

## **Bundeswettbewerb Mathematik**

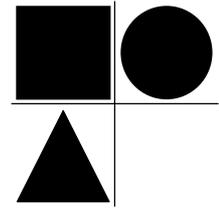
Wissenschaftszentrum, Postfach 20 14 48, 53144 Bonn

Fon: 0228 - 3727 411 • Fax: 0228 - 3727 413

e-mail: [info@bundeswettbewerb-mathematik.de](mailto:info@bundeswettbewerb-mathematik.de)

[www.bundeswettbewerb-mathematik.de](http://www.bundeswettbewerb-mathematik.de)

**Korrekturkommission** • Karl Fegert



# **Aufgaben und Lösungen**

## **2. Runde 2002**



**Aufgabe 1:** Ein Kartenstapel, dessen Karten von 1 bis  $n$  durchnummeriert sind, wird gemischt. Nun wird wiederholt die folgende Operation durchgeführt:

Wenn an der obersten Stelle die Karte mit der Nummer  $k$  liegt, dann wird innerhalb der obersten  $k$  Karten die Reihenfolge umgekehrt.

Man beweise, dass nach endlich vielen solcher Operationen die Karte mit der Nummer 1 oben liegt.

Gemeinsame Bezeichnungen: Mit " $i$ " bezeichnen wir die Karte mit der Nummer  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

**1. Beweis** (durch Widerspruch): Zunächst stellen wir unabhängig von der Behauptung fest: Wenn die Karte " $i$ " oben liegt, werden bei der folgenden Operation nur die  $i$  obersten Karten im Stapel bewegt; alle Karten, die tiefer liegen, bleiben an ihrer Stelle.

Der Kartenstapel hat  $n$  verschiedene Karten, es gibt also während der Durchführung der Operationen maximal  $n!$  verschiedene Anordnungen dieser Karten. Nach Schubfachprinzip kommt spätestens nach  $n!$  Operationen eine bestimmte Anordnung zum zweiten Mal vor. Da die Anordnung der Karten im Kartenstapel nach einer Operation eindeutig durch Anordnung der Karten unmittelbar vor dieser Operation bestimmt ist, ist die durch die Operationen bedingte Abfolge der Anordnungen im Kartenstapel ab dem ersten Vorkommen dieser später wiederholten Anordnung, also spätestens ab der  $n!$ -ten Operation periodisch. (Evtl. bleibt die Anordnung der Karten gleich, d.h. die Periode hat die Länge 1; dies ist genau dann der Fall, wenn die "1" irgendwann oben liegt.)

Die größte Nummer, die während einer Periode nach oben kommt, nennen wir  $Max$ ; diese Zahl ist als Maximum einer endlichen Menge von natürlichen Zahlen wohldefiniert.

Zum eigentlichen Beweis nehmen wir an, dass die "1" nie nach oben kommt, d.h., dass  $Max > 1$  und führen diese Annahme zum Widerspruch:

Wir betrachten die erste innerhalb der Periode vorkommende Anordnung in dem Kartenstapel, bei der " $Max$ " oben liegt. Nach dem Durchführen der nächsten Operation liegt " $Max$ " im Stapel an  $Max$ -ter Stelle von oben. Nach Annahme ist  $2 \leq Max$ , die Karte " $Max$ " bleibt also bei dieser Operation nicht an oberster Stelle.

Da sie spätestens nach einer weiteren Periode wieder nach oben kommt, muss sie irgendwann wieder bewegt werden. Da sie an  $Max$ -ter Stelle liegt, wird sie aber nur bewegt, wenn irgendwann eine Karte " $Moritz$ " mit  $Moritz \geq Max$  oben liegt. Da alle Karten verschieden nummeriert sind und die Karte " $Max$ " nicht oben liegt, ist  $Moritz \neq Max$ , also schärfer  $Moritz > Max$  im Widerspruch zur Definition von  $Max$ .

**Bemerkung:** Damit ist gezeigt, dass spätestens nach  $n! - 1$  Operationen die "1" oben liegt.

**2. Beweis** (mit Hilfe einer Bewertungsfunktion): Die Lage der Karte " $i$ " vor der  $m$ -ten Operation ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ) im Kartenstapel beschreiben wir durch die Charakteristik

$$c(m, i) := \begin{cases} 1 & \text{falls vor dem } m\text{-ten Zug die Karte } "i" \text{ an } i\text{-ter Position von oben liegt,} \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases}$$

Mit Hilfe dieser Charakteristik definieren wir eine Bewertung der Anordnung der Karten im Kartenstapel vor der  $m$ -ten Operation:

$$B(m) := \sum_{i=1}^n c(m, i) \cdot 2^{i-1} \quad (m = 1, 2, 3, \dots).$$

$B(m)$  hat offensichtlich folgende Eigenschaften:

(A)  $B(m)$  ist als Summe nicht negativer ganzer Zahlen wieder eine nicht negative ganze Zahl.

(B) Die Folge der  $B(m)$  ist nach oben beschränkt durch  $B(m) \leq \sum_{i=1}^n 1 \cdot 2^{i-1} = 2^n - 1$ .

Zudem ist leicht zu beweisen:

(C) Liegt vor dem  $m$ -ten Zug die Karte "1" nicht oben, so ist  $B(m) < B(m+1)$ .



Beweis: Liegt vor der  $m$ -ten Operation die Karte " $k$ " ( $2 \leq k \leq n$ ) oben, also an 1. Position von oben, dann ist  $c(m,k) = 0$  und es werden in der  $m$ -ten Operation im Kartenstapel nur die Karten auf den Positionen  $1, 2, \dots, k$  bewegt; für alle  $i > k$  ist damit zusätzlich  $c(m,i) = c(m+1,i)$ . Da nach der  $m$ -ten Operation die Karte " $k$ " auf der  $k$ -ten Position von oben liegt, ist  $c(m+1,k) = 1$ . Da stets  $c(m+1,i) \leq 1$ , ist auch  $\sum_{i=1}^{k-1} c(m,i) \cdot 2^{i-1} \leq \sum_{i=1}^{k-1} 1 \cdot 2^{i-1} = 2^{k-1} - 1 < 2^{k-1}$  (die hier vorkommenden Summen sind wegen  $2 \leq k < n$  wohldefiniert) und wir können damit abschätzen (im Fall  $k = n$  lässt man die leere Summe  $\sum_{i=k+1}^n c(m,i) \cdot 2^{i-1}$  weg):

$$\begin{aligned} B(m) &= \sum_{i=1}^n c(m,i) \cdot 2^{i-1} = \sum_{i=1}^{k-1} c(m,i) \cdot 2^{i-1} + 0 \cdot 2^{k-1} + \sum_{i=k+1}^n c(m,i) \cdot 2^{i-1} \\ &< 1 \cdot 2^{k-1} + \sum_{i=k+1}^n c(m,i) \cdot 2^{i-1} \leq \sum_{i=1}^{k-1} c(m+1,i) \cdot 2^{i-1} + 1 \cdot 2^{k-1} + \sum_{i=k+1}^n c(m+1,i) \cdot 2^{i-1} \\ &= \sum_{i=1}^n c(m+1,i) \cdot 2^{i-1} = B(m+1) \end{aligned}$$

Käme nun die "1" nie nach oben, wäre die Folge  $(B(m))$  nach (A), und (C) eine Folge streng monoton wachsender ganzer Zahlen, die damit im Widerspruch zu (B) unbeschränkt wäre.

**Bemerkung:**  $B(m)$  kann nur ganzzahlige Werte aus  $[0; 2^n - 1]$  annehmen und – solange die "1" nicht oben liegt – sogar nur gerade Werte. Auch ist stets  $B(m) \neq 2^n - 2$ , da dies einer Anordnung im Kartenstapel entspricht, bei der sich die "1" als einzige Karte nicht an dem ihrer Nummer entsprechenden Platz befindet. Damit ist sogar  $2^{n-1} - 1$  eine obere Schranke. Eine einfache Formel für die Maximalzahl der Operationen bei gegebenem  $n$  ist unbekannt.

### 3. Beweis (vollständige Induktion):

**Induktionsanfang:** Die Behauptung ist offensichtlich erfüllt für einen Kartenstapel mit  $n = 1$  Karten.

**Induktionsannahme:** Für ein bestimmtes  $n$  kommt in einem Kartenstapel mit  $n$  Karten, dessen Karten mit  $1, 2, \dots, n$  durchnummeriert sind, die "1" irgendwann nach oben.

**Induktionsschluss:** Dann kommt auch in einem Kartenstapel mit  $n+1$  Karten, dessen Karten mit  $1, 2, \dots, n, n+1$  durchnummeriert sind, die "1" irgendwann nach oben:

Beweis: Wir betrachten einen Kartenstapel mit  $n+1$  Karten.

Fall 1: Die Karte " $n+1$ " liegt ganz unten: Dann besteht der Teilstapel der obersten  $n$  Karten aus den Karten mit den Nummern  $1, 2, \dots, n$ . Damit wirken sich alle Operationen nur auf diesen Teilstapel aus; da dieser Teilstapel zusätzlich die Bedingungen der Induktionsannahme erfüllt, kommt die "1" irgendwann nach oben.

Fall 2: Die Karte " $n+1$ " liegt nicht ganz unten:

Fall 2.1: Die mit  $n+1$  nummerierte Karte kommt beim Durchführen der Operationen irgendwann nach oben oder liegt bereits am Anfang oben: Nach der nun folgenden Operation kommt die " $n+1$ " ganz nach unten, wir erhalten so eine Situation wie in Fall 1 und nach Induktionsannahme kommt die "1" irgendwann nach oben.

Fall 2.2: Die mit  $n+1$  nummerierte Karte kommt beim Durchführen der Operationen nie nach oben: Die Beschriftung einer Karte hat erst dann einen Einfluss auf die Reihenfolge der Karten im Stapel, wenn sie nach oben kommt. Da die Karte " $n+1$ " nie nach oben kommt, kann sie mit einer beliebigen Nummer versehen werden, ohne dass im Zuge der Operationen jemals eine andere Reihenfolge der Karten vorkommt. Wir versehen die Karte " $n+1$ " deswegen mit der Nummer der zuunterst liegenden Karte, damit besteht der Teilstapel der obersten  $n$  Karten aus den Karten mit den Nummern  $1, 2, \dots, n$ . Wie in Fall 1 können wir dann schließen, dass die "1" irgendwann nach oben kommt.

**Bemerkung:** Falls zu Beginn die Karte "1" ganz unten liegt, muss der Fall 2.1 eintreten: Andernfalls würde die " $n+1$ " mit der Nummer 1 überschrieben und käme so nach Induktionsannahme irgendwann nach oben!



**Aufgabe 2:** Gesucht werden streng monoton wachsende Folgen  $(a_0, a_1, a_2, \dots)$  nicht-negativer ganzer Zahlen mit der Eigenschaft, dass jede nicht-negative ganze Zahl eindeutig in der Form  $a_i + 2a_j + 4a_k$  geschrieben werden kann; dabei sind  $i, j$  und  $k$  nicht notwendigerweise verschieden.

Man beweise, dass es genau eine solche Folge gibt und bestimme  $a_{2002}$ .

