Bundeswettbewerb Mathematik
Wissenschaftszentrum, Postfach 20 14 48, 53144 Bonn
Fon: 0228 - 3727 411 • Fax: 0228 - 3727 413
e-mail: info@bundeswettbewerb-mathematik.de
www.bundeswettbewerb-mathematik.de

Korrekturkommission • Karl Fegert

Aufgaben und Lösungen

1. Runde 2003

Stand: Mai 2003

Aufgabe 1: Gegeben seien sechs aufeinander folgende positive ganze Zahlen.

Man beweise, dass es eine Primzahl gibt, die Teiler von genau einer dieser Zahlen ist.

Bemerkung: Alle vorgestellten Beweisvarianten gehen letztlich auf den Nachweis zurück, dass von sechs aufeinander folgenden ganzen Zahlen mindestens eine weder durch 2, noch durch 3, noch durch 5 teilbar ist.

Beweisvariante 1: Zunächst stellen wir fest: Nach bekannten Rechenregeln

(A) sind von sechs aufeinander folgenden ganzen Zahlen genau drei durch 2 teilbar,
(B) sind von sechs aufeinander folgenden ganzen Zahlen genau zwei durch 3 teilbar,
(C) ist von zwei aufeinander folgenden Vielfachen von 3 genau eines durch 2 teilbar, ebenso ist von zwei aufeinander folgenden Vielfachen von 5 genau eines durch 2 teilbar,
(D) ist von fünf aufeinander folgenden ganzen Zahlen genau eine durch 5 teilbar,
(E) ist von sechs aufeinander folgenden ganzen Zahlen höchstens eine durch eine vorgegebene ganze Zahl teilbar, wenn diese Zahl größer als 6 ist.

Wir betrachten beliebige sechs aufeinander folgende positive ganze Zahlen. Bezeichnen wir die kleinste mit n, so sind dies n, n+1, n+2, ..., n+5. Nun unterscheiden wir zwei Fälle:

Fall 1: n ist nicht durch 5 teilbar: Nach Feststellung (D) ist genau eine der fünf aufeinander folgenden Zahlen n+1, n+2, n+3, n+4, n+5 durch 5 teilbar. Insgesamt ist also genau eine der sechs aufeinander folgenden Zahlen n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5 durch 5 teilbar. Da 5 Primzahl ist, erfüllt 5 die geforderte Eigenschaft.

Fall 2: n ist durch 5 teilbar: Wir markieren von den Zahlen n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5 zunächst alle Vielfachen von 2, nach Bemerkung (A) werden also genau drei Zahlen markiert. Danach markieren wir die Vielfachen von 3, nach Bemerkung (B) sind dies genau zwei; allerdings ist nach Bemerkung (C) genau eine davon auch durch zwei teilbar, sodass nun eine Zahl doppelt, insgesamt also 4 Zahlen markiert sind. Schließlich markieren wir die beiden Vielfachen von 5, das sind n und n+5. Wieder ist eines der beiden Vielfachen auch Vielfaches von 2, sodass mindestens eine schon markierte Zahl erneut markiert wird. Insgesamt sind nun höchstens 5 Zahlen markiert, und es gibt (mindestens) eine Zahl, die nicht markiert wurde. Für diese gilt:

– Sie kann nicht die Zahl 1 sein, weil sie dann die kleinste der sechs Zahlen wäre. Diese ist aber laut Fallunterscheidung durch 5 teilbar.

– Sie ist durch keine der Primzahlen 2, 3, 5 teilbar, muss also – weil sie größer als 1 ist – durch eine andere Primzahl teilbar sein. Alle solchen Primzahlen sind größer als 6. Nach Feststellung (E) teilt diese Primzahl wie gefordert von den sechs aufeinander folgenden Zahlen n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5 nur die eine unmarkierte Zahl.

Bemerkung: Natürlich kann in Fall 1 geschlossen werden, dass die Zahl n+5 nicht durch 5 teilbar ist. Für den Beweisgang ist dieses Argument aber nicht nötig.

Beweisvariante 2: Zunächst betrachten wir die Reste der sechs Zahlen bei Division durch 6. Offensichtlich kommt jeder der Reste 0, 1, 2, 3, 4, 5 genau einmal vor. Nun betrachten wir die beiden Zahlen, deren Rest 1 bzw. 5 ist. Diese haben folgende Eigenschaften:

- Sie sind beide nicht durch 2 teilbar, da solche Zahlen einen der Reste 0, 2 oder 4 haben.
- Sie sind beide nicht durch 3 teilbar, da solche Zahlen einen der Reste 0 oder 3 haben.
- Höchstens eine der beiden Zahlen ist durch 5 teilbar, da die Differenz dieser beiden Zahlen entweder 5–1 = 4 oder (6+1)–5 = 2, also in keinem Fall 5 ist.

