td>gelb</td><td colspan="2">Voraussetzung</td></tr>
<tr><td>3</td><td>313 113 113</td><td>nicht rot, nicht gelb, also blau</td><td rowspan="4">Nummer des Loses unterscheidet sich an jeder Stelle von der Nummer des Loses in Zeilen</td><td>1 und 2</td></tr>
<tr><td>4</td><td>231 331 331</td><td>nicht rot, nicht blau, also gelb</td><td>1 und 3</td></tr>
<tr><td>5</td><td>331 331 331</td><td>nicht rot, nicht gelb, also blau</td><td>1 und 2</td></tr>
<tr><td>6</td><td>123 123 123</td><td>nicht gelb, nicht blau, also rot</td><td>4 und 5</td></tr>
</table>

Bemerkung: Mit diesem Beweis ist die Aufgabe vollständig gelöst. Unbefriedigend bleibt, dass nur eine notwendige Bedingung gezeigt wird: Es bleibt ungeklärt, ob die in der Aufgabenstellung vorausgesetzte Existenz einer Färbung überhaupt gegeben ist. Wäre dies nicht der Fall, hätte man eine Eigenschaft eines nicht existierenden Objektes gezeigt.

2. Beweis: Über die Aufgabenstellung hinaus wird bewiesen:

(1) Färbt man jedes Los mit Anfangsziffer 1 rot, jedes Los mit Anfangsziffer 2 gelb und jedes Los mit Anfangsziffer 3 blau, so erfüllt diese Färbung die Bedingungen der Aufgabenstellung.

(2) Diese Färbung ist die einzige, die die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt.

Hieraus folgt dann sofort, dass das Los mit der Nummer 123 123 123 rot ist.

Wir schreiben $d \# e$ ($d,e \in \{1,2,3\}^9$), wenn sich die Losnummern d und e an allen Stellen unterscheiden.

Zu einer Losnummer n ($n \in \{1,2,3\}^9$) konstruieren wir drei Losnummern, die wir mit n^* bzw. $n^\sim$ bzw. n' bezeichnen:

n^* entstehe aus n dadurch, dass jede Ziffer 1 durch eine 3, jede Ziffer 3 durch eine 1 und jede Ziffer 2 durch eine 1 ersetzt wird,

$n^\sim$ entstehen aus n dadurch, dass ebenfalls jede Ziffer 1 durch eine 3, jede Ziffer 3 durch eine 1 aber jede Ziffer 2 durch eine 3 ersetzt wird,

n' entstehe aus n durch zyklisches Vertauschen: Jede Ziffer 1 wird durch eine 2, jede Ziffer 2 durch eine 3 und jede Ziffer 3 durch eine 1 ersetzt.

Aus dieser Konstruktion folgen unmittelbar die Beziehungen $n \# n^*$, $n \# n^\sim$, $n \# n'$ und $n \# (n')'$. Ferner haben alle Lose n^* und $n^\sim$ nur Ziffern 1 oder 3.

Beweis zu (1): Wenn sich zwei Losnummern an allen Stellen unterscheiden, so unterscheiden sie sich insbesondere auch in der Anfangsziffer; damit haben die zugehörigen Loszettel wie verlangt verschiedene Farben. Direkt aus der Färbungsregel folgt auch, dass das Los mit der Nummer 122 222 222 rot und das Los mit der Nummer 222 222 222 gelb ist.

Beweis zu (2): Zunächst werden die Farben von Losen mit speziellen Nummern bestimmt:

Sei d eine Losnummer mit Anfangsziffer 3, die sonst nur Ziffern 1 oder 3 hat. Dann ist sowohl d # 122 222 222 als auch d # 222 222 222. Weil 122 222 222 rot und 222 222 222 gelb ist, ist das Los d demnach weder rot noch gelb, also blau.

Sei e eine Losnummer mit Anfangsziffer 1, die sonst nur Ziffern 1 oder 3 hat. Dann ist die erste Ziffer von e^* eine 3 und e^* hat nur Ziffern 1 oder 3; nach vorigem Absatz ist e^* also blau. Da zusätzlich $e \# e^*$ und nach Konstruktion auch e # 222 222 222, ist das Los e weder blau noch gelb, also rot.

Damit können wir nun die Hauptaussage beweisen:

Sei z eine beliebige Losnummer mit Anfangsziffer 2. Dann hat z^* die Anfangsziffer 1 und sonst nur Ziffern 1 oder 3; nach vorigem Absatz ist z^* also rot. Entsprechend hat $z^\sim$ die Anfangsziffer 3 und sonst ebenfalls nur Ziffern 1 oder 3, ist also nach dem vorletzten Absatz blau. Da zusätzlich sowohl $z \# z^*$ als auch $z \# z^\sim$, ist z weder rot noch blau, also gelb.

Sei e eine beliebige Losnummer mit Anfangsziffer 1. Dann hat e^* die Anfangsziffer 3 und enthält sonst nur Ziffern 1 oder 3; nach dem ersten Absatz ist e^* also blau. Ferner hat e' die Anfangsziffer 2, ist also nach vorigem Absatz gelb. Da zusätzlich $e \# e^*$ und $e \# e'$, ist e weder blau noch gelb, also rot.