Die Aufgabe wird in folgenden Teilschritten bearbeitet:

1. Nachweis der Eindeutigkeit einer solchen Folge.
2. Nachweis der Existenz der Folge durch Konstruktion mit Nachweis der Eigenschaften.
3. Berechnung von  $a_{2002}$ .

**zu 1.:** Es gibt höchstens eine solche Folge:

Wir nehmen an, es gebe zwei verschiedene Folgen  $(a_n)$  und  $(b_n)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) mit der verlangten Eigenschaft. Dann betrachten wir den kleinsten Index  $r$  mit  $a_r \neq b_r$ , o.B.d.A. sei  $a_r < b_r$  (andernfalls vertauschen wir die Bezeichnungen  $a$  und  $b$ ). Da sich die nicht-negative ganze Zahl 0 als Summe von nicht-negativen Gliedern der streng monotonen Folgen darstellen lässt, ist  $a_0 = b_0 = 0$ , also  $r \geq 1$ .

$a_r = a_r + 2a_0 + 4a_0$  ist also eine Darstellung der nicht-negativen ganzen Zahl  $a_r$  durch die Glieder von  $(a_n)$ ; daneben existiert eine Darstellung  $a_r = b_i + 2b_j + 4b_k$  durch Glieder von  $(b_n)$ , wobei wegen  $a_r < b_r$  und der strengen Monotonie der Folge die Indices  $i, j$  und  $k$  alle kleiner als  $r$  sind. Nach Definition von  $r$  ist dann  $b_i = a_i$ ,  $b_j = a_j$ ,  $b_k = a_k$ , wir haben also mit  $a_r = a_i + 2a_j + 4a_k$  eine weitere Darstellung von  $a_r$  durch die Glieder von  $(a_n)$  gefunden; diese ist wegen  $i, j, k < r$  sicher verschieden von der ersten im Widerspruch zur vorausgesetzten Eindeutigkeit der Darstellung.

**zu 2.** Beschreibung der Folge:

**1. Variante:** Die Glieder der Folge  $(a_n)$  können wie folgt definiert werden:

Es ist  $a_n := \sum_{i=0}^{\infty} z_i 8^i$ , wobei die  $z_i$  definiert sind durch die – bekanntlich existierende und

eindeutige – Darstellung von  $n$  im Zweiersystem  $n = \sum_{i=0}^{\infty} z_i 2^i$  ( $z_i \in \{0, 1\}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

Damit ist die Menge der Glieder der Folge  $(a_n)$  identisch mit der Menge aller nicht-negativen ganzen Zahlen, deren Darstellung im Achtersystem nur die Ziffern 0 oder 1 verwendet.

Zum Beweis genügt es zu zeigen: (A): Die Folge  $(a_n)$  ist wohldefiniert, (B): Die Folge  $(a_n)$  ist streng monoton wachsend, (C): Jede nicht-negative ganze Zahl  $z$  besitzt eine Darstellung der geforderten Art, (D): Es gibt nur eine solche Darstellung.

Teilbeweis (A): Die Folge  $(a_n)$  ist wohldefiniert. Mit  $[z_i(n)]$  bezeichnen wir die Ziffernfolge der Darstellung von  $n$  im Zweiersystem. Durchläuft  $n$  die Menge aller nicht-negativen ganzen Zahlen, so durchlaufen die  $[z_i(n)]$  die Menge aller Ziffernfolgen aus  $\{0, 1\}$ , die ihrerseits im Achtersystem alle nicht-negativen ganzen Zahlen erzeugen, deren Darstellung nur die Ziffern 0 oder 1 verwendet.

Teilbeweis (B): Die Folge  $(a_n)$  ist streng monoton wachsend. Sowohl im Zweier- wie im Achtersystem gilt, dass von zwei Zahlen diejenige die größere ist, welche in ihrer Ziffernfolge von links her als erste eine größere Ziffer wie die andere hat. Da  $n$  im Zweiersystem die gleiche Ziffernfolge wie  $a_n$  im Achtersystem hat, überträgt sich die Ordnung von den  $n$  auf die  $a_n$ .

Teilbeweis (C): Jede nicht-negative ganze Zahl  $z$  besitzt eine Darstellung der geforderten Art.

Wir formen die – bekanntlich existierende und eindeutige – Darstellung von  $z$  im Dualsystem um ( $z_i \in \{0, 1\}$  für alle  $i=0, 1, 2, \dots$ ):



$$z = \sum_{i=0}^{\infty} z_i 2^i = \sum_{i=0 \bmod 3} z_i 2^i + \sum_{i=1 \bmod 3} z_i 2^i + \sum_{i=2 \bmod 3} z_i 2^i$$

$$= \sum_{i=0 \bmod 3} z_i 2^i + 2 \cdot \sum_{i=1 \bmod 3} z_i 2^{i-1} + 4 \cdot \sum_{i=2 \bmod 3} z_i 2^{i-2} \text{ bzw. nach geeigneter Indexverschiebung}$$

$$z = \sum_{i=0 \bmod 3} z_i 2^i + 2 \cdot \sum_{i=0 \bmod 3} z_{i+1} 2^i + 4 \cdot \sum_{i=0 \bmod 3} z_{i+2} 2^i.$$

Schließlich verwenden wir  $2^3 = 8$  und setzen  $r_i := z_{3i}$ ,  $s_i := z_{3i+1}$ ,  $t_i := z_{3i+2}$  und erhalten so

$$z = \sum_{i=0}^{\infty} r_i 8^i + 2 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} s_i 8^i + 4 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} t_i 8^i \quad (*).$$

Mit allen  $z_i$  sind auch alle  $r_i$ ,  $s_i$  und  $t_i$  aus  $\{0,1\}$ ; damit beschreibt wie verlangt jede der drei Summen eine Zahl aus der Folge  $(a_n)$ .

Teilbeweis (D): *Es gibt nur eine solche Darstellung:* Die Zuordnung der  $z_j$  zu den  $(r_i, s_i, t_i)$  ist offensichtlich umkehrbar eindeutig, d.h. zu verschiedenen Darstellungen nach (\*), also zu verschiedenen Tripeln von Ziffernfolgen  $([r_i], [s_i], [t_i])$  gehören auch verschiedene Ziffernfolgen  $[z_j]$  und damit wegen der Eindeutigkeit der Binärdarstellung einer Zahl auch verschiedene Zahlen  $z$ .

**2. Variante:** Die Folge  $(a_n)$  wird rekursiv definiert durch:

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0 \\ 8^m + a_k & \text{falls } n = 2^m + k \quad (m \geq 0, 0 \leq k \leq 2^m - 1) \end{cases}.$$

Zum Beweis genügt es zu zeigen: (A): Die Folge  $(a_n)$  ist wohldefiniert, (B): Die Folge  $(a_n)$  ist streng monoton wachsend, (C): Jede Darstellung einer nicht-negativen ganzen Zahl in der geforderten Art ist eindeutig, (D): Jede nicht-negative ganze Zahl besitzt eine solche Darstellung.

Teilbeweis (A): *Die Folge  $(a_n)$  ist wohldefiniert:* In der Gleichung  $n = 2^m + k$  mit  $m \geq 0$ ,  $0 \leq k \leq 2^m - 1$  sind nach Vorgabe von  $n$  die Werte  $m$  und  $k$  eindeutig festgelegt ( $m := \lfloor \log_2(n) \rfloor$ ;  $k := n - 2^m$ .) Durch rekursive Anwendung dieser Definition berechnet sich jedes  $a_n$  damit als Summe von Potenzen von 8 und dem Wert 0 und damit als nicht-negative ganze Zahl.

Um die verlangten Eigenschaften der so definierten Folge nachzuweisen, benötigen wir zwei Hilfssätze:

**HS(1):** Es ist  $a_{(2^m-1)} = \frac{1}{7}(8^m-1)$  für alle  $m$ :

**Beweis** (vollst. Induktion): Die Aussage ist wegen  $a_{(2^0-1)} = a_0 = 0 = \frac{1}{7}(8^0-1)$  richtig für  $m = 0$ ; und aus der Richtigkeit für ein bestimmtes  $m$  folgt mit  $a_{(2^{m+1}-1)} = a_{(2^m+2^m-1)} = 8^m + a_{(2^m-1)} = 8^m + \frac{1}{7}(8^m-1) = 8^m(1+\frac{1}{7}) - \frac{1}{7} = \frac{1}{7}(8^{m+1}-1)$  die Richtigkeit für  $m+1$ .

**HS(2):** Es ist  $a_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0 \\ a_{n-1} + 1 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ 8 \cdot a_{\frac{n}{2}} & \text{falls } n > 0 \text{ gerade} \end{cases}.$

Insbesondere ist  $a_n \equiv 1 \pmod{8} \Leftrightarrow n$  ungerade und  $a_n \equiv 0 \pmod{8} \Leftrightarrow n$  gerade, sowie  $a_n - a_m \equiv 0 \pmod{8} \Leftrightarrow n \equiv m \pmod{2}$  und  $a_n - a_m \equiv \pm 1 \pmod{8} \Leftrightarrow n \not\equiv m \pmod{2}$ .

**Bemerkung:** Diese Formel kann ebenso als Definition der Folge  $(a_n)$  verwendet werden.

**Beweis:** Wir beweisen diese Aussage für  $n = 0$  und blockweise für alle  $n \in [2^m, 2^{m+1}]$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) durch vollständige Induktion nach  $m$ : Die Aussage ist offensichtlich richtig für  $n = 0$ ,  $n = 1$  und  $n = 2$  (also den jeweils kleinsten Wert in jeder Zeile der Definition) und somit richtig für alle  $n \in [2^m, 2^{m+1}]$  mit  $m = 0$ . Nun nehmen wir an, dass für alle  $r = 1, 2, \dots, m$  die Aussage für alle  $n \in [2^r, 2^{r+1}]$  richtig ist. Für  $n \in [2^{m+1}, 2^{m+2}]$  gilt dann: Es ist  $n = 2^m + k$



genau dann gerade, wenn  $k$  gerade, also ist

$$\text{falls } k \text{ gerade: } a_n = a_{(2^m)} + a_k = 8 \cdot a_{(2^{m-1})} + 8 \cdot a_{(k/2)} = 8 \cdot a_{(2^{m-1+k/2})} = 8 \cdot a_{((2^m+k)/2)} = 8 a_{(n/2)};$$

$$\text{falls } k \text{ ungerade: } a_n = a_{(2^m)} + a_k = 8 \cdot a_{(2^{m-1})} + a_{(k-1)} + 1 = 8 \cdot a_{(2^{m-1})} + 8 \cdot a_{(k-1)/2} + 1$$

$$= 8 \cdot (a_{(2^{m-1})} + a_{(k-1)/2}) + 1 = 8 \cdot a_{(2^{m-1+(k-1)/2})} + 1 = a_{(2^m+(k-1))} + 1 = a_n + 1.$$

**Teilbeweis (B):** Die Folge ist streng monoton wachsend: Zunächst ist  $a_0 = 0 < 1 = 8^0 + 0 = a_1$ ; mit vollständiger Induktion zeigen wir blockweise, dass

$$a_{(2^m)} < a_{(2^{m+1})} < \dots < a_{(2^{m+2^m-1})} < 8^{m+1} = a_{(2^{m+1})} \text{ für alle } m:$$

Wegen  $a_1 = 1 < 8^1 + 0 = a_2$  ist die Aussage richtig für  $m = 0$ , und wenn sie für  $0, 1, 2, \dots, m$  richtig ist, also wenn  $a_0 < a_1 < \dots < a_{(2^{m+1}-1)} < 8^{m+1} < a_{(2^{m+1})}$ , folgt mit  $a_{(2^{m+1})} + a_0 < a_{(2^{m+1})} + a_1 < \dots < a_{(2^{m+1})} + a_{(2^{m+1}-1)} < a_{(2^{m+1})} + 8^{m+1} < 2 \cdot 8^{m+1} < 8^{m+2} = a_{(2^{m+2})}$  die Richtigkeit für  $m+1$ .