Damit ist mindestens eine der Zahlen weder durch 2, noch durch 3, noch durch 5 teilbar.

Diese Zahl ist dann entweder die 1 oder sie ist durch eine von 2, 3 und 5 verschiedene Primzahl teilbar. Im ersten Fall liegen die sechs aufeinander folgenden Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 vor; hier erfüllt offensichtlich die Primzahl 5 die geforderte Eigenschaft. Im zweiten Fall erfüllt ein Primteiler dieser Zahl die geforderte Eigenschaft: Da dieser nicht 2, 3 oder 5 ist, ist er eine Primzahl, die größer als 5 ist. Diese Primzahl teilt sicher höchstens eine von sechs aufeinander folgenden ganzen Zahlen, also nur die eine betrachtete Zahl.

Beweisvariante 3 (mit Verallgemeinerung der Aussage für ganze Zahlen): Eine Zahl, die durch keine der Zahlen 2, 3 oder 5 teilbar ist, nennen wir Sperrzahl. Ferner sei der Rest einer vorgegebenen ganzen Zahl n bei Division durch 30 mit n' bezeichnet. Es ist also $n = k\cdot 30 + n'$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und $0 \le n' < 30$; bekanntlich ist nach Vorgabe von n die Zahl n' eindeutig bestimmt.

Weil 30 ein gemeinsames Vielfaches der Zahlen 2, 3 und 5 ist, lassen die Zahlen n und n' bei Division durch 2 den gleichen Rest, ebenso bei Division durch 3 oder durch 5. Damit befindet sich unter den sechs aufeinander folgenden ganzen Zahlen n, $n+1$, $n+2$, ..., $n+5$ genau dann eine Sperrzahl, wenn sich unter n', $n'+1$, $n'+2$, ..., $n'+5$ eine befindet.

Nun betrachten wir im Intervall [0,30[die Zahlen 1, 7, 13, 17, 23, 29. Einfaches Nachrechnen zeigt, dass dies alles Sperrzahlen sind und dass die Differenz zwischen zwei benachbarten solchen Sperrzahlen höchstens 6 ist. Da zusätzlich die kleinste dieser Sperrzahlen kleiner als 6 ist und die größte dieser Sperrzahlen gleichzeitig die größte ganze Zahl aus [0,30[ist, befindet sich unter jeden sechs aufeinander folgenden ganzen Zahlen n', $n'+1$, $n'+2$, ..., $n'+5$ mit $0 \le n' < 30$ mindestens eine Sperrzahl; nach obiger Vorbemerkung also auch unter jeden sechs aufeinander folgenden Zahlen n, $n+1$, $n+2$, ..., $n+5$ für jede beliebige Zahl $n \in \mathbb{Z}$. Nun unterscheiden wir 2 Fälle:

Fall 1: Unter den sechs Zahlen ist eine Sperrzahl, die nicht den Wert 1 oder –1 hat: Dann besitzt sie nach Konstruktion einen Primteiler, der nicht 2, nicht 3 und nicht 5, also größer als 6 ist. Dieser Primteiler besitzt die geforderte Eigenschaft, da von sechs aufeinander folgenden ganzen Zahlen höchstens eine durch eine vorgegebene Zahl größer als sechs teilbar ist.

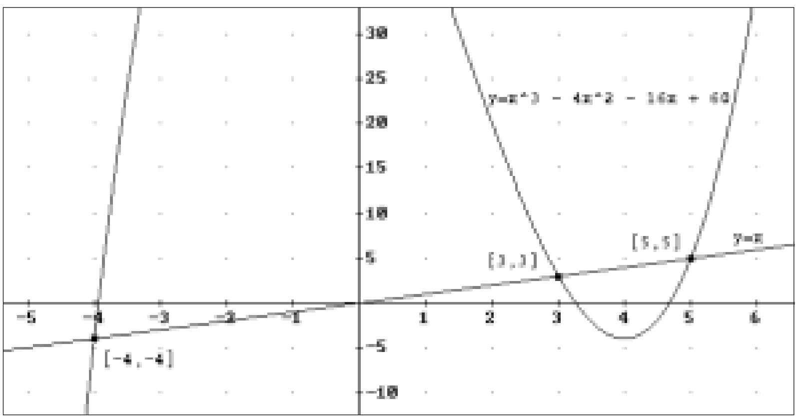
Fall 2: Jede Sperrzahl unter den sechs Zahlen hat den Wert 1 oder –1: *Entweder* liegen die sechs aufeinander folgenden Zahlen 1, 2, ..., 6 oder –6, –5, ..., –1 vor, dann erfüllt offensichtlich die Primzahl 5 die geforderte Eigenschaft. *Oder* eine der sechs aufeinander folgenden ganzen Zahlen ist die Zahl 0, dann erfüllt z.B. die Primzahl 7 die geforderte Eigenschaft, da 7 Teiler von 0 ist und von sechs aufeinander folgenden Zahlen sicher höchstens eine durch 7 teilbar ist.