Sei schließlich d eine beliebige Losnummer mit Anfangsziffer 3. Dann hat d^* die Anfangsziffer 1, ist also nach vorigem Absatz rot. Ferner hat $(d')'$ die Anfangsziffer 2, ist also nach vorletztem Absatz gelb. Da zudem $d \# d^*$ und $d \# (d')'$, ist d weder rot noch gelb, also blau.

Aufgabe 3: Die Seiten eines konvexen Vierecks zerlegen einen Kreis in acht Teilbögen, von denen vier innerhalb und vier außerhalb des Vierecks liegen (s. Skizze). Die Längen der inneren Bögen seien gegen den Uhrzeigersinn mit a, b, c, d bezeichnet; es gelte $a+c = b+d$.

Man beweise, dass das Viereck ein Sehnenviereck ist.

Gemeinsame Bezeichnungsweisen: Wir bezeichnen (vgl. Figur zu Beweis 1)

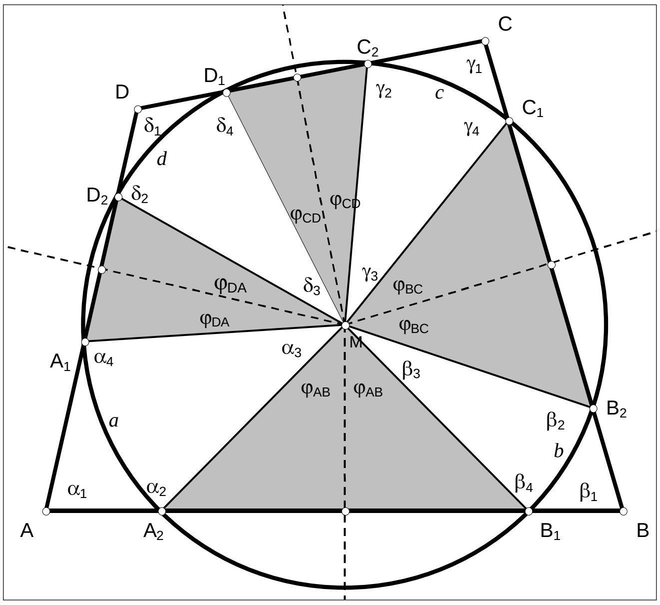
– die Teilpunkte auf dem Kreis fortlaufend gegen den Uhrzeigersinn mit A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1 und D_2, und zwar so, dass A_1 und A_2 die Endpunkte des Bogens mit der Länge a sind,

– die Ecken des Vierecks ebenfalls fortlaufend gegen den Uhrzeigersinn mit A, B, C und D, und zwar so, dass A zwischen A_1 und A_2 liegt,

– die Innenwinkel des Vierecks passend zur Bezeichnung der zugehörigen Ecken mit α_1 β_1, γ_1 und δ_1.

1. Beweis: Bekanntlich ist ein Viereck dann ein Sehnenviereck, wenn sich zwei gegenüberliegende Innenwinkel zu 180° ergänzen oder die beiden Summen aus gegenüberliegenden Winkel gleich sind. Es genügt also, einen dieser beiden Sachverhalte für das gegebene Viereck nachzuweisen.

Die Innenwinkel des Vierecks AA_2MA_1 seien beginnend bei der Ecke A fortlaufend gegen den Uhrzeigersinn mit α_1, α_2, α_3 und α_4 bezeichnet, die Innenwinkel der Vierecke BB_2MB_1, CC_2MC_1 und DD_2MD_1 in analoger Weise mit β_i, γ_i und δ_i (i = 1,2,3,4). (Falls der Mittelpunkt des Kreises außerhalb des Vierecks liegt, sind einige dieser Innenwinkel überstumpf.)



Variante 1: Die Innenwinkelsumme eines Vierecks ist stets 360°, dies gilt auch für die Innenwinkel der Vierecke AA_2MA_1, CC_2MC_1, BB_2MB_1 und DD_2MD_1. Also ist

$$\sum_{i=1}^{4}(\alpha_i+\gamma_i)=\sum_{i=1}^{4}(\beta_i+\delta_i) \qquad \text{(A).}$$

Die Strecken A_2B_1 ist Sehne des gegebenen Kreises, ihre Mittelsenkrechte ist damit gleichzeitig Symmetrieachse, bezüglich derer die Winkel α_2 und β_4 symmetrisch liegen und damit die gleiche Weite haben. Analoge Überlegungen mit den Mittelsenkrechten der Sehnen B_2C_1, C_2D_1 und D_2A_1 ergeben also, dass $\alpha_2 = \beta_4$, $\beta_2 = \gamma_4$, $\gamma_2 = \delta_4$ und $\delta_2 = \alpha_4$; diese Werte subtrahieren wir auf beiden Seiten von (A) und erhalten so $\alpha_1+\alpha_3+\gamma_1+\gamma_3 = \beta_1+\beta_3+\delta_1+\delta_3$. Hieraus folgt sofort die Äquivalenz (mit r sei der Radius des Kreises bezeichnet)

$$\alpha_1 + \gamma_1 = \beta_1+ \delta_1 \Leftrightarrow \alpha_3 + \gamma_3 = \beta_3 + \delta_3 \Leftrightarrow (\alpha_3 + \gamma_3)\frac{\pi r}{180°} = (\beta_3 + \delta_3)\frac{\pi r}{180°} \Leftrightarrow a + c = b + d.$$