**Bemerkung:**  $a_{(2^{m-1})} < a_{(2^m)}$  folgt auch aus Hilfssatz (1).

**Teilbeweis (C):** Wenn eine nicht-negative ganze Zahl  $z$  eine Darstellung der Form  $z = a_i + 2a_j + 4a_k$  besitzt, dann ist diese eindeutig (Widerspruchsbeweis mit endlichem Abstieg):

Wäre das nicht so, dann gäbe es eine kleinste nicht-negative ganze Zahl  $z$ , die zwei verschiedene Darstellungen  $z = a_i + 2a_j + 4a_k = a_r + 2a_s + 4a_t$  besitzt. Dabei ist  $z > 0$ , da  $0 = a_0 + 2a_0 + 4a_0$  offensichtlich die einzige Darstellung der geforderten Art der Zahl 0 ist.

Es folgt  $(a_i - a_r) + 2(a_j - a_s) + 4(a_k - a_t) = 0$ . Die rechte Seite dieser Gleichung ist gerade, also muss – da links der zweite und dritte Summand sicher gerade ist – auch  $(a_i - a_r)$  gerade sein, nach Hilfssatz (2) also  $i \equiv r \pmod{2}$ . Dann ist aber – ebenso nach Hilfssatz (2) – sogar  $(a_i - a_r) \equiv 0 \pmod{8}$ . Analog können wir nun  $j \equiv s \pmod{2}$  schließen: Mit  $(a_j - a_s) \equiv \pm 1 \pmod{8}$  ließe die linke Seite bei Division durch 4 den Rest 2, die rechte Seite aber 0. Schließlich folgt hieraus  $k \equiv t \pmod{2}$ : Mit  $(a_k - a_t) \equiv \pm 1 \pmod{8}$  ließe die linke Seite bei Division durch 8 den Rest 4, die rechte aber 0.

(Variante: Jede der Differenzen auf der linken Seite lässt bei Division durch 8 einen der Reste 1, 0, oder  $-1$ . Durch einfaches Nachrechnen (im Kopf ohne Hilfsmittel möglich) erkennt man, dass die Gleichung  $A+2B+4C \equiv 0 \pmod{8}$  mit  $A, B, C \in \{-1, 0, 1\}$  nur die Lösung  $(A, B, C) = (0, 0, 0)$  hat.)

Falls in allen Paaren  $(i, r)$ ,  $(j, s)$ ,  $(k, t)$  beide Zahlen gerade sind, führt Hilfssatz (2) zu

$$\frac{z}{8} = \frac{a_i}{8} + 2 \frac{a_j}{8} + 4 \frac{a_k}{8} = \frac{a_i}{2} + 2 \frac{a_j}{2} + 4 \frac{a_k}{2} \quad \text{und} \quad \frac{z}{8} = \frac{a_r}{8} + 2 \frac{a_s}{8} + 4 \frac{a_t}{8} = \frac{a_r}{2} + 2 \frac{a_s}{2} + 4 \frac{a_t}{2}$$

(da  $i, j, s, k, t$  alle gerade sind, nehmen alle Indices zulässige Werte an!) und damit zu der nicht-negativen ganzen Zahl  $\frac{z}{8}$ , die wegen  $z > 0$  echt kleiner als  $z$  ist und die zwei offensichtlich verschieden

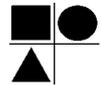
Darstellungen besitzt; dies steht im Widerspruch zur Minimalität von  $z$ .

Falls in wenigstens einem Paar  $(i, r)$ ,  $(j, s)$ ,  $(k, t)$  beide Zahlen ungerade sind, so erhalten wir einen ähnlichen Widerspruch: Z.B. seien  $j$  und  $s$  beide ungerade, so führt Hilfssatz (2) mit

$$z-2 = (a_i + 2a_j + 4a_k) - 2 = (a_i + 2(a_{j-1}+1) + 4a_k) - 2 = a_i + 2a_{j-1} + 4a_k \quad \text{und} \quad z-2 = a_r + 2a_{s-1} + 4a_t$$

wieder zu einer Zahl, die kleiner als  $z$  ist, aber im Widerspruch hierzu zwei offensichtlich verschiedene Darstellungen besitzt. Analoge Überlegungen führen, falls  $i$  und  $r$  gleiche Parität besitzen, über die Zahl  $z-1 < z$  zum Ziel, falls  $k$  und  $t$  gleiche Parität besitzen, über die Zahl  $z-4 < z$ .

**Teilbeweis (D):** Jede nicht negative ganze Zahl  $z$  besitzt eine Darstellung der Form  $z = a_i + 2a_j + 4a_k$ : Sei  $z$  eine nicht-negative ganze Zahl. Wir wählen irgend ein  $m$  so, dass  $8^m > z$ . Nun betrachten wir alle Zahlen der Form  $z^* = a_i + 2a_j + 4a_k$  mit  $i, j, k < 2^m$ . Da die Folge  $(a_n)$  streng monoton wächst, ist mit Hilfssatz (2)  $0 = a_0 + 2a_0 + 4a_0 \leq z^* \leq a_{(2^m-1)} + 2a_{(2^m-1)} + 4a_{(2^m-1)} = 7a_{m-1} = 7 \cdot \frac{1}{7} (8^m - 1) = 8^m - 1$ . Jedes  $z^*$  nimmt also einen der  $8^m$  Werte aus dem Intervall  $[0; 8^m - 1]$  an; da es  $(2^m)^3 = 8^m$  verschiedene Tripel  $(a_i, a_j, a_k)$  gibt und nach Teilbeweis 3 zu verschiedenen Tripeln verschiedene Zahlen  $z^*$  gehören, nimmt  $z^*$  sogar jeden ganzzahligen Wert aus  $[0; 8^m - 1]$  genau einmal an, also auch  $z$ . Damit haben wir die Existenz einer solchen Darstellung für das gewählte  $z$  gezeigt.



zu 3.: Es ist nach **Variante 1**:

$$2002 = 1 \cdot 1024 + 1 \cdot 512 + 1 \cdot 256 + 1 \cdot 128 + 1 \cdot 64 + 0 \cdot 32 + 1 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1, \text{ damit ist} \\ 2002 = 11111010010|_2 \text{ und}$$

$$a_{2002} = 1 \cdot 8^{10} + 1 \cdot 8^9 + 1 \cdot 8^8 + 1 \cdot 8^7 + 1 \cdot 8^6 + 0 \cdot 8^5 + 1 \cdot 8^4 + 0 \cdot 8^3 + 0 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8^1 + 0 \cdot 8^0 \\ = 1073741824 + 34217728 + 16777216 + 2097152 + 262144 + 4096 + 8 = \underline{1\ 227\ 100\ 168}.$$

nach **Variante 2**:

$$a_{2002} = a_{1024} + a_{978} = a_{1024} + a_{512} + a_{466} = \dots = a_{1024} + a_{512} + a_{256} + a_{128} + a_{64} + a_{16} + a_2 \\ = 8^{10} + 8^9 + 8^8 + 8^7 + 8^6 + 8^4 + 8^1 = \dots = \underline{1\ 227\ 100\ 168}.$$

nach **Hilfssatz (2)**: rekursives Anwenden der Formel ergibt:

$$a_{2002} = 8 \cdot a_{1001} = 8 \cdot (a_{1000} + 1) = \dots = 8 \cdot (8^3 \cdot (a_{125} + 1)) = 8 \cdot (8^3 \cdot (a_{124} + 1) + 1) \\ = 8 \cdot (8^3 \cdot (8^2 \cdot a_{31} + 1) + 1) = \dots = 8 \cdot (8^3 \cdot (8^2 \cdot (8(a_{14} + 1) + 1) + 1) + 1) + 1) \\ = 8 \cdot (8^3 \cdot (8^2 \cdot (8 \cdot (8(a_6 + 1) + 1) + 1) + 1) + 1) + 1) + 1) \\ = 8 \cdot (8^3 \cdot (8^2 \cdot (8 \cdot (8(a_2 + 1) + 1) + 1) + 1) + 1) + 1) + 1) \\ = 8 \cdot (8^3 \cdot (8^2 \cdot (8 \cdot (8(a_0 + 1) + 1) + 1) + 1) + 1) + 1) + 1) + 1).$$

Ausrechnen von Innen ergibt der Reihe nach die Werte

$$0+1=1; \quad 1 \cdot 8+1=9; \quad 9 \cdot 8+1=73; \quad 73 \cdot 8+1=585; \quad 585 \cdot 8+1=4\ 681; \quad 4\ 681 \cdot 8+1=299\ 585; \\ 299\ 585 \cdot 8+1=153\ 387\ 521; \quad 153\ 387\ 521 \cdot 8 = \underline{1\ 227\ 100\ 168} = a_{2002}.$$

**Aufgabe 3:** Gegeben ist ein konvexes Polyeder mit einer geraden Anzahl von Kanten.

Man beweise, dass jede Kante so mit einem Pfeil versehen werden kann, dass für jede Ecke die Anzahl der in ihr mündenden Pfeile gerade ist.

Gemeinsame Bezeichnungen: Ecken, in die eine gerade bzw. ungerade Anzahl von Pfeilen münden, nennen wir gerade bzw. ungerade Ecken

**1. Beweis** (durch Konstruktion einer zulässigen Pfeilbelegung): Wir versehen zunächst die Kanten des Polyeders irgendwie mit Pfeilen und zählen in jeder Ecke die in dieser Ecke mündende Pfeile. Da jede Kante mit genau einem Pfeil versehen wurde, der in genau einer Ecke mündet, ist die Gesamtsumme dieser Eckensummen identisch mit der Gesamtzahl der Kanten, nach Voraussetzung also gerade.

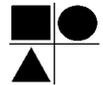
Die Eckensummen in den geraden Ecken sind nach Definition gerade, in den ungeraden Ecken ungerade. Bekanntlich ist die Anzahl der ungeraden Summanden in einer geraden Summe gerade; damit ist die Anzahl der ungeraden Ecken gerade.