Aufgabe 2: Man ermittle alle Tripel (x,y,z) ganzer Zahlen, die jede der folgenden Gleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned} &(1)\quad x^3 - 4x^2 - 16x + 60 = y\\ &(2)\quad y^3 - 4y^2 - 16y + 60 = z\\ &(3)\quad z^3 - 4z^2 - 16z + 60 = x \end{aligned}$$

Ergebnis: Die Tripel (–4,–4,–4), (3,3,3) und (5,5,5) und nur diese erfüllen die drei Gleichungen.

1. Beweis (Ausschließen aller Tripel des $\mathbb{Z}^3$ bis auf endlich viele Möglichkeiten, Überprüfen dieser endlich vielen Möglichkeiten "von Hand"): Wir betrachten die Funktion $f: x \mapsto x^3 - 4x^2 - 16x + 60$.



Das vorgegebene Gleichungssystem lässt sich dann schreiben als

$$\begin{aligned} f(x) &= y \quad (1'),\\ f(f(x)) &= z \quad (2'),\\ f(f(f(x))) &= x \quad (3'). \end{aligned}$$

Da die Koeffizienten des Polynoms ganzzahlig sind, sind mit x auch stets $y = f(x)$ und $z = f(f(x))$ ganzzahlig; also führt jede ganzzahlige Lösung von (3') zu einem ganzzahligen Lösungstripel des gegebenen Gleichungssystems; umgekehrt ist in jedem Lösungstripel (x_0,y_0,z_0) das Element x_0 eine Lösung von (3'). Es genügt also, alle ganzzahligen Lösungen x_0 von (3') zu bestimmen und hieraus $y_0 := f(x_0)$ und $z_0 := f(f(x_0))$ zu berechnen. Hierzu benützen wir zwei Hilfssätze, die wir weiter unten beweisen:

(A) Für $x > 5$ ist $f(x) > x$; für $x < -4$ ist $f(x) < x$.

(B) Für $-4 \leq x \leq 5$ sind $x_1 = -4$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$ und nur diese Werte ganzzahlige Lösungen von (3').

Wäre nun ein $x > 5$ Lösung, erhielte man nach mehrfacher Anwendung von (A) den Widerspruch $5 < x < f(x) < f(f(x)) < f(f(f(x))) = x$; analog führt eine Lösung $x < -4$ zum Widerspruch $-4 > x > f(x) > f(f(x)) > f(f(f(x))) = x$.

Für jede Lösung x ist also $-4 \leq x \leq 5$. Nach (B) sind also $x_1 = -4$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$ und nur diese Lösungen von (3'). Rechnung im Beweis zu (B) zeigt, dass für diese Werte stets $x = f(x) = f(f(x))$ gilt, also sind die Tripel (–4,–4,–4), (3,3,3), (5,5,5) und nur diese Lösungen des vorgegebenen Gleichungssystems.

Beweis zu (A): Sei $g(x) := f(x) - x = x^3 - 4x^2 - 17x + 60$. Einfaches Ausmultiplizieren bestätigt für alle $x \in \mathbb{R}$ die Identität $(x+4)(x-3)(x-5) = g(x)$. Für $x > 5$ sind dann auf der linken Seite die Ausdrücke in allen drei Klammern positiv und damit auch $g(x) = f(x) - x$, also $f(x) > x$. Für $x < -4$ sind alle drei Klammern negativ und damit auch $f(x) - x$, es ist also $f(x) < x$.

Bemerkung: Wie der 4. Beweis zeigt, kann diese Faktorisierung für einen sehr kurzen gesamten Beweis verwendet werden.