Bemerkung: Damit wurde auch die Umkehrung der Aussage der Aufgabe bewiesen: Wenn das Viereck einen Sehnenviereck ist, gilt $a + c = b + d$.

Variante 2: Wir betrachten zunächst den Fall, dass der Mittelpunkt des Kreises im Innern des gegebenen Vierecks liegt (vgl. Figur zu Beweis 1).

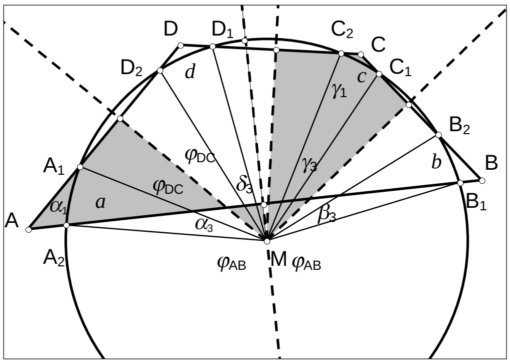
Die Strecken A_2B_1, B_2C_1, C_2D_1 und D_2A_1 sind Sehnen des gegebenen Kreises, damit teilen ihre Mittelsenkrechten die zugehörigen Mittelpunktswinkel in zwei gleichgroße Winkel auf, deren Weite wir entsprechend ihrer Lage mit φ_{AB}, φ_{BC}, φ_{CD} und φ_{DA} bezeichnen. Den Vollwinkel bei M haben wir somit in 12 Teilwinkel aufgeteilt, es ist also $\alpha_3 + 2\varphi_{AB}+ \beta_3 + 2\varphi_{BC} + \gamma_3 + 2\varphi_{CD} + \delta_3 + 2\varphi_{DA} = 360°$.

Die genannten Mittelsenkrechten zerschneiden das gegebene Viereck in vier Teilvierecke, die jeweils zwei rechte Innenwinkel haben. Nun addieren wir die Innenwinkel derjenigen Teilvierecke, die die Ecken A und C enthalten, und erhalten so (da Bogenlänge und zugehöriger Mittelpunktswinkel proportional sind, folgt aus $a+c = b+d$ sofort $\alpha_3 + \gamma_3 = \beta_3 + \delta_3$):

$$\begin{aligned}
2\cdot 360° &= [\alpha_1 + 90° + (\varphi_{AB} + \alpha_3 + \varphi_{DA}) + 90°] + [\gamma_1 + 90° + (\varphi_{BC} + \gamma_3 + \varphi_{CD}) + 90°] \quad (*)\\
\Leftrightarrow\ 360° &= [\alpha_1 + (\varphi_{AB} + \alpha_3 + \varphi_{DA})] + [\gamma_1 + (\varphi_{BC} + \gamma_3 + \varphi_{CD})]\\
&= \alpha_1 + \gamma_1 + \tfrac{1}{2}\,[2\varphi_{AB} + 2\varphi_{DA} + 2\varphi_{BC} + 2\varphi_{CD} + 2(\alpha_3 + \gamma_3)]\\
&= \alpha_1 + \gamma_1 + \tfrac{1}{2}\,[2\varphi_{AB} + 2\varphi_{DA} + 2\varphi_{BC} + 2\varphi_{CD} + (\alpha_3 + \gamma_3) + (\beta_3 + \delta_3)]\\
&= \alpha_1 + \gamma_1 + \tfrac{1}{2}\,360° \quad \Leftrightarrow \quad 180° = \alpha_1 + \gamma_1.
\end{aligned}$$

Falls der Mittelpunkt außerhalb des Vierecks liegt (o.B.d.A. seien M und CD in verschiedenen Halbebenen bez. (AB)), ist der von der Mittelsenkrechten auf A_2B_1 halbierte Winkel überstumpf, also

$\varphi_{AB} > 90°$ und das Teilviereck mit Ecke A ist jetzt ein überschlagenes Viereck, das in zwei Teildreiecke zerfällt. Diese stimmen in zwei Winkeln überein: den beiden durch die Mittelsenkrechten bestimmten rechten Winkeln und zwei Scheitelwinkeln. Also sind auch die dritten Winkel gleich, d.h. es ist $\alpha_1 = 180° - (\varphi_{AB} + \alpha_3 + \varphi_{DA})$.



Also ist $[\alpha_1 + 90° + (\varphi_{AB} + \alpha_3 + \varphi_{DA}) + 90°\ ] = 360°$, damit gilt auch in diesem Fall die Gleichung (*) und die daraus resultierende Folgerung $180° = \alpha_1 + \gamma_1$.