Wenn es keine ungeraden Ecken gibt, sind wir fertig. Wenn es noch ungerade Ecken gibt, können wir deren Gesamtzahl durch folgende Operation um zwei reduzieren:

Da die Gesamtzahl der ungeraden Ecke gerade ist, gibt es mindestens zwei davon, wir können also zwei verschiedene davon auswählen. Es gibt sicher einen Weg von Kanten, über den diese Ecken miteinander verbunden sind. Wir schreiten diesen Weg ab und drehen auf jeder Kante, die wir entlang dieses Weges begehen, den Pfeil um. Beim Überschreiten einer Ecke auf diesem Weg wird so die Anzahl der in sie mündenden Pfeile um 2 größer, 2 kleiner oder sie bleibt gleich, damit bleiben gerade Ecken gerade und ungerade Ecken bleiben ungerade. Bei der Startecke und bei der (von ihr verschiedenen!) Endecke verringert oder vergrößert sich die Anzahl der mündenden Pfeile um genau 1, aus diesen ungeraden Ecken werden also gerade Ecken. Insgesamt hat sich die Anzahl der ungeraden Ecken um 2 verringert.

Nach endlich vielen solchen Reduktionen gibt es keine ungeraden Ecken mehr.

**Bemerkung:** Die Argumentation ist auch dann gültig, wenn Ecken und/oder Kanten mehrfach durchlaufen werden.



**2. Beweis** (durch vollständige Induktion nach Anzahl der Ecken): Über die Aufgabenstellung hinaus wird bewiesen: In jedem zusammenhängenden Graph mit einer geraden Anzahl von Kanten können diese so mit Pfeilen versehen werden, dass für jede Ecke die Anzahl der in ihr mündenden Pfeile gerade ist.

Da die Ecken- und Kantenkonfiguration jedes konvexen Polyeders als zusammenhängender Graph interpretiert werden kann (einige weitere notwendige Eigenschaften sind hier unerheblich), ist damit die Aussage bewiesen.

**Induktionsanfang:** Besitzt der Graph genau eine Ecke, so ist jede Kante dieses Graphen eine Schlinge, die in dieser Ecke beginnt und endet. Versieht man sie beliebig mit einem Pfeil, so münden in dieser Ecke ebenso viele Pfeile wie es Kanten gibt; nach Voraussetzung eine gerade Anzahl.

**Induktionsvoraussetzung:** Ein zusammenhängender Graphen  $G$  mit  $e$  Ecken ( $e \geq 1$ ) und einer geraden Anzahl von Kanten erfüllt die Bedingungen der Aufgabe.

**Induktionsschluss:** Dann erfüllt auch ein Graph  $G$  mit  $(e+1)$  Ecken die Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Da  $e+1 \geq 2$  und der Graph zusammenhängend ist, besitzt er mindestens zwei durch mindestens eine Kante verbundene Ecken, diese nennen wir  $E_1$  und  $E_2$ , eine der sie verbindenden Kanten nennen wir  $k$ . Wir vereinen diese beiden Ecken zu einer neuen Ecke  $E$ . Alle Kanten, die  $E_1$  mit  $E_2$  verbinden, werden nun zu Schlingen, die in  $E$  beginnen und enden, alle anderen Kanten, die in/von  $E_1$  oder in  $E_2$  enden/ausgehen, werden zu Kanten, die in/von  $E$  enden/ausgehen.

Der hieraus entstehende Graph  $G'$  hat damit  $e$  Ecken, ist ebenfalls zusammenhängend und erfüllt somit die Induktionsvoraussetzung. Wir können also seine Kanten so mit Pfeilen versehen, dass er nur gerade Ecken hat; insbesondere mündet in  $E$  eine gerade Anzahl von Pfeilen.

Nun ziehen wir die Ecken  $E_1$  und  $E_2$  wieder auseinander und belassen zunächst die Pfeile auf den Kanten. Die Zahl der in  $E$  mündenden Pfeile ist gerade und identisch mit der Summe der Anzahl Pfeile, die in  $E_1$  und  $E_2$  münden. Bekanntlich kann eine gerade Zahl nur in zwei gerade Summanden oder in zwei ungerade Summanden aufgeteilt werden, damit sind entweder beide Ecken  $E_1$  und  $E_2$  gerade (dann sind wir fertig) oder beide ungerade; dann drehen wir den Pfeil auf Kante  $k$  um. Diese verbindet ja die Ecken  $E_1$  und  $E_2$ , durch dieses Umdrehen verringert sich in einer der Ecken  $E_1$  und  $E_2$  die Zahl der mündenden Pfeile um genau 1, in der anderen erhöht sie sich um genau 1, beide Ecken werden also gerade.

**Aufgabe 4:** In einem spitzwinkligen Dreieck  $ABC$  seien  $H_a$  und  $H_b$  die Fußpunkte der von  $A$  bzw.  $B$  ausgehenden Höhen;  $W_a$  und  $W_b$  seien die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden durch  $A$  bzw. durch  $B$  mit den gegenüberliegenden Seiten.

Man beweise: Im Dreieck  $ABC$  liegt der Inkreismittelpunkt  $I$  genau dann auf der Strecke  $H_aH_b$ , wenn der Umkreismittelpunkt  $U$  auf der Strecke  $W_aW_b$  liegt.

**Gemeinsame Bezeichnungen:** Neben den üblichen Bezeichnungen seien die Mittelpunkte der Seiten  $BC$ ,  $CA$  und  $AB$  mit  $M_a$ ,  $M_b$  bzw.  $M_c$  bezeichnet, der Inkreisradius mit  $r$ , der Umkreisradius mit  $R$ , der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden und Höhe durch  $C$  mit der gegenüberliegenden Seite analog der anderen Bezeichnungen mit  $W_c$  bzw.  $H_c$ .

Vor dem eigentlichen Beweis werden einige Hilfssätze bereitgestellt:

**HS 1:** In jedem Dreieck teilt jede Winkelhalbierende die Gegenseite im Verhältnis der anliegenden

Seiten. Es ist also z.B.  $\frac{\overline{CW_a}}{\overline{W_aB}} = \frac{b}{c}$ .

Unmittelbare Folgerung:  $\overline{CW_a} = a \frac{b}{b+c}$  und analog  $\overline{CW_b} = b \frac{a}{a+c}$ .

Ferner ist  $|W_aCW_b| = \frac{1}{2} \cdot \overline{CW_a} \cdot \overline{CW_b} \cdot \sin(\gamma) = \frac{1}{2} \cdot \left( a \frac{b}{b+c} \right) \cdot \left( b \frac{a}{a+c} \right) \cdot \sin(\gamma) = |ABC| \cdot \left( \frac{ab}{(a+c) \cdot (b+c)} \right)$ .



**Beweis** (1. Figur im 1. Beweis, ist wohl auch als bekannt aus der Schule vorzusetzen):  $w_\alpha$  teilt das Dreieck ABC in zwei Teildreiecke auf. Als deren Grundseiten kann man einerseits  $CW_a$  bzw.  $W_aB$  bei gleicher Höhe von A, andererseits auch AB bzw. AC bei gleicher Höhe von  $W_a$  interpretieren. Dividiert man die hieraus berechneten Flächeninhalte, erhält man sofort die Behauptung.

**HS 2:** In jedem spitzwinkligen Dreieck schließen die Seiten des Höhenfußpunktdreiecks mit den Seiten des Dreiecks Winkel ein, die genau so groß wie die gegenüberliegenden Winkel des Ausgangsdreiecks sind. Es ist also z.B.  $\angle H_aH_bC = \beta$ .

**Beweis:** (1. Figur im 2. Beweis): Der Thaleskreis z.B. über der Seite AB geht auch durch die Höhenfußpunkte der Höhen von A und B. Das Viereck  $AH_bH_aB$  ist also Sehnenviereck, dessen Außenwinkel  $\angle H_aH_bC$  ist genau so groß wie der gegenüberliegende Innenwinkel  $\angle H_aBA = \beta$ .

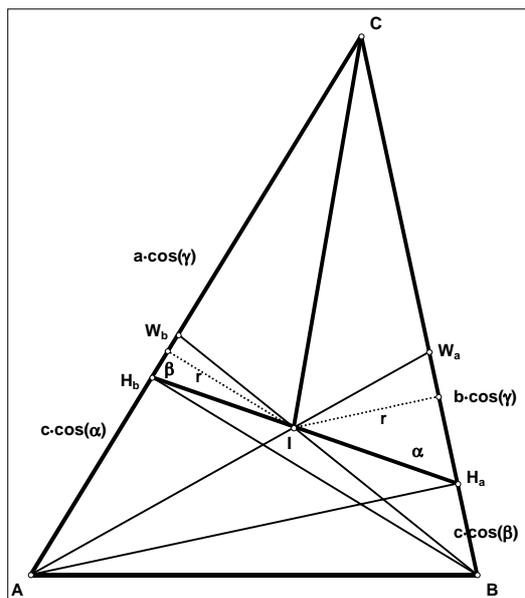
**HS 3:** In jedem spitzwinkligen Dreieck schließen eine Mittelsenkrechte und die Verbindungsgerade von Umkreismittelpunkt zu einem Endpunkt der zugehörigen Seite einen Winkel ein, der so groß ist wie der gegenüberliegende Winkel. Es ist also z.B.  $\angle CUM_b = \beta$ .

**Beweis** (2. Figur im 1. Beweis): U ist der Mittelpunkt des Umkreises ABC,  $\angle CUM_b$  ist der halbe Mittelpunktswinkel zum Umfangswinkel  $\beta$ .

**1. Beweis** (über Flächenbetrachtungen): Es genügt, folgende Äquivalenzen nachzuweisen:

$$I \in H_aH_b \Leftrightarrow^1 \cos(\gamma) = \frac{a+b}{a+b+c} \Leftrightarrow^2 \cos(\gamma) = \cos(\alpha) + \cos(\beta) \Leftrightarrow^3 U \in W_aW_b.$$

**zu 1):** Aus dem bei  $H_b$  rechtwinkligen Dreieck  $BH_bC$  leitet man sofort  $\overline{CH_b} = a \cdot \cos(\gamma)$  ab; analog ist  $\overline{CH_a} = b \cdot \cos(\gamma)$ . Nach Hilfssatz 2 haben die Dreiecke  $H_aH_bC$  und ABC die gleichen Innenwinkel, sind also ähnlich; dabei verhalten sich entsprechende Seiten



dieser Dreiecke wie  $\frac{\overline{CH_b}}{CB} = \frac{a \cdot \cos(\gamma)}{a} = \cos(\gamma)$ , für ihre

Flächeninhalte gilt also  $|H_bH_aC| = |ABC| \cdot \cos^2(\gamma)$ . Über bekannte Flächeninhaltsformeln erhält man (die erste Äquivalenz gilt, weil I sicher im Innern des Dreiecks ABC liegt und damit im Innern des Winkelfeldes von  $\angle ACB$ ):

$$\begin{aligned} I \in H_aH_b &\Leftrightarrow |CH_bH_a| = |CH_bI| + |CIH_a| \\ &\Leftrightarrow |ABC| \cdot \cos^2(\gamma) = \frac{1}{2} \cdot r \cdot a \cdot \cos(\gamma) + \frac{1}{2} \cdot r \cdot b \cdot \cos(\gamma) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot r \cdot (a+b+c) \cdot \cos^2(\gamma) = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (a+b) \cdot \cos(\gamma) \\ &\Leftrightarrow (a+b+c) \cdot \cos(\gamma) = (a+b) \end{aligned}$$

(die Division durch  $\cos(\gamma)$  ist Äquivalenzumformung, da das Dreieck ABC spitzwinklig ist und damit  $\cos(\gamma) \neq 0$ )