Beweis zu (B): Wir berechnen zunächst $f(x)$ für alle ganzzahligen x mit $-4 \leq x \leq 5$:

$$
\begin{array}{lllr}
f(-4) & = (-4)^3 - 4\cdot(-4)^2 - 16\cdot(-4) + 60 & = & -4 \\
f(-3) & = (-3)^3 - 4\cdot(-3)^2 - 16\cdot(-3) + 60 & = & +45 \\
f(-2) & = (-2)^3 - 4\cdot(-2)^2 - 16\cdot(-2) + 60 & = & 68 \\
f(-1) & = (-1)^3 - 4\cdot(-1)^2 - 16\cdot(-1) + 60 & = & 71 \\
f(0) & = 0 + 60 & = & 60 \\
f(1) & = 1^3 - 4\cdot 1^2 - 16\cdot 1 + 60 & = & 41 \\
f(2) & = 2^3 - 4\cdot 2^2 - 16\cdot 2 + 60 & = & 20 \\
f(3) & = 3^3 - 4\cdot 3^2 - 16\cdot 3 + 60 & = & 3 \\
f(4) & = 4^3 - 4\cdot 4^2 - 16\cdot 4 + 60 & = & -4 \\
f(5) & = 5^3 - 4\cdot 5^2 - 16\cdot 5 + 60 & = & 5
\end{array}
$$

Für alle $x \in \{-4,3,5\}$ ist $x = f(x)$ und damit auch $x = f(x) = f(f(x)) = f(f(f(x)))$; damit sind diese drei Werte Lösungen von (3').

Alle anderen Werte mit $-4 \leq x \leq 5$ führen zu keiner weiteren Lösung: Für $x = 4$ ist $f(f(f(x))) = f(f(-4)) = f(-4) = -4 \neq x$; für alle restlichen ganzzahligen $x \in [-4,5]$ zeigt obige Rechnung, dass $f(x) \notin [-4,5]$, nach (A) also auch $f(f(x)) \notin [-4,5]$ und $f(f(f(x))) \notin [-4,5]$, insbesondere $x \neq f(f(f(x)))$.

Bemerkung: Hiermit ist die Existenz von weiteren *reellen* Lösungen nicht ausgeschlossen, vgl. Schlussbemerkung.

2. Beweis: Sei $P(x) := x^3 - 4x^2 - 16x + 60$ und (x_0,y_0,z_0) ein ganzzahliges Lösungstripel des vorgegebenen Gleichungssystems. Dann ist offensichtlich $y_0 = P(x_0)$ und $z_0 = P(y_0)$, also x_0 eine ganzzahlige Lösung der Gleichung $P(P(P(x))) = x$.

Wie Hilfssatz (1) (s.u.) zeigt, ist in diesem Fall x_0 sogar ganzzahlige Lösung der Gleichung $P(x) = x$ und damit auch $y_0 := P(x_0) = x_0$ und $z_0 := P(y_0) = P(x_0) = x_0$. Umgekehrt führt auch jede ganzzahlige Lösung x_0 der Gleichung $P(x) = x$ mit den hieraus eindeutig bestimmten $y_0 := P(x_0) = x_0$ und $z_0 := P(y_0) = P(x_0) = x_0$ zu einem ganzzahligen Lösungstripel $(x_0,y_0,z_0) = (x_0,x_0,x_0)$ des vorgegebenen Gleichungssystems. Es genügt also, alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung $P(x) = x$ zu bestimmen. Dies ist recht einfach:

Es ist $x = P(x) \Leftrightarrow P(x) - x = 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 - 17x + 60 = 0 \Leftrightarrow (x+4)(x-3)(x-5) = 0$, also sind $x_1 = -4$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$ drei ganzzahlige Lösungen. Es gibt keine weiteren Lösungen, da eine Gleichung dritten Grades bekanntlich höchstens drei Nullstellen hat. Also sind (–4,–4,–4), (3,3,3), (5,5,5) und nur diese ganzzahlige Lösungen des gegebenen Gleichungssystems.

Dass es keine weiteren Lösungen, d.h. solche mit $x \neq P(x)$ gibt, zeigt der folgende verallgemeinernde

Hilfssatz (1): Sei $Q(x)$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten und x_0 eine ganzzahlige Lösung der Gleichung $Q(Q(Q(x))) = x$. Dann ist auch $Q(x_0) = x_0$.

Beweis des Hilfssatzes: Wir schreiben $Q(x) := A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + A_{n-2}x^{n-2} + ... + A_1 x^1 + A_0$ mit $A_i \in \mathbb{Z}$ ($i = 0,1,2,...,n$) und $y_0 := Q(x_0)$, $z_0 := Q(y_0)$.