Falls der Mittelpunkt auf einer Seite des betrachteten Vierecks liegt (o.B.d.A. sei dies AB), ist $\varphi_{AB} = 90°$ und das Teilviereck mit der Ecke A entartet zu einem Dreieck. Addition der Innenwinkelsummen der Teilvierecke mit Ecken A und C ergibt dann die Gleichung

$$180° + 360° = [\alpha_1 + (\ + \alpha_3 + \varphi_{DA}) + 90°\ ] + [\gamma_1 + 90° + (\varphi_{BC} + \gamma_3 + \varphi_{CD}) + 90°];$$

diese ist äquivalent zu (*), wie die Addition von $180° = 90° + \varphi_{AB}$ auf beiden Seiten zeigt. Demnach folgt in diesem Fall ebenfalls $180° = \alpha_1 + \gamma_1$.

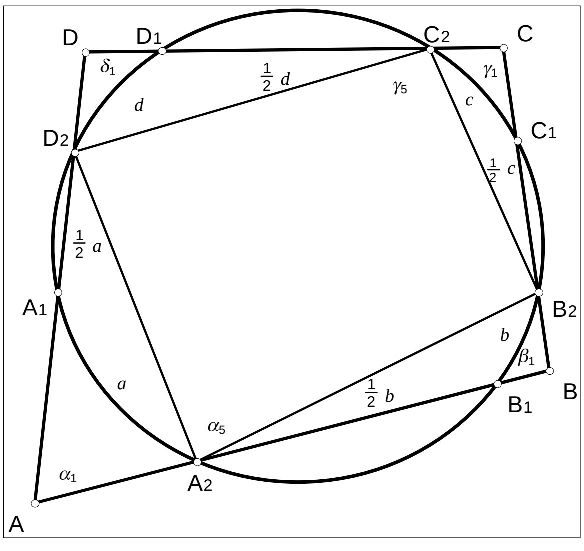
2. Beweis (Invarianzprinzip): Wir formen die Gleichung (A) aus der 1. Variante des 1. Beweises mit ähnlichen Überlegungen (ohne die Voraussetzung $a+c=b+d$ zu verwenden!) äquivalent um zu $(\alpha_1+\gamma_1) - (\beta_1+\delta_1) = (\beta_3+\delta_3) - (\alpha_3+\gamma_3)$; diese Identität ist unabhängig von der Lage und Größe des Kreises.

Hieraus können wir folgern: Verschiebt oder vergrößert man den Kreis, dann verändern sich zwar mit der Figur die Werte α_1, β_1 usw. zu α_1', β_1' usw., es gilt aber – solange der Kreis noch mit jeder Vierecksseite zwei gemeinsame Punkte hat – immer $(\beta_3+\delta_3) - (\alpha_3+\gamma_3) = (\beta_3'+\delta_3') - (\alpha_3'+\gamma_3')$. Somit gilt ($r$ bezeichne wieder den Radius des Kreises):

$$a+c = b+d \iff (a+c)\frac{180°}{\pi r} = (b+d)\frac{180°}{\pi r} \iff (\beta_3+\delta_3) = (\alpha_3+\gamma_3) \iff (\beta_3'+\delta_3') = (\alpha_3'+\gamma_3')$$

$$\iff (a'+c')\frac{180°}{\pi r'} = (b'+d')\frac{180°}{\pi r'} \iff a'+c' = b'+d' \quad (**)$$

Nun vergrößern und verschieben wir den vorgegebenen Kreis soweit, bis drei Ecken des Vierecks auf, und die vierte Ecke nicht innerhalb dieses Kreises liegt, o.B.d.A. ist der Kreis dann Umkreis von Dreieck ABC. In dieser Lage ist $\alpha_3' = \beta_3' = \gamma_3' = 0$ und damit auch $a' = b' = c' = 0$. Zusammen mit (**) folgt dann aber $d' = 0$, hieraus wieder $\delta_3' = 0°$ und zuletzt, dass der Umkreis des Dreiecks ABC auch den Punkt D enthält. ABCD ist also ein Sehnenviereck.