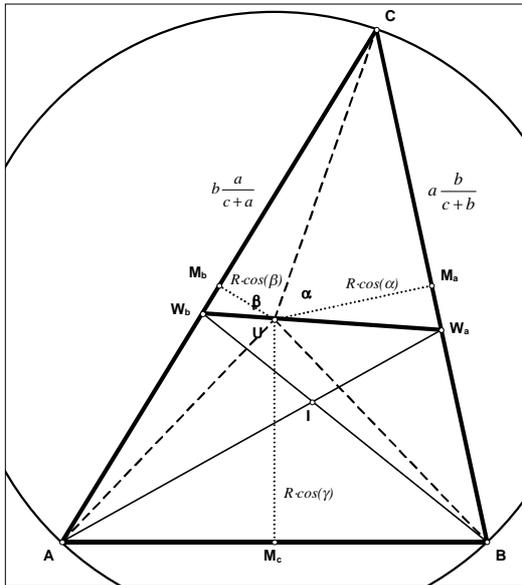
$$\Leftrightarrow \cos(\gamma) = \frac{a+b}{a+b+c}.$$

**zu 2):** Mit  $a = b \cdot \cos(\gamma) + c \cdot \cos(\beta)$  und  $b = a \cdot \cos(\gamma) + c \cdot \cos(\alpha)$  erhält man

$$\begin{aligned} \cos(\gamma) = \frac{a+b}{a+b+c} &\Leftrightarrow (a+b+c) \cdot \cos(\gamma) = b \cdot \cos(\gamma) + c \cdot \cos(\beta) + a \cdot \cos(\gamma) + c \cdot \cos(\alpha) \\ &\Leftrightarrow \cos(\gamma) = \cos(\alpha) + \cos(\beta). \end{aligned}$$



**zu 3):** Aus dem bei  $M_b$  rechtwinkligen Dreiecke  $UM_bC$  leitet man sofort  $M_bU = R \cdot \cos\beta$  ab; analog  $M_aU = R \cdot \cos\alpha$  und  $M_cU = R \cdot \cos\gamma$ . Damit gilt mit ähnlichen Überlegungen wie oben (da das Dreieck spitzwinklig ist, liegt  $U$  im Innern des Dreiecks  $ABC$  und damit im Innern des Winkelfeldes von  $\angle ACB$ ):



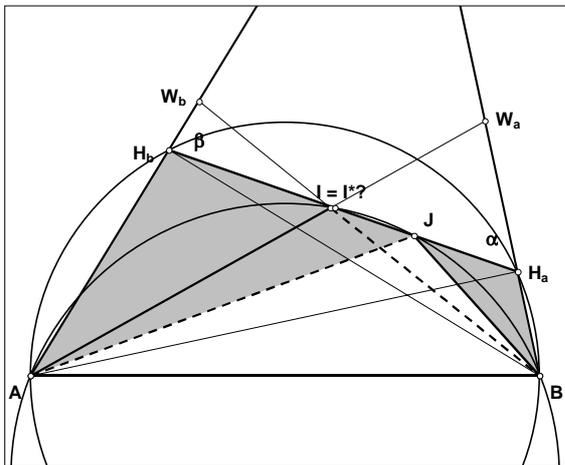
$$U \in W_a W_b \Leftrightarrow |CW_b W_a| = |CW_b U| + |CU W_a|$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & |ABC| \cdot \frac{a}{a+c} \cdot \frac{b}{b+c} \\ &= \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{a}{a+c} \cdot R \cdot \cos(\beta) + \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{b}{b+c} \cdot R \cdot \cos(\alpha) \\ \Leftrightarrow & \left[ \frac{1}{2} \cdot a \cdot R \cdot \cos(\alpha) + \frac{1}{2} \cdot b \cdot R \cdot \cos(\beta) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \cdot c \cdot R \cdot \cos(\gamma) \right] \frac{a}{a+c} \cdot \frac{b}{b+c} \\ &= \frac{1}{2} \cdot R \cdot a \cdot b \left[ \frac{\cos(\beta)}{a+c} + \frac{\cos(\alpha)}{b+c} \right] \\ \Leftrightarrow & a \cdot \cos(\alpha) + b \cdot \cos(\beta) + c \cdot \cos(\gamma) \\ &= (b+c) \cdot \cos(\beta) + (a+c) \cdot \cos(\alpha) \\ \Leftrightarrow & \cos(\gamma) = \cos(\alpha) + \cos(\beta) . \end{aligned}$$

**2. Beweis** (elementar): Es genügt, folgende Äquivalenzen nachzuweisen:

$$I \in H_a H_b \Leftrightarrow^4) \overline{BH_a} + \overline{AH_b} = \overline{H_a H_b} \Leftrightarrow^5) \overline{M_b U} + \overline{M_a U} = \overline{M_c U} \Leftrightarrow^6) U \in W_a W_b$$

**zu 4)** (vgl. auch Variante unten): Nachweis von "=>":



Sei  $I \in H_a H_b$ . Der Umkreis von Dreieck  $AIB$  schneidet die Gerade  $(H_a H_b)$  in einem zweiten (evtl. mit  $I$  zusammenfallenden) Punkt, den wir  $J$  nennen. Nach Umfangswinkelsatz erscheint  $AB$  von  $J$  unter dem gleichen Winkel wie von  $I$ ; da  $H_a H_b$  Sehne im Thaleskreis über  $AB$  und damit die Menge der Punkte auf der Geraden  $(H_a H_b)$  ist, unter denen  $AB$  unter einem stumpfen Winkel erscheint, ist  $J$  ebenso wie  $I$  innerer Punkt von  $H_a H_b$ . O.B.d.A. liege  $J$  auf der Strecke  $I H_a$  (andernfalls vertauschen wir die Bezeichnungen von  $A$  und  $B$ .)

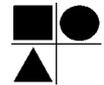
Falls  $I \neq J$ , ist das Viereck  $AIBJ$  ein Sehnenviereck, damit ergänzt sich  $\angle IJB$  mit dem gegenüberliegenden  $\angle BAI$  ebenso zu  $180^\circ$  wie mit dem Nebenwinkel  $\angle BJH_a$ . Diese beiden sind also gleich, es ist damit

$\angle BJH_a = \frac{\alpha}{2}$ . Da  $\angle CH_a H_b = \alpha$ , ist nach Außenwinkelsatz im Dreieck  $BJH_a$  dann auch  $\angle H_a B J = \angle CH_a H_b - \angle BJH_a = \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$ . Das Dreieck  $BJH_a$  ist also gleichschenkelig und somit  $\overline{BH_a} = \overline{JH_a}$ .

Nach Konstruktion ist  $H_b \in IJ$  und  $\angle IBA = \frac{\beta}{2}$ ; wir können also im Sehnenviereck  $AIBJ$  nach Umfangswinkelsatz ablesen:  $\angle H_b J A = \angle IJA = \angle IBA = \frac{\beta}{2}$ ; nach Außenwinkelsatz im Dreieck  $AH_b J$  zusammen mit  $\angle H_a H_b C = \beta$  berechnet man wie oben  $\angle JAH_b = \beta - \frac{\beta}{2} = \frac{\beta}{2}$ . Das Dreieck  $AH_b J$  ist also ebenfalls gleichschenkelig und damit  $\overline{AH_b} = \overline{H_b J}$ .

Falls  $I=J$ , ist  $H_a H_b$  Tangente an den Umkreis von Dreieck  $AIB$  und es folgt mit Sehnen-Tangentensatz die gleiche Aussage, zusätzlich noch  $\alpha=\beta$ .

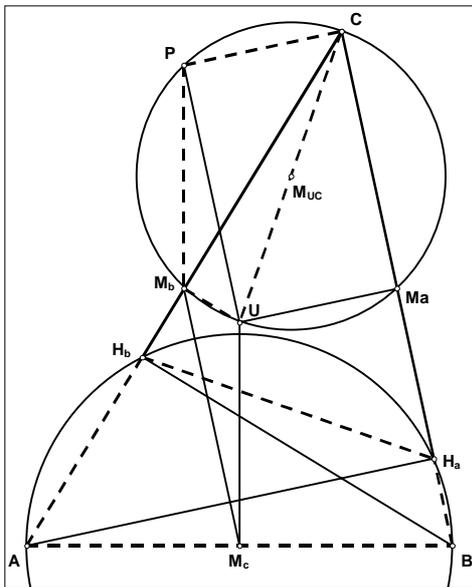
Schließlich ist  $J$  innerer Punkt von  $H_a H_b$ , zusammenfassend ist also:  $\overline{BH_a} + \overline{AH_b} = \overline{H_a H_b}$ .



Nachweis von " $\Leftarrow$ ":

Sei  $\overline{BH_a} + \overline{AH_b} = \overline{H_aH_b}$ . Dann existiert ein Innerer Punkt J auf  $H_aH_b$ , sodass  $\overline{AH_b} = \overline{H_bJ}$  und  $\overline{BH_a} = \overline{JH_a}$ ; die Dreiecke  $AH_bJ$  und  $BH_aJ$  sind dann gleichschenkelig und ihre Basiswinkel berechnen sich nach Außenwinkelsatz (die Außenwinkel bei  $H_b$  bzw.  $H_a$  haben die Weite  $\beta$  bzw.  $\alpha$ ) zu  $\frac{\beta}{2}$  bzw.  $\frac{\alpha}{2}$ . Nun betrachten wir den zweiten, evtl. mit J zusammenfallenden Schnittpunkt des Umkreises von Dreieck  $AJB$  mit  $H_aH_b$  (er sei mit  $I^*$  bezeichnet und liege o.B.d.A. auf der Strecke  $H_bJ$ ). Falls  $I^* \neq J$  gilt nach Konstruktion von  $I^*$  und Umfangswinkelsatz:  $\frac{\beta}{2} = \angle H_bJA = \angle IJA = \angle I^*BA$ , damit liegt  $I^*$  auf der Winkelhalbierenden  $w_\beta$ . Schließlich ist  $AI^*JB$  ein Sehnenviereck und somit  $\frac{\alpha}{2} = \angle BJH_a = 180^\circ - \angle I^*JB = \angle BAI^*$ . Damit liegt  $I^*$  auch auf  $w_\alpha$ , ist also identisch mit I; es ist also  $I \in H_aH_b$ . Falls  $I^* = J$ , ist  $\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2}$  und somit  $I = J \in H_aH_b$ .