Für $n = 0$ ist $Q(x) = A_0 = Q(Q(Q(x)))$ für alle $x \in \mathbb{R}$, setzt man $x_0 := A_0$, folgt sofort die Behauptung. Für $n \geq 1$ gelten die Gleichungen

$$\begin{array}{lrcl}
(1) & A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + A_{n-2}x^{n-2} + ... + A_1 x^1 + A_0 & = & y \\
(2) & A_n y^n + A_{n-1}y^{n-1} + A_{n-2}y^{n-2} + ... + A_1 y^1 + A_0 & = & z \\
(3) & A_n z^n + A_{n-1}z^{n-1} + A_{n-2}z^{n-2} + ... + A_1 x^1 + A_0 & = & x;
\end{array}$$

hieraus folgt durch paarweises Subtrahieren

$$\begin{array}{lrcl}
(1') & A_n(x^n - y^n) + A_{n-1}(x^{n-1} - y^{n-1}) + A_{n-2}(x^{n-2} - y^{n-2}) + ... + A_1(x^1 - y^1) & = & (y-z) \\
(2') & A_n(y^n - z^n) + A_{n-1}(y^{n-1} - z^{n-1}) + A_{n-2}(y^{n-2} - z^{n-2}) + ... + A_1(y^1 - z^1) & = & (z-x) \\
(3') & A_n(z^n - x^n) + A_{n-1}(z^{n-1} - x^{n-1}) + A_{n-2}(z^{n-2} - x^{n-2}) + ... + A_1(z^1 - x^1) & = & (x-y).
\end{array}$$

Für alle $n \geq 1$ ist bekanntlich $(a^n - b^n) = (a-b)(a^{n-1}b^0 + a^{n-2}b^1 + ... + a^1 b^{n-1} + a^0 b^{n-1})$; wir können also in jeder Zeile ausklammern und erhalten

$$\begin{array}{lrcl}
(1'') & (x-y) \cdot [A_n(....) + A_{n-1}(....) + A_{n-2}(....) + ... + A_1] & = & (y-z) \\
(2'') & (y-z) \cdot [A_n(....) + A_{n-1}(....) + A_{n-2}(....) + ... + A_1] & = & (z-x) \\
(3'') & (z-x) \cdot [A_n(....) + A_{n-1}(....) + A_{n-2}(....) + ... + A_1] & = & (x-y),
\end{array}$$

dabei nehmen die Ausdrücke in jeder runden und damit auch in jeder eckigen Klammer nur ganzzahlige Werte an. Für die eckigen Klammern in Zeile (i'') schreiben wir k_i (i=1,2,3) und setzen in (3'') der Reihe nach (2'') und (1'') ein und erhalten so: $(x-y) = (z-x)\cdot k_3 = (y-z)\cdot k_2 k_3 = (x-y)\cdot k_1 k_2 k_3$, $k_i \in \mathbb{Z}$.

Gäbe es nun eine Lösung x_0 der Gleichung $Q(Q(Q(x))) = x$ mit $Q(x_0) \neq x_0$, könnten wir durch $(x-y) \neq 0$ dividieren und erhielten so $k_1 k_2 k_3 = 1$. Da jedes k_i (i=1,2,3) ganzzahlig ist, folgt aus $k_1 k_2 k_3 = 1$ sofort $|k_i|$=1 und damit $0 \neq |x-y| = |z-x| = |y-z|$. Hieraus folgt über $x = z \pm |x-z| = z \pm |x-y|$ und gleichzeitig $y = z \pm |y-z| = z \pm |x-y|$ sofort $|x-y| = 0$ oder $|x-y| = 2\cdot|x-y|$, was beides wie gewünscht im Widerspruch zu $(x-y) \neq 0$ steht.

Bemerkungen: Der Hilfssatz gilt für beliebige Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten und jede Gleichung der Form $Q(Q(...Q(x)...)) = x$ mit $x \in \mathbb{Z}$, bei der das Polynom Q ungeradzahlig oft iteriert wird. Falls Q geradzahlig oft iteriert wird, kann es Lösungen geben, bei denen $x \neq Q(x)$ ist; dann gibt es aber im Tupel [x, $Q(x)$, $Q(Q(x))$, $Q(Q(Q(x)))$, ...] nicht–benachbarte Elemente mit gleichem Wert.

3. Beweis: (Verwendung von Faktorisierungen): Die Gleichung (1) des gegebenen Gleichungssystems lässt sich äquivalent umformen zu $x^3 - 4x^2 - 16x + 60 = y \Leftrightarrow x^3 - 16x - 4x^2 + 64 = y + 4 \Leftrightarrow x(x^2 - 16) - 4(x^2 - 16) = y + 4 \Leftrightarrow (x-4)(x^2 - 16) = y + 4 \Leftrightarrow (x-4)^2(x+4) = y + 4$. Analoges Umformen der beiden anderen Gleichungen führt zum äquivalenten Gleichungssystem

$$\begin{array}{lrcl}
(1') & (x-4)^2(x+4) & = & y + 4 \\
(2') & (y-4)^2(y+4) & = & z + 4 \\
(3') & (z-4)^2(z+4) & = & x + 4.
\end{array}$$

Mann erkennt sofort, dass das Tripel $(x,y,z)=(-4,-4,-4)$ in jeder der Gleichungen beide Seiten verschwinden lässt, also eine ganzzahlige Lösung des vorgegebenen Gleichungssystems ist.