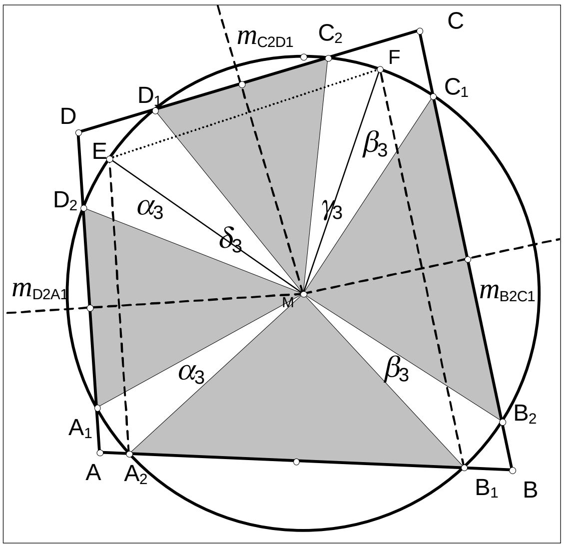
3. Beweis (nach Thomas Jäger und Kathrin Vorwerk): O.B.d.A. habe der Radius des Kreises die Länge 1; damit ist die Längenmaßzahl jedes in der Aufgabe gegebenen Bogens identisch mit dem Bogenmaß des zugehörigen Mittelpunktswinkels. Nach Umfangswinkelsatz ist dann $\angle AD_2A_2 = \frac{1}{2}a$, $\angle BA_2B_2 = \frac{1}{2}b$, $\angle CB_2C_2 = \frac{1}{2}c$ und $\angle DC_2D_2 = \frac{1}{2}d$. Im Viereck $A_2B_2C_2D_2$ sei der Innenwinkel bei A_2 mit α_5, bei C_2 mit γ_5 bezeichnet; da $A_2B_2C_2D_2$ ein Sehnenviereck ist, ist $\alpha_5 + \gamma_5 = \pi$.
Nach Außenwinkelsatz im Dreieck ist $\frac{1}{2}a + \alpha_1 = \alpha_5 + \frac{1}{2}b$, sowie $\frac{1}{2}c + \gamma_1 = \gamma_5 + \frac{1}{2}d$. Durch Addition der Gleichungen und Umstellen folgt $\frac{1}{2}(a+c-b-d) = (\alpha_5+\gamma_5) - (\alpha_1+\gamma_1) = \pi - (\alpha_1+\gamma_1)$, hieraus folgt sofort $a+c = b+d \iff (\alpha_1+\gamma_1) = \pi$; letzteres ist eine charakterisierende Eigenschaft jeden Sehnenvierecks.

4. Beweis: Bekanntlich ist ein Viereck genau dann ein Sehnenviereck, wenn sich gegenüberliegende Winkel zu 180° ergänzen. Es genügt also zu zeigen, dass es ein Viereck gibt, das Sehnenviereck ist und gleichzeitig mit dem gegebenen Viereck in entsprechenden Winkeln übereinstimmt.

Das Bild von A_2 bei einer Spiegelung an der Mittelsenkrechten auf A_1D_2 sei mit E bezeichnet, das Bild von B_1 bei einer Spiegelung an der Mittelsenkrechten auf B_2C_1 mit F. Wir zeigen im Folgenden, dass das Viereck A_2B_1FE die oben geforderten Eigenschaften hat.

Um Sonderfälle zu vermeiden, sei o.B.d.A. $a \le d$. Dann ist wegen $a+c = b+d \Leftrightarrow c-b = d-a$ auch $b \le c$.

Das Viereck A_2B_1FE ist Sehnenviereck: Mit A_2 und B_1 liegen auch E und F auf dem gegebenen Kreis, da die Spiegelachsen beide durch M gehen. Es gilt sogar schärfer. Wegen $a \le d$ liegt E auf dem Bogen der Länge d, wegen $b \le c$ liegt F auf dem Bogen der Länge c. Das Viereck A_2B_1FE ist also nicht entartet.



Die Seiten des Vierecks A_2B_1FE sind parallel zu den Seiten des Vierecks ABCD: Die Mittelsenkrechte auf D_2A_1 ist gemeinsames Lot für AD und A_2E, es ist also AD || A_2E. Genau so ist die Mittelsenkrechte auf B_2C_1 gemeinsames Lot für BC und B_1F; damit ist BC || B_1F.

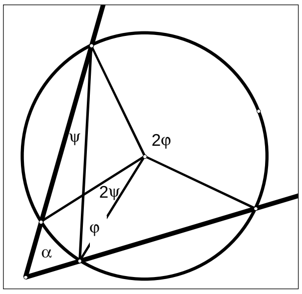
Aus Symmetriegründen ist $\angle EMD_2 = \angle A_1MA_2 = \alpha_3$ und wegen $a \le d$ gilt $\angle D_1ME = \angle D_1MD_2 - \angle EMD_2 = \delta_3 - \alpha_3$.

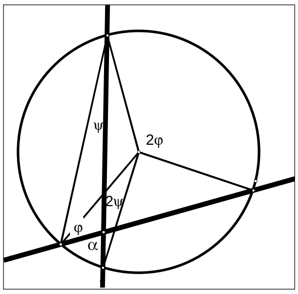
Analog (es ist ja auch $b \le c$) gilt $\angle FMC_2 = \gamma_3 - \beta_3$.

Ferner ist in einem Kreis die Weite von Mittelpunktswinkeln proportional zur Länge der zugehörigen Bögen. Damit ist die Voraussetzung $a+c=b+d$ äquivalent zu $\alpha_3+\gamma_3 = \beta_3+\delta_3$. Hieraus folgt sofort $\delta_3-\alpha_3 = \gamma_3-\beta_3$ oder $\angle D_1ME = \angle FMC_2$. Damit liegen aber nicht nur D_1 und C_2 achsensymmetrisch bezüglich der Mittelsenkrechten auf C_2D_1, sondern auch E und F; diese Mittelsenkrechte ist damit gemeinsames Lot auf C_2D_1 und EF und es ist somit C_2D_1 || EF.