**zu 5)** (vgl. auch Variante unten): Wir konstruieren aus den Strecken  $UM_a$ ,  $UM_c$ ,  $UM_b$  und dem Umkreisradius (in dieser Reihenfolge) ein Viereck  $CPM_bU$ , von dem wir nachweisen werden, dass es ähnlich zum Viereck  $AH_bH_aB$  ist. Für einen geeigneten Ähnlichkeitsfaktor  $k \neq 0$  folgt dann



$$\overline{BH_a} + \overline{AH_b} = \overline{H_aH_b} \Leftrightarrow k \cdot \overline{BH_a} + k \cdot \overline{AH_b} = k \cdot \overline{H_aH_b} \Leftrightarrow \overline{M_bU} + \overline{M_aU} = \overline{M_cU}$$

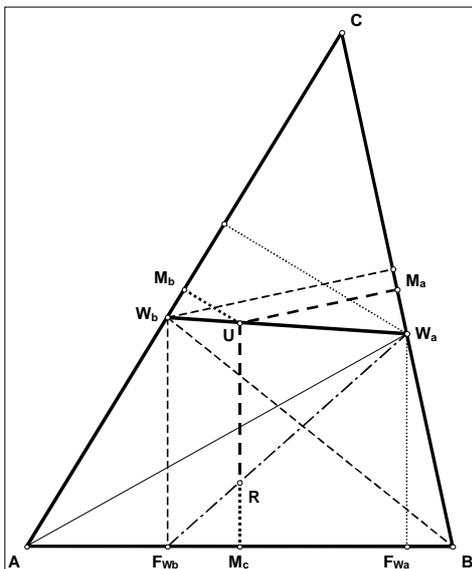
und so unmittelbar die zu beweisende Aussage:

Hierzu zeichnen wir den Kreis über dem Durchmesser UC. Er ist gleichzeitig Thaleskreis über UC und enthält damit auch die Punkte  $M_a$  und  $M_b$ . Die Parallele zu  $UM_a$  durch C schneidet diesen Kreis in einem Punkt P; da das Viereck  $PCM_aU$  ein Rechteck ist, ist zusätzlich  $\overline{CP} = \overline{UM_a}$ .

Es ist  $PU \perp M_aU$ , nach Thales also auch  $PM_b \perp M_bM_a$ . Aus  $M_bM_a \parallel AB$  (Mittelparallele!) und  $UM_c \perp AB$  folgt  $PM_b \parallel UM_c$ . Da auch  $M_cM_b \parallel BC \parallel UP$ , ist das Viereck  $PM_bM_cU$  ein Parallelogramm, insbesondere ist  $\overline{PM_b} = \overline{UM_c}$ .

Die Vierecke  $UM_bPC$  und  $BH_aH_bA$  haben bei U bzw. B beide den Innenwinkel  $\beta$ , bei C bzw. A beide den Innenwinkel  $\alpha$ , in beiden Vierecken stehen die Diagonalen senkrecht auf entsprechenden Seiten. Damit sind die Teildreiecke  $ABH_a$  und  $CUM_b$  sowie  $BAH_b$  und  $UCP$  ähnlich, also auch die Vierecke selbst.

**zu 6)** (vgl. auch Variante unten): Die Fußpunkte der Lote von  $W_a$  und  $W_b$  auf AB seien mit  $F_{W_a}$  bzw.  $F_{W_b}$  bezeichnet, der Schnittpunkt von  $F_{W_b}W_a$  mit  $M_cU$  mit R.



Nachweis von " $\Leftarrow$ ":

Sei  $U \in W_aW_b$ . Wir unterwerfen die Strecke  $UM_a$  zuerst der zentrischen Streckung  $(W_a, \frac{W_aW_b}{W_aU})$ , spiegeln anschließend das Bild an der Winkelhalbierenden  $BW_b$ , und unterwerfen das Bild dann der zentrischen Streckung  $(W_a, \frac{W_aU}{W_aW_b})$ . Bei dieser Verkettung von Abbildungen wird U offensichtlich der Reihe nach auf  $W_b$ , wieder  $W_b$  und anschließend zurück auf U abgebildet;  $M_a$  der Reihe nach auf den Fußpunkt des Lotes von  $W_b$  auf BC (da  $UM_a \perp BC$ ), dann auf  $F_{W_b}$  (da bei der Spiegelung an der Winkelhalbierenden  $W_b$  Fixpunkt und das Bild von BC die Gerade BA ist), dann auf R (da  $W_bF_{W_b} \parallel UM_c$ ). Da zusätzlich der Streckfaktor der zweiten zentrischen Streckung der Kehrwert des Streckfaktors der ersten ist, hat deren Produkt den Wert 1 und die Gesamtabbildung ist damit eine Kongruenzabbildung und die Strecken  $UM_a$  und  $UR$  haben die gleiche Länge.



In ähnlicher Weise weisen wir nach, dass  $UM_b$  und  $M_cR$  die gleiche Länge haben: Wir unterwerfen die Strecke  $UM_b$  zuerst der zentrischen Streckung ( $W_b, \frac{W_bW_a}{W_bU}$ ), spiegeln anschließend das Bild an der Winkelhalbierenden  $AW_a$ , und unterwerfen das Bild dann der zentrischen Streckung ( $F_{W_b}, \frac{W_bU}{W_bW_a}$ ).

U wird dabei der Reihe nach auf  $W_a$ , wieder  $W_a$  und schließlich auf R abgebildet;  $M_b$  der Reihe nach auf den Fußpunkt des Lotes von  $W_a$  auf AC, dann auf  $F_{W_a}$  und schließlich auf  $M_c$ . Zur Begründung benötigen wir analoge Überlegungen wie oben und die Feststellung, dass - weil  $W_bF_{W_b} \parallel M_cU \parallel W_aF_{W_a}$  - auch  $\frac{W_bU}{W_bW_a} = \frac{F_{W_b}M_c}{F_{W_b}F_{W_a}}$ .

Da U innerer Punkt von  $W_aW_b$  ist, ist auch R innerer Punkt von  $M_cU$ , also  $\overline{M_cU} = \overline{M_cR} + \overline{RU} = \overline{UM_b} + \overline{UM_a}$ .

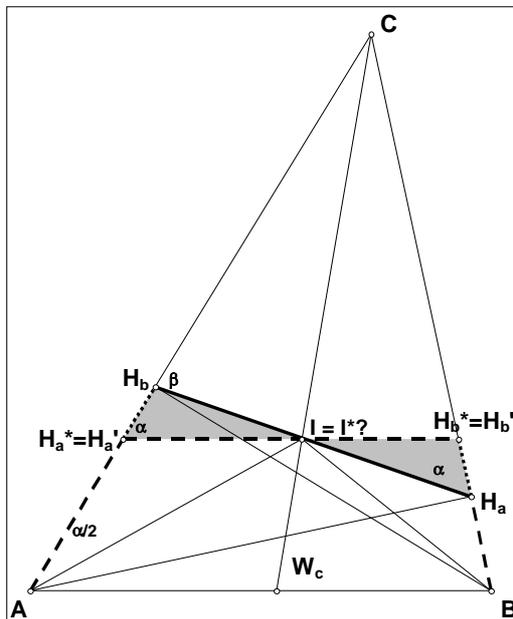
**Nachweis von "=>":**

Sei  $U \notin W_aW_b$ . Wir bezeichnen den Schnittpunkt von  $M_cU$  mit  $W_aW_b$  mit  $U^*$ , die Lotfußpunkte von  $U^*$  auf AC und BC mit  $M_b^*$  bzw.  $M_a^*$ . Nach obigem Beweis ist dann  $\overline{M_cU^*} = \overline{U^*M_b^*} + \overline{U^*M_a^*}$ . Ist nun  $\overline{M_cU^*} < \overline{M_cU}$ , dann ist offensichtlich  $\overline{U^*M_a^*} > \overline{UM_a}$  und  $\overline{U^*M_b^*} > \overline{UM_b}$ , also  $\overline{M_cU} < \overline{UM_b} + \overline{UM_a}$ , insbesondere  $\overline{M_cU} \neq \overline{UM_b} + \overline{UM_a}$ , durch Umdrehen der </> Zeichen folgt dies in analoger Weise auch aus  $\overline{M_cU^*} > \overline{M_cU}$ .

**Varianten** (zur besseren Übersicht nicht in den 1. oder 2. Beweis eingearbeitet):

Wir beweisen zunächst einen weiteren Hilfssatz:

**HS4:** In jedem Dreieck gilt  $\frac{\overline{CI}}{\overline{CW_c}} = \frac{a+b}{a+b+c}$ .



Beweis: Die Parallele zu AB durch I schneidet AC und BC in zwei Punkten, die wir  $H_a^*$  und  $H_b^*$  nennen. Das Dreieck  $AH_a^*I$  hat bei A den Innenwinkel  $\frac{\alpha}{2}$  (Konstruktion von I), ebenso bei I (Wechselwinkel an parallelen Geraden  $AB \parallel H_a^*H_b^*$ ), ist also gleichschenkelig und es ist  $\overline{AH_a^*} = \overline{H_a^*I}$ . Analog folgt  $\overline{BH_b^*} = \overline{H_b^*I}$ . Da I innerer Punkt von  $H_a^*H_b^*$  ist, folgt schließlich  $\overline{H_a^*H_b^*} = \overline{H_a^*I} + \overline{H_b^*I} = \overline{AH_a^*} + \overline{BH_b^*}$ .

Da auch  $H_a^*$  und  $H_b^*$  innere Punkte von AC bzw. BC sind, hat das Dreieck  $CH_a^*H_b^*$  den Gesamtumfang  $a+b$ .

Da  $H_a^*H_b^* \parallel AB$ , gibt es eine zentrische Streckung mit Zentrum C, die das Dreieck ABC mit Umfang  $a+b+c$  in das Dreieck  $H_a^*H_b^*C$  mit Umfang  $a+b$  überführt; deren Streckfaktor hat also den Wert  $\frac{a+b}{a+b+c}$ . Da diese Streckung auch  $CW_c$  in  $CI$  überführt, folgt die Behauptung.

**Variante zu (1)**  $I \in H_aH_b \Leftrightarrow \cos(\gamma) = \frac{a+b}{a+b+c}$ : Den Schnittpunkt von  $w_\gamma$  mit  $H_aH_b$  nennen wir  $I^*$ . Die Dreiecke  $H_aH_bC$  und  $ABC$  haben gleiche Innenwinkel, sind also ähnlich; dabei überführt eine Streckung mit Zentrum C und Streckfaktor  $\frac{\overline{CH_b^*}}{\overline{CB}} = \frac{a \cos(\gamma)}{a} = \cos(\gamma)$  und anschließende Spiegelung an  $w_\gamma$  das Dreieck ABC in das Dreieck  $H_aH_bC$ . Bei dieser Abbildung wird  $W_c$  als Schnittpunkt von AB



mit  $w_\gamma$  auf den Schnittpunkt der zugehörigen Bilder, also auf  $I^*$  abgebildet; da  $w_\gamma$  bei der Spiegelung Fixpunktgerade ist, ist damit auch  $\frac{\overline{CI^*}}{CW_c} = \cos(\gamma)$ . Die Behauptung folgt schließlich mit Hilfssatz 4:

$$I \in H_a H_b \Leftrightarrow I = I^* \Leftrightarrow \frac{\overline{CI}}{CW_c} = \frac{\overline{CI^*}}{CW_c} \Leftrightarrow \frac{a+b}{a+b+c} = \cos(\gamma).$$

**Variante zu (4)**  $I \in H_a H_b \Leftrightarrow^4) \overline{BH_a} + \overline{AH_b} = \overline{H_a H_b}$ : Wir knüpfen an die Bezeichnungen und Überlegungen aus dem Beweis von Hilfssatz 4 an und betrachten die Achsspiegelung an der Winkelhalbierenden  $w_\gamma$ : Sie überführt den Punkt  $H_a \in CB$  auf einen Punkt  $H_a' \in CA$  und  $H_b \in CA$  auf einen Punkt auf  $H_b' \in CB$ . Da  $H_a H_b$  mit den Seiten  $CB$  bzw.  $CA$  Winkel der Weite  $\beta$  bzw.  $\alpha$  einschließen, schließt  $H_a' H_b'$  mit den Seiten  $CA$  bzw.  $CB$  Winkel der Weite  $\beta$  bzw.  $\alpha$  ein, es ist also  $H_a' H_b' \parallel AB \parallel H_a^* H_b^*$ . Ferner ist  $I \in w_\gamma$  Fixpunkt. Damit gilt:

$$I \in H_a H_b \Leftrightarrow I \in H_a' H_b', \text{ da auch } I \in H_a^* H_b^* \text{ und } H_a' H_b' \parallel H_a^* H_b^* \text{ folgt:}$$

$$I \in H_a H_b \Leftrightarrow H_a^* = H_a' \text{ und } H_b^* = H_b'.$$

Aus Symmetriegründen sind in diesem Fall die Dreiecke  $I H_a H_b^*$  und  $I H_a^* H_b$  kongruent. Insbesondere ist dann  $\overline{BH_a} + \overline{AH_b} = \overline{BH_b^*} \mp \overline{H_b^* H_a} + \overline{AH_a^*} \pm \overline{H_a^* H_b} = \overline{BH_b^*} + \overline{AH_a^*} = \overline{H_a^* H_b^*} = \overline{H_a H_b}$ .