In den restlichen Lösungstripeln hat also wenigstens ein Element des Tripels nicht den Wert –4. Dann haben aber auch die beiden anderen Elemente nicht den Wert –4: Sei z.B. $x \neq -4$. Dann folgt aus Gleichung (3') $x+4 \neq 0 \Rightarrow z+4 \neq 0$, aus Gleichung (2') $z+4 \neq 0 \Rightarrow y+4 \neq 0$. (Falls $z \neq -4$ oder $y \neq -4$, argumentieren wir gleich, beginnen aber mit Gleichung (2') bzw. mit (1').)

Für jedes Lösungstripel (x,y,z) gilt (wir setzen das Produkt aller linken Seiten und das Produkt aller rechten Seiten gleich):

$$(x-4)^2(x+4)\ (y-4)^2(y+4)\ (z-4)^2(z+4) = (x+4)(y+4)(z+4)\ .$$

Im Rahmen der augenblicklichen Überlegung nimmt kein Element des Tripels (x,y,z) den Wert –4 an, also können wir durch die rechte Seite dividieren und es folgt

$$(x-4)^2 \cdot (y-4)^2 \cdot (z-4)^2 = 1.$$

Bei ganzzahligen x,y,z ist jeder Faktor auf der linken Seite als Quadrat einer ganzen Zahl wieder ganz und nicht negativ. Ein Produkt dreier ganzer nicht–negativer Zahlen hat genau dann den Wert 1, wenn jeder Faktor den Wert 1 hat, damit ist z.B. $(x-4)^2 = 1$, also $|x-4| = 1$, also ist $x = 3$ oder $x = 5$ eine notwendige Bedingung für ein von $(-4,-4,-4)$ verschiedenes ganzzahliges Lösungstripel. $x = 3$ führt nach Einsetzen in (1') zu $y = 3$, in (2') zu $z = 3$. Einsetzen in (3') bestätigt, dass (3,3,3) tatsächlich ganzzahliges Lösungstripel ist. Analog führt $x = 5$ zum ganzzahligen Lösungstripel (5,5,5).

$(-4,-4,-4)$, (3,3,3), (5,5,5) und nur diese sind also ganzzahlige Lösungstripel.

Bemerkung: Die Umwandlungen der Gleichungen zu $(x-3)(x^2-x-19) = y-3$ usw. führt in analogen Schritten zum Ziel, ebenfalls die Umwandlung zu $(x-5)(x^2+x-11) = y-5$.

4. Beweis (Verwendung von Faktorisierungen): Einfaches Ausmultiplizieren zeigt für alle $a\in\mathbb{R}$ die Identität $(a+4)(a-3)(a-5) = [a^3 - 4a^2 - 16a + 60] - a$. Also ist das vorgegebene Gleichungssystem äquivalent zu

$$\begin{array}{lllll}
(X) & (x+4)(x-3)(x-5) & = & (y-x) \\
(Y) & (y+4)(y-3)(y-5) & = & (z-y) \\
(Z) & (z+4)(z-3)(z-5) & = & (x-z)
\end{array}$$

Eines der drei Elemente (x,y,z) eines Lösungstripels ist nicht kleiner als die beiden anderen, o.B.d.A. sei dies x. (Falls x nicht diese Eigenschaft hat, benennen wir ein- oder zweimal zyklisch um: $x \to y$, $y \to z$ und $z \to x$; dabei bleibt das Gleichungssystem unverändert, lediglich die Gleichungen werden umnummeriert.) Es ist also $x \geq y$ und $x \geq z$, und damit die rechte Seite von Gleichung (X) nicht positiv, die rechte Seite von Gleichung (Z) nicht negativ.

Die Annahme $x \notin \{-4,3,5\}$, also $x > 5$ oder $x \in \{-3,-2,-1,0,1,2\}$ oder $x < -4$ oder $x = 4$, lässt sich dann schnell zu einem Widerspruch führen:

Wäre $x > 5$, so wären in Gleichung (X) alle Faktoren der linken Seite und damit die linke Seite überhaupt positiv, die rechte aber nicht.