Schließlich ist auch (AB) || A_2B_1, da die beiden Geraden identisch sind. Da die Seiten der betrachteten Vierecke parallel sind, sind auch die entsprechenden Innenwinkel gleich.

5. Beweis: Wir leiten zuerst eine **Verallgemeinerung des Umfangswinkelsatzes** her[1]:





Eine Gerade schneide einen Kreis. Nun wird sie um einen Punkt außerhalb bzw. innerhalb der Kreisfläche gedreht und überstreiche dabei auf der Kreislinie zwei disjunkte Kreisbögen. Dann ist der Drehwinkel halb so groß wie die Differenz bzw. die Summe der zugehörigen Mittelpunktswinkel.

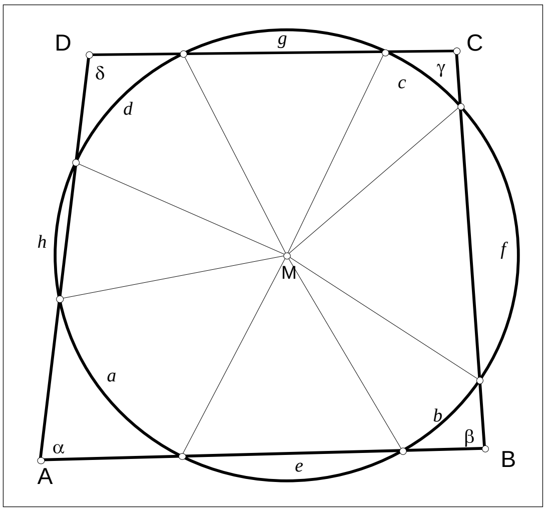
(Im Grenzfall, d.h. wenn der Drehpunkt auf der Kreislinie liegt, hat der eine Mittelpunktswinkel die Weite 0°; die Aussage ist dann identisch mit dem Umfangswinkelsatz.)

Beweis der Verallgemeinerung (vgl. Figur): Die zu den überstrichenen Bögen gehörenden Mittelpunktswinkel seien mit 2φ und 2ψ bezeichnet, nach Umfangswinkelsatz sind sie doppelt so groß wie der mit φ bzw. der mit ψ bezeichnete Winkel.

Der Außenwinkel eines Dreiecks ist so groß wie die Summe der nicht anliegenden Innenwinkel bzw. ein Innenwinkel so groß wie die Differenz aus dem nicht anliegenden Außenwinkel und dem dritten Innenwinkel. Mit den Bezeichnungen der Figur ist dann $\alpha = \varphi \pm \psi$ ("+" bzw. "–", falls der Drehpunkt innerhalb bzw. außerhalb des Kreises liegt) und damit $\alpha = \frac{1}{2}(2\varphi \pm 2\psi)$.

Diesen Satz wenden wir nun auf die vorgegebene Figur an:

[1] Diese Verallgemeinerung findet sich auch in einigen Formelsammlungen unter den Stichworten "Sekantenwinkel" und "Sehnenwinkel", z.B. Bronstein/Semendjajew: Taschenbuch der Mathematik; 23. Auflage, Harri Deutsch Verlag, Thun 1987, ISBN 3 87144 492 8, S. 193 - 194.



O.B.d.A. habe der Radius des Kreises die Länge 1; damit ist die Längenmaßzahl jedes in der Aufgabe gegebenen Bogens identisch mit dem Bogenmaß des zugehörigen Mittelpunktswinkels.

Die Gerade (AB) wird um A gedreht, bis sie die Lage von (AD) erreicht; dabei überstreicht sie die Kreisbögen mit der Länge ($b+f+c+g+d$) und a; (CB) wird um C gedreht, bis sie die Lage von (CD) erreicht; dabei überstreicht sie die Kreisbögen mit der Länge ($d+h+a+e+b$) und c. Zusätzlich verwenden wir die Bedingung $a+c=b+d$ und erhalten so:

$$\alpha+\gamma = [\tfrac{1}{2}(b+f+c+g+d-a)] + [\tfrac{1}{2}(d+h+a+e+b-c)]$$

$$= \tfrac{1}{2}[(b+d)+(b+d)+e+f+g+h]$$

$$= \tfrac{1}{2}[(a+c)+(b+d)+e+f+g+h] = \tfrac{1}{2}\cdot 2\pi = \pi.$$

Aufgabe 4: Aus zwölf Strecken der Längen 1, 2, 3, 4, ... , 12 wird irgendwie ein Zwölfeck zusammengesetzt.

Man beweise, dass es dann stets in diesem Zwölfeck drei aufeinander folgende Seiten gibt, deren Gesamtlänge größer als 20 ist.