**Variante zu (5)**  $\overline{BH_a} + \overline{AH_b} = \overline{H_a H_b} \Leftrightarrow^5) \overline{M_b U} + \overline{M_a U} = \overline{M_c U}$  (kürzer unter Verwendung trigonometrischer Funktionen): Es ist  $\overline{BH_a} + \overline{AH_b} = \overline{H_a H_b} \Leftrightarrow c \cdot \cos(\alpha) + c \cdot \cos(\beta) = c \cdot \cos(\gamma) \Leftrightarrow R \cdot \cos(\alpha) + R \cdot \cos(\beta) = R \cdot \cos(\gamma) \Leftrightarrow \overline{M_b U} + \overline{M_a U} = \overline{M_c U}$ .

**Variante zu (6)**  $\overline{M_b U} + \overline{M_a U} = \overline{M_c U} \Leftrightarrow^6) U \in W_a W_b$ : Sei  $d(X, YZ)$  der Abstand des Punktes  $X$  von der Geraden  $YZ$ . Für jeden Punkt  $P$  im Innern eines spitzwinkligen Dreiecks definieren wir  $f(P) := d(P, AC) + d(P, BC) - d(P, AB)$ .

Über die Aufgabenstellung hinaus wird bewiesen:  $f(P) = 0 \Leftrightarrow P \in W_a W_b$ .

Mit  $\overline{M_b U} = d(U, AC)$ ,  $\overline{M_a U} = d(U, BC)$  und  $\overline{M_c U} = d(U, AB)$  folgt sofort die zu beweisende Äquivalenz.

**Beweis** (mit analytischer Geometrie, etwas knapp formuliert): Wir legen das Dreieck  $ABC$  so in ein Achsenkreuz, dass keine Achse parallel zu  $W_a W_b$  ist. Die Gerade  $W_a W_b$  können wir dann durch eine Gleichung  $y = mx + t$  mit geeigneten  $m, t \neq 0$  beschreiben; d.h. die Punkte  $P(x|y) \in W_a W_b$  sind genau die Punkte, deren Koordinaten diese Gleichung erfüllen; da  $m, t \neq 0$ , ist eine eindeutige Zuordnung zwischen dem Parameter  $x$  und den Punkten der Gerade möglich. Die Gerade  $AC$  können wir durch eine Gleichung in Hesse-Normalenform beschreiben, also eine Gleichung der Form  $px + qy + r = 0$ , wobei  $p, q, r$  so gewählt sind, dass der Ausdruck  $px + qy + r$  genau den Abstand eines Punktes  $P(x|y)$ , der im Innern des Dreiecks  $ABC$  liegt, von der Geraden  $AC$  beschreibt.

Sei  $P(x|y) \in W_a W_b$ , d.h.  $y = mx + t$ . Einsetzen ergibt mit  $d(P, AC) = px + q(mx + t) + r$  einen linearen Term mit der Variablen  $x$ ; das Gleiche gilt für  $d(P, AB)$  und  $d(P, BC)$ . Da Summe und Differenzen von linearen Termen wieder lineare Terme sind, ist auch  $d(P, AC) + d(P, BC) - d(P, AB)$  ein linearer Term mit der Variablen  $x$ . Da  $W_a$  auf  $w_\alpha$  liegt, ist  $d(W_a, AC) = d(W_a, AB)$  und damit  $f(W_a) = 0$ , mit ähnlicher Argumentation auch  $f(W_b) = 0$ . Wir haben also zwei verschiedene  $x$ -Werte, für die der lineare Term  $f(P) = f(P(x))$  den Wert 0 annimmt. Dies ist aber nur möglich, wenn  $f(P(x)) = 0$  für alle  $x$ , d.h.  $f(P) = 0$  für alle  $P \in W_a W_b$ .

Mit  $f(P) = 0$  und  $f(R) = 0$  ( $P \neq R$ ) ist also auch  $f(Q) = 0$  für alle  $Q \in (PR)$ . Gäbe es ein  $P(x|y) \notin W_a W_b$  mit  $f(P) = 0$ , so wäre also für alle Punkte  $Q \in (PW_a)$  ebenfalls  $f(Q) = 0$ , ebenso für alle Punkte  $Q \in (PW_b)$ . Schließlich wäre  $f(Q) = 0$  sogar für alle Punkte  $Q$  der Ebene, da es durch jeden Punkt  $Q$  wenigstens eine Gerade gibt, die zwei der Geraden  $W_a W_b$ ,  $W_a P$  und  $W_b P$  in verschiedenen Punkten trifft.

**3. Beweis** (mit homogenen Koordinaten):

**Bemerkung:** Dieser Beweis benützt die Beschreibung von Punktmenge in der Ebene durch homogene (oder auch Dreiecks- oder trilineare) Koordinaten. Da diese Theorie zumindest im Schulbereich weitgehend unbekannt ist, werden die nötigen Begriffe und verwendeten Sätze im Anschluss an den eigentlichen Beweis hergeleitet.



Da die Abstände des Inkreismittelpunktes zu den drei Seiten des Dreiecks gleich sind, hat  $I$  die Koordinaten  $(1|1|1)$ . Da  $W_a$  als Punkt auf der Winkelhalbierenden  $w_\alpha$  zu  $(AB)$  und  $(AC)$  gleichen Abstand hat und als Punkt auf  $(BC)$  zu  $(BC)$  den Abstand 0, hat  $W_a$  die Koordinaten  $(0:1:1)$ , mit analoger Begründung hat  $W_b$  die Koordinaten  $(1:0:1)$ .

Da das Dreieck  $ABC$  spitzwinklig ist, liegt sein Umkreismittelpunkt  $U$  im Innern. Insbesondere verschwindet die dritte Koordinate von  $U$  nicht,  $U$  hat also Koordinaten  $(r:s:1)$  für geeignete Wert  $r, s \in \mathbb{R}$ . Ferner ist  $\angle UAC = 90^\circ - \beta = \angle BAH_a$ ; damit entsteht  $(AH_a)$  aus  $(AU)$  durch Spiegeln an der Winkelhalbierenden  $w_\alpha$ . Die Abstände eines Punktes auf  $(AU)$  zu  $(AB)$  bzw.  $(AC)$  werden durch diese Spiegelung zu Abständen eines Punktes auf  $AH_a$  zu  $(AC)$  bzw.  $(AB)$ , also erhält man die Koordinaten von Punkten auf  $(AH_a)$  durch Vertauschen von zweiter und dritter Koordinate von Punkten auf  $(AU)$  und geeigneter Anpassung der ersten Koordinate. Als Punkt auf  $BC$  hat  $H_a$  also die Koordinaten  $(0:1:s)$ , analog  $H_b$   $(1:0:r)$ . Nach HS 1 (s.u.) ist dann nach bekannten Rechenregeln für Determinanten

$$I \in H_a H_b \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & s & r \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} r & 0 & 1 \\ s & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow U \in W_a W_b.$$

**Bemerkung:** Verwendet man die tatsächlichen Koordinaten  $U(\cos(\alpha):\cos(\beta):\cos(\gamma))$ ,  $H_a(0:\cos(\beta):\cos(\gamma))$  und  $H_b(\cos(\gamma):0:\cos(\alpha))$ , so erhält man zusätzlich die im 1. Beweis hergeleitete Äquivalenz

$$I \in H_a H_b \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cos(\gamma) \\ 1 & \cos(\gamma) & 0 \\ 1 & \cos(\beta) & \cos(\alpha) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \cos(\gamma)\cos(\alpha) + \cos(\gamma)\cos(\beta) - \cos^2(\gamma) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(\alpha) + \cos(\beta) - \cos(\gamma) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \cos(\alpha) & 0 & 1 \\ \cos(\beta) & 1 & 0 \\ \cos(\gamma) & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow U \in W_a W_b.$$

**Erläuterung** der Notation und **Herleitung** der benötigten Hilfssätze<sup>1</sup>:

**Homogene Koordinaten:** Zunächst nennen wir zwei Tripel  $(p_a:p_b:p_c)$  und  $(q_a:q_b:q_c)$  proportional, wenn es ein  $k \neq 0$  gibt, sodass  $(p_a:p_b:p_c) = (k \cdot q_a:k \cdot q_b:k \cdot q_c)$ . Nach Vorgabe des Dreiecks  $ABC$  seien zu einem Punkt  $P$  dessen gerichteten euklidischen Abstände zu den Geraden  $(BC)$ ,  $(AC)$  und  $(AB)$  mit  $d_a$ ,  $d_b$  bzw.  $d_c$  bezeichnet; dabei sei  $d_a$  (bzw.  $d_b$ ,  $d_c$ ) genau dann positiv, wenn  $P$  und das Innere des Dreiecks  $ABC$  in der gleichen Halbebene bezüglich  $(BC)$  (bzw.  $(AC)$ ,  $(AB)$ ) liegen. Jedes zu  $(d_a:d_b:d_c)$  proportionale Tripel nennen wir homogene(s) Koordinaten(tripel) von  $P$  bezüglich des Dreiecks  $ABC$ .

**Zusammenhang zwischen den homogenen Koordinaten eines Punktes:** Es ist stets  $\frac{1}{2}(ad_a+bd_b+cd_c) = \Delta$  (1) bzw. äquivalent  $\frac{1}{2\Delta}(ad_a+bd_b+cd_c) = 1$  (2); hierbei bezeichne  $\Delta$  den Flächeninhalt des Dreiecks  $ABC$  und  $a, b, c$  die Längen der Seiten  $BC, CA, AB$ . Nachweis:  $P$  bestimmt mit je zwei der Ecken  $A, B$  und  $C$  insgesamt drei Dreiecke. (1) besagt dann, dass deren (durch die Vorzeichen der  $d_a, d_b, d_c$ ) orientierte Flächeninhalte aufaddiert den Flächeninhalt von Dreieck  $ABC$  ergeben.