Wäre $-4 < x < 3$, also $x \in \{-3,-2,-1,0,1,2\}$, so wären in Gleichung (X) auf der linken Seite die beiden Faktoren $(x-3)$ und $(x-5)$ negativ, der Faktor $(x+4)$ positiv, die ganze linke Seite also positiv, die rechte aber nicht.

Wäre $x < -4$, also $z \leq x < -4$, so wären in Gleichung (Z) alle drei Faktoren der linken Seite und damit die linke Seite überhaupt negativ, die rechte aber nicht.

Wäre $3 < x < 5$ also $x = 4$, führte Gleichung (X) zu $8\cdot 1\cdot(-1) = (y-4)$, also $y = -4$; Gleichung (Y) führte dann zu $0 = (z-y)$, also $z = y = -4$, und Gleichung (Z) zu $0 = (x-z)$, also zum Widerspruch $0 = +4 - (-4) = 8$.

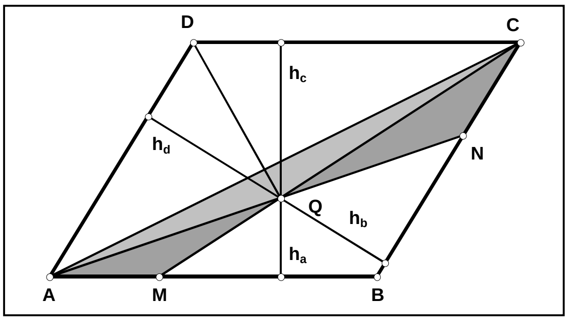
Es bleibt $x \in \{-4,3,5\}$, für solche x verschwindet die linke Seite von (X), damit ist $x = y$; Gleichung (Y) ergibt dann sofort $x = y = z$. Umgekehrt ist sofort einsichtig, dass jedes Tripel $(x,y,z) \in \{(-4,-4,-4), (3,3,3), (5,5,5)\}$ in jeder Gleichung beide Seiten verschwinden lässt, also ein ganzzahliges Lösungstripel ist.

Damit sind die Tripel $(-4,-4,-4)$, (3,3,3) (5,5,5) und nur diese ganzzahlige Lösungstripel des gegebenen Gleichungssystems.

Bemerkung: Berechnungen mit *DERIVE* lassen vermuten: Das Gleichungssystem hat 27 reelle Lösungstripel $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, diese erhält man aus den 27 Lösungen der Gleichung 27.ten Grades $x = f(f(f(x)))$. Von diesen 27 Tripeln enthalten genau 3 ganzzahlig Elemente, diese sind die einzigen mit der Eigenschaft $x=y=z$.)

Aufgabe 3: In einem Parallelogramm ABCD werden auf den Seiten AB und BC die Punkte M und N so gewählt, dass sie mit keinem Eckpunkt zusammenfallen und die Strecken AM und NC gleich lang sind. Der Schnittpunkt der Strecken AN und CM wird mit Q bezeichnet.

Man beweise, dass DQ den Winkel ADC halbiert.

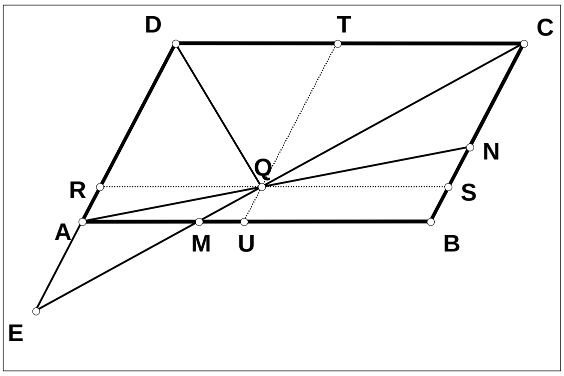


1. Beweis (Flächenbetrachtung): Der Flächeninhalt von ΔAQC lässt sich einerseits als Differenz der Flächeninhalte der Dreiecke ΔAMC und ΔAMQ darstellen, andererseits auch als Differenz der Flächeninhalte der Dreiecke ΔCNA und ΔCNQ.

Wir bezeichnen die Abstände des Punktes Q von den Seiten AB, BC, CD und DA mit h_a, h_b, h_c bzw. h_d und erhalten so

$\frac{1}{2}\overline{AM}\cdot(h_a+h_c) - \frac{1}{2}\overline{AM}\cdot h_a = \frac{1}{2}\overline{CN}\cdot(h_b+h_d) - \frac{1}{2}\overline{CN}\cdot h_b$ oder $\frac{1}{2}\overline{AM}\cdot h_c = \frac{1}{2}\overline{CN}\cdot h_d$. Mit der Voraussetzung $\overline{AM}=\overline{CN} \neq 0$ folgt sofort $h_c = h_d$. Damit hat Q den gleichen Abstand zu DA und DC, liegt also auf der Winkelhalbierenden von $\angle$ADC.