Gemeinsame Bezeichnungsweisen: Die Seitenlängen des zusammengesetzten Zwölfeckes werden beginnend bei einer beliebigen Seite fortlaufend gegen den Uhrzeigersinn (oder auch im Uhrzeigersinn) der Reihe nach mit s_i (i = 1, 2, ..., 11, 12) bezeichnet. Die Gesamtlänge von drei aufeinander folgenden Seiten bezeichnen wir mit $L_i := s_i + s_{i+1} + s_{i+2}$ (dabei sei $s_{i+12} := s_i$ und $L_{i+12} := L_i$); wir nennen s_i und s_j bzw. L_i und L_j benachbart, wenn $|i-j| = 1$ oder $|i-j| = 11$.

1. Beweis (durch Widerspruch): Wir nehmen an, es gebe eine Zusammensetzung der Strecken so, dass im entstehenden Zwölfeck jede Gesamtlänge von drei aufeinander folgenden Seiten höchstens 20 beträgt.

Wir betrachten alle 12 möglichen solche Gesamtlängen $L_i := \sum_{j=i}^{i+2} s_j$ ($i\in\{1, 2, ..., 12\}$). Jede Seitenlänge, also jede ganze Zahl aus {1, 2, ... ,12} kommt unter den Summanden dieser 12 Summen genau dreimal vor, ein Aufaddieren dieser Summen ergibt also nach bekannter Formel

$$\sum_{i=1}^{12} L_i = \sum_{i=1}^{12}\left(\sum_{j=i}^{i+2} s_j\right) = 3\cdot\sum_{j=1}^{12} s_j = 3\cdot\sum_{j=1}^{12} j = 3\cdot\frac{12\cdot 13}{2} = 234.$$

Da die s_i alle verschieden sind (und auch $i+3 \not\equiv i \bmod (12)$), ist $0 \neq s_{i+3} - s_i = L_{i+1} - L_i$; also sind auch die benachbarten L_i und L_{i+1} verschieden für alle i = 1, 2, ..., 11, 12.

Da es 12 Gesamtlängen L_i gibt, keine benachbarten L_i den gleichen Wert haben und gleichzeitig nach Annahme kein $L_i > 20$ ist, gibt es höchstens $\frac{12}{2}$ = 6 Gesamtlängen L_i mit dem Wert 20. Dann kann man abschätzen (dabei sei z die Anzahl der Gesamtlängen L_i, die den Wert 20 haben):

$$234 = \sum_{i=1}^{12} L_i \leq z\cdot 20 + (12-z)\cdot 19 = z + 12\cdot 19 = z + 228 \Leftrightarrow z \geq 6.$$

Es gibt also genau 6 Gesamtlängen L_i mit Wert 20; die restlichen 6 Gesamtlängen L_i haben durchschnittlich den Wert (234 – 6·20):6 = 19. Da von diesen kein L_i einen Wert größer als 19 haben kann, kann auch keines einen Wert kleiner als 19 haben. Damit haben genau 6 Gesamtlängen L_i den Wert 20 und genau 6 L_i den Wert 19, zudem wechseln sich diese ab, d.h. o.B.d.A ist $L_i = 20$ für gerade i und L_i =19 für ungerade i.

Schließlich ergibt die Gleichung $0 = (19+20) - (19+20) = (L_1 + L_4) - (L_2 + L_5) = s_1 - s_7$ den gewünschten Widerspruch, da die s_i alle verschieden sind.

2. Beweis (Abschätzung): Es sei $L_{max} := \max_{1\le i\le 12} (L_i)$. Da die s_i alle verschieden sind (und auch $i+3 \not\equiv i \bmod (12)$), ist $0 \ne s_{i+3} - s_i = L_{i+1} - L_i$; also sind auch die benachbarten L_i und L_{i+1} verschieden und es folgt $L_i + L_{i+1} \le 2L_{max} - 1$ für alle $i = 1, 2, ..., 11, 12$.

Die Annahme, dass $L_i + L_{i+1} = 2L_{max} - 1$ für alle $i = 1, 2, ..., 11, 12$, führt zum Widerspruch: Es folgt nämlich, dass zu gegebenen L_i und L_{i+1} eine Summe den Wert L_{max}, die andere den Wert $L_{max} - 1$ annimmt, es ist dann $|s_{i+3} - s_i| = |L_{i+1} - L_{i+1}| = 1$, also $s_{i+3} = s_i \pm 1$, analog $s_{i+6} = s_{i+3} \pm 1$. Falls in diesen beiden Gleichungen verschiedene Rechenzeichen gelten, ergibt sich mit $s_{i+6} = s_{i+3} \pm 1 = s_i \mp 1 \pm 1 = s_i$ der Widerspruch; wenn verschiedene Rechenzeichen gelten, erhalten wir nach zweimaligem Anwenden dieses Schlusses mit $s_{i+12} = s_i \pm 4 \ne s_i$ einen Widerspruch.