**Existenz- und Eindeutigkeit** (Begründungen teilweise weggelassen oder verkürzt): (A) Zu jedem Punkt in der Ebene existieren homogene Koordinaten. (B) Jedes Tripel  $(p_a:p_b:p_c) \neq (0:0:0)$  mit  $ap_a+bp_b+cp_c \neq 0$  ist homogenes Koordinatentripel genau eines Punktes in der Ebene; dies folgt aus der Möglichkeit, einen solchen Punkt eindeutig als Schnitt von Geraden durch die Ecken des Dreiecks  $ABC$  zu konstruieren. (Dabei werden die Geraden bestimmt durch das Verhältnis von je zwei der Koordinaten).

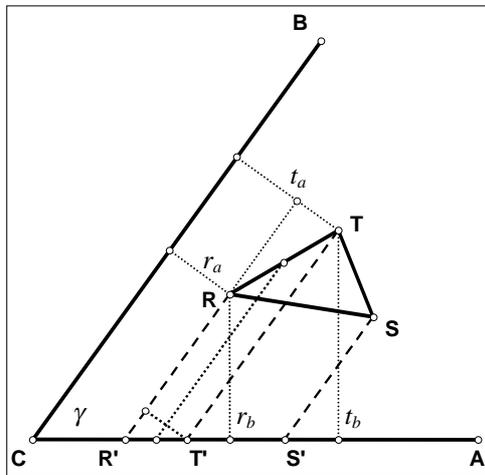
**Bemerkung:** Falls  $ap_a+bp_b+cp_c = 0$ , sind die in (B) genannten Konstruktionsgeraden parallel, das Tripel  $(p_a:p_b:p_c)$  bestimmt dann keinen Punkt der Ebene; dies ergibt sich auch aus (1). Einem solchen Tripel wird dann ein "unendlich ferner Punkt" zugeordnet. – Geraden lassen sich ebenfalls durch ein Tripel  $(r:s:t) \in \mathbb{R}^3$  beschreiben als Lösungsmenge der Gleichung  $rp_a+sp_b+tp_c = 0$ . Jede Aussage über Inzidenzbeziehungen von Geraden und Punkten lässt sich damit in eine Aussage über eine rechnerische Beziehung von zugehörigen Tripeln aus  $\mathbb{R}^3$  umformulieren; dabei erfolgt die Beschreibung von Geraden und Punkten durch identische Objekte. Vertauscht man hierbei die Deutung als

<sup>1</sup> Quelle: Whitworth, William Allen: Trilinear Coordinates and other methods of Modern Analytical Geometry of Two Dimensions. Deighton, Bell, and Co., Cambridge, 1866, p. 1 - 22. Im Internet zu finden unter: <http://cdl.library.cornell.edu/Hunter/hunter.pl?handle=cornell.library.math/01190002&id=5>



Punkte und Geraden, erhält man duale Aussagen. Die homogenen Koordinaten eignen sich damit besonders zur Darstellung der projektiven Geometrie.

Orientierter Flächeninhalt eines Dreiecks RST in Abhängigkeit von dessen Koordinaten:



Zunächst seien die Koordinaten  $R(r_a:r_b:r_c)$ ,  $S(s_a:s_b:s_c)$  und  $T(t_a:t_b:t_c)$  normiert, d.h. so gewählt, dass sie die tatsächlichen Entfernungen zu den Dreiecksseiten darstellen; durch Multiplikation mit einem Faktor  $k_x \neq 0$  ( $x \in \{r, s, t\}$ ) können wir später zu beliebigen Koordinaten übergehen. Die dritten Koordinaten – also die Abstände der Punkte zur Seite AB – werden dann zunächst nicht benötigt.

Die Parallelen zu (BC) durch R, S und T schneiden (AC) in drei Punkten, die wir mit R', S' bzw. T' bezeichnen; es ist dann  $|RST| = |R'RTT'| + |T'TSS'| - |R'RSS'|$ . (Hierbei sei mit  $|XYZ|$  der orientierte Flächeninhalt des Polygons XYZ bezeichnet; einige notwendige Überlegungen, die die Gültigkeit dieser Gleichung auch bei anderer relativer Lage der Punkte R, S, T nachweisen, werden hier übergangen.)

$R'RTT'$  ist ein Trapez mit den parallelen Seiten  $R'R || T'T$ , einer Mittellinie der Länge  $\frac{1}{2\sin(\gamma)}(t_b+r_b)$  und einer Höhe  $(t_a-r_a)$ ; es ist also

$$|R'RTT'| = \frac{1}{2\sin(\gamma)}(t_b+r_b)(t_a-r_a).$$

Mit analoger Herleitung für die Flächeninhalte der Trapeze  $T'TSS'$  und  $R'RSS'$  erhalten wir nach bekannten Rechenregeln für Determinanten (bei der letzten Umformung wird (2) verwendet):

$$\begin{aligned} |RST| &= |R'RTT'| + |T'TSS'| - |R'RSS'| \\ &= \frac{1}{2\sin(\gamma)} [(t_b+r_b)(t_a-r_a) + (s_b+t_b)(s_a-t_a) - (s_b+r_b)(s_a-r_a)] \\ &= \frac{1}{2\sin(\gamma)} \{ r_a[(s_b+r_b) - (t_b+r_b)] - s_a[(s_b+r_b) - (s_b+t_b)] + t_a[(t_b+r_b) - (s_b+t_b)] \} \\ &= \frac{1}{2\sin(\gamma)} \{ r_a[s_b-t_b] - s_a[r_b-t_b] + t_a[r_b-s_b] \} \\ &= \frac{1}{2\sin(\gamma)} \begin{vmatrix} r_a & s_a & t_a \\ r_b & s_b & t_b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2\sin(\gamma)} \begin{vmatrix} r_a & s_a & t_a \\ r_b & s_b & t_b \\ \frac{1}{2\Delta}(ar_a+br_b+cr_c) & \frac{1}{2\Delta}(as_a+bs_b+cs_c) & \frac{1}{2\Delta}(at_a+bt_b+ct_c) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

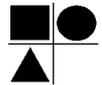
Nun ziehen wir den gemeinsamen Faktor  $\frac{1}{2\Delta}$  aus der dritten Zeile der Determinante und multiplizieren die erste Zeile mit  $a$ , die zweite mit  $b$ ; anschließend subtrahieren wir die erste und zweite Zeile von der dritten und ziehen den gemeinsamen Faktor  $c$  in der letzten Zeile nach außen:

$$|RST| = \frac{1}{4ab\Delta \sin(\gamma)} \begin{vmatrix} ar_a & as_a & at_a \\ br_b & bs_b & bt_b \\ ar_a+br_b+cr_c & as_a+bs_b+cs_c & at_a+bt_b+ct_c \end{vmatrix} = \frac{c}{4ab\Delta \sin(\gamma)} \begin{vmatrix} r_a & s_a & t_a \\ r_b & s_b & t_b \\ r_c & s_c & t_c \end{vmatrix}$$

$$\text{oder } |RST| = \frac{c}{4abk_r k_s k_t \Delta \sin(\gamma)} \begin{vmatrix} k_r r_a & k_s s_a & k_t t_a \\ k_r r_b & k_s s_b & k_t t_b \\ k_r r_c & k_s s_c & k_t t_c \end{vmatrix} \quad \text{für alle } k \neq 0.$$

Der Faktor vor der Determinante hat niemals den Wert 0; damit haben  $|RST|$  und die Determinante immer gleichzeitig den Wert 0; dabei stehen in der Determinante beliebige, nicht-normierte Koordinaten der Eckpunkte. Da ferner  $|RST| = 0 \Leftrightarrow R, S, T$  kollinear, folgt unmittelbar :

**HS 1:** Die Punkte  $X(x_a:x_b:x_c)$ ,  $Y(y_a:y_b:y_c)$  und  $Z(z_a:z_b:z_c)$  sind genau dann kollinear, wenn  $\det(X, Y, Z) = 0$ .



**Bemerkung:** Die zu beweisende Aussage ist äquivalent zu  $I \notin H_a H_b \Leftrightarrow U \notin W_a W_b$ . Deswegen ist es für die Lösung der Aufgabe unerheblich, ob es überhaupt Dreiecke gibt, bei denen die gegebenen Punkttripel kollinear sind. Ein solcher Nachweis muss also nicht geführt werden.

Von der Existenz solcher Dreiecke kann man sich durch folgende heuristische Überlegung überzeugen: Man beginnt mit einem bei C rechtwinkligen Dreieck ABC als Grenzfall eines spitzwinkligen Dreiecks. In diesem Dreieck ist  $H_a = H_b = C$ . Da der Inkreismittelpunkt I im Innern des Dreiecks ABC liegt, sind die Punkte I, A und B in der gleichen Halbebene bezüglich der (durch eine Grenzwertbetrachtung bestimmten) Geraden  $(H_a H_b)$ . Nun "zieht" man die Ecke C entlang der Höhe  $h_c$ , sodass sich die Entfernung von der Seite AB vergrößert. Dabei nähern sich  $\alpha$  und  $\beta$  beliebig nahe dem Wert von  $90^\circ$ , entsprechend nähern sich die Punkte  $H_a$  und  $H_b$  beliebig nahe den Ecken B bzw. A, während der Abstand des Punktes I von der Geraden (AB) wächst. Da die Verformung des Dreiecks stetig erfolgt, ist irgendwann eine Lage von C erreicht, bei der  $C \in H_a H_b$ .

Konstruktionen mit einem dynamischen Geometrieprogramm erwecken zunächst die Vermutung, dass alle Dreiecke, bei denen die Kollinearität der gegebenen Punkttripel gegeben ist, den gleichen Winkel  $\gamma \approx 44^\circ$  besitzen. Dies trifft jedoch nicht zu:

Wir formen die notwendige und hinreichende Bedingung  $\cos(\gamma) = \cos(\alpha) + \cos(\beta)$  unter Verwendung von  $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$  äquivalent um zu  $\cos(\alpha) + \cos(\beta) + \cos(\alpha + \beta) = 0$  (\*).

Für  $\alpha = \beta$  erhalten wir über  $2\cos(\alpha) + \cos(2\alpha) = 0$  und  $2\cos(\alpha) + 2\cos^2(\alpha) - 1 = 0$  den Wert  $\alpha = \beta = \arccos(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}) \approx 68,529\dots^\circ$ , also  $\gamma \approx 42,941\dots^\circ$ ; für den Grenzfall  $\alpha = 90^\circ$  erhalten wir  $\cos(90^\circ) + \cos(\beta) + \cos(90^\circ + \beta) = 0$  oder  $\cos(\beta) - \sin(\beta) = 0$ , also  $\beta = 45^\circ$  und damit  $\gamma = 45^\circ$ . Mit weiteren Überlegungen – z.B. der Herleitung der Formel  $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sin(\gamma) \pm \sqrt{3 - (\cos(\gamma) + 1)^2}$  – kann man zeigen, dass mit den hier berechneten Werten schon eine untere und obere Schranke für  $\gamma$  gegeben ist, d.h. dass  $\gamma \in [42,941\dots^\circ; 45^\circ[$ .