2. Beweis : Der Schnittpunkt der Geraden (MC) und (AD) sei mit E bezeichnet; mit R, S, T, U seien die Schnittpunkte der Seitenparallelen durch Q mit AD, BC, CD bzw. BA bezeichnet. Die Parallelen erzeugen u.a. die Parallelogramme TQSC und RQUA, es ist also $\overline{TQ}=\overline{CS}$ und $\overline{AU} = \overline{RQ}$.

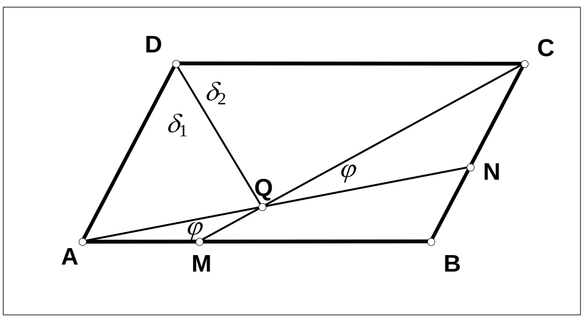


Bekanntlich sind die Diagonalen in einer Raute gleichzeitig Winkelhalbierende; es genügt also zu zeigen, dass das Parallelogramm DRQT eine Raute ist, d.h. dass $\overline{RQ}=\overline{TQ}$ oder einfacher $\overline{RQ}=\overline{CS}$.Mit Strahlensatz lesen wir aus der Figur ab:

$$\begin{aligned}\overline{RQ}:\overline{AM} &= \overline{ER}:\overline{EA} \quad &&\text{(Zentrum E, AM}\|\text{RQ)}\\ &= \overline{CS}:\overline{CN} &&\text{(Zentrum Q, ER}\|\text{CS).}\end{aligned}$$

Multiplikation mit $\overline{AM} = \overline{CN}$ ergibt sofort $\overline{RQ} = \overline{CS}$.

3. Beweis (Sinussatz): Die Weite der Scheitelwinkel $\angle$AQM und $\angle$NQC bezeichnen wir mit φ , die der Winkel $\angle$ADQ und $\angle$DQC mit δ_1 bzw. δ_2; es ist dann zu zeigen, dass $\delta_1 = \delta_2$ gilt.



Zusammen mit der Voraussetzung $\overline{MU} = \overline{CN}$ erhält man aus den Dreiecken ΔAMQ und ΔCNQ durch Anwendung des Sinussatzes

$$\frac{\overline{AQ}}{\sin(\angle AMQ)} = \frac{\overline{AM}}{\sin(\varphi)} = \frac{\overline{CN}}{\sin(\varphi)} = \frac{\overline{CQ}}{\sin(\angle QNC)}$$

oder $\frac{\overline{AQ}}{\overline{CQ}} = \frac{\sin(\angle AMQ)}{\sin(\angle QNC)}$ (1).

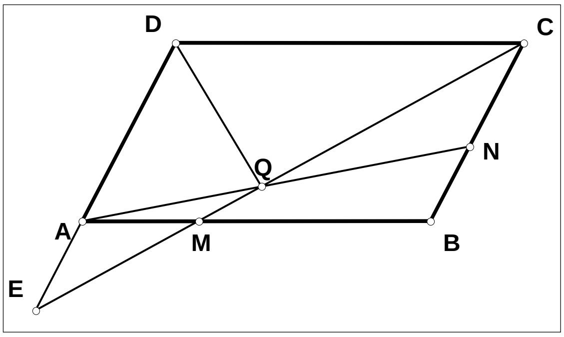
Da AD||BC, ist $\angle$QAD = $\angle$QNB = 180° – $\angle$CNQ; im ΔDAQ ergibt die Anwendung des Sinussatzes also $\frac{\overline{AQ}}{\overline{DQ}} = \frac{\sin(\delta_1)}{\sin(\angle QAD)} = \frac{\sin(\delta_1)}{\sin(\angle QNC)}$ (2); analoge Betrachtung in ΔDCQ ergibt $\frac{\overline{CQ}}{\overline{DQ}} = \frac{\sin(\delta_2)}{\sin(\angle AMQ)}$ (3).

Nun dividieren wir (2) durch (3) und erhalten $\frac{\overline{AQ}}{\overline{CQ}} = \frac{\sin(\delta_1)\cdot\sin(\angle AMQ)}{\sin(\angle QNC)\cdot\sin(\delta_2)}$; ein