Wir können also ein i wählen mit $L_i + L_{i+1} < 2L_{max} - 1$ und dann abschätzen:

$$156 = 2\cdot 78 = 2\cdot\frac{12\cdot 13}{2} = 2\cdot\sum_{j=1}^{12} s_j = (L_i + L_{i+3} + L_{i+6} + L_{i+9}) + (L_{i+1} + L_{i+4} + L_{i+7} + L_{i+10}) =$$

$$= (L_i + L_{i+1}) + (L_{i+3} + L_{i+4}) + (L_{i+6} + L_{i+7}) + (L_{i+9} + L_{i+10}) < 4\cdot(2L_{max} - 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 39 < 2L_{max} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 20 < L_{max} .$$

3. Beweis (durch Widerspruch): Wir nehmen an, es gebe eine Zusammensetzung der Strecken so, dass im entstehenden Zwölfeck jede Gesamtlänge von drei aufeinander folgenden Seiten höchstens 20 beträgt.

Wir bezeichnen die Länge der längste Seite mit s_1 (d.h. es ist $s_1 = 12$) und fortlaufend der Reihe nach die Längen der folgenden Seiten mit $s_2, s_3, ..., s_{12}$. Mit e bezeichnen wir den Index mit $s_e = 11$ und mit z den Index mit $s_z = 10$; o.B.d.A ist $e < z$ (andernfalls wählen wir bei der Bezeichnung den anderen Umlaufsinn).

Nach Annahme ist $L_{11} = s_{11} + s_{12} + 12 \le 20$ und auch $L_1 = 12 + s_2 + s_3 \le 20$; hieraus folgt sofort wegen der Ganzzahligkeit der Summanden $s_{11} + s_{12} \le 20 - 12 = 8$ und analog $s_2 + s_3 \le 8$.

Da zusätzlich die s_i positiv sind für alle $i\in\{1,2, ... ,12\}$, ist insbesondere für $i\in\{1,2,3,11,12\}$ stets $s_i \ne 11$ und $s_i \ne 10$; also $4 \le e < z \le 10$. Zusätzlich gilt $e < z-2$, weil andernfalls die Summe L_e sowohl s_e als auch s_z als Summanden enthielte; damit wäre – wieder weil alle s_i positiv – sicher $L_e > s_e + s_z = 11+10 = 21$ im Widerspruch zur Annahme. Insbesondere ist $4 \le e \le 7$ und $7 \le z \le 10$.

Aus $4 \le e \le 7$ schließen wir: Der Summand $s_e = 11$ ist in der Summe $L_4 = s_4 + s_5 + s_6$ enthalten oder es ist (nämlich falls $e = 7$) $L_5 = s_5 + s_6 + s_e$. In jedem Fall gibt es zwei Summanden $s_u, s_v \in \{s_4, s_5, s_6\}$, für die nach Annahme $s_e + s_u + s_v \le 20$, also $s_u + s_v \le 20 - 11 = 9$.

Analog folgt aus $7 \le z \le 10$: Der Summand $s_z = 10$ ist in der Summe $L_7 = s_7 + s_8 + s_9$ enthalten oder es ist $L_8 = s_8 + s_9 + s_z$; also gibt es zwei Summanden $s_x, s_y \in \{s_7, s_8, s_9\}$, für die $s_x + s_y \le 20 - 10 = 10$.

Damit ist $s_{11}+s_{12}+s_2+s_3+s_u+s_v+s_x+s_y \le 8+8+9+10 = 35$, wobei die acht Summanden sicher paarweise verschieden sind. Im Widerspruch hierzu beträgt aber die Gesamtlänge von acht beliebig ausgewählten Seiten – die s_i sind ja paarweise verschieden – mindestens 1+2+...+8=36.

Bemerkung 1: Es gibt mindestens ein 12–Eck mit $L_{max} = 21$, wie das Beispiel 12 - 1 - 8 - 11 - 2 - 7 - 10 - 3 - 6 - 9 - 5 - 4 zeigt. Die in der Aufgabe formulierte Aussage kann also nicht verschärft werden.

Bemerkung 2: In der Beweisführung wird das Zwölfeck und die Längen seiner Seiten abstrahiert zu einem Kreis, auf dem 12 Zahlen der Reihe nach angeordnet sind. Es ist zunächst nicht klar, ob das so beschriebene Zwölfeck überhaupt existiert; dies geschieht etwa durch den Nachweis von $12 < \sum_{1\le i\le 11} i$.

Die Aufgabenstellung fordert diesen Nachweis nicht.

Mit völlig analog geführten Beweisen könnte man die Gültigkeit der folgende Aussage nachweisen: "Aus 12 Strecken der Länge $2^1, 2^2, \ldots , 2^{12}$ wird irgendwie ein Zwölfeck zusammengesetzt. Es gibt dann stets in diesem Zwölfeck drei aufeinander folgende Seiten, bei denen das Produkt ihrer Längen größer als 2^{20} ist." Allerdings wird hier eine Eigenschaft eines nicht existierenden Objektes nachgewiesen: Da $2^{12} > \sum_{1\le i\le 11} 2^i$, lässt sich aus den gegebenen Seiten kein 12–Eck zusammensetzen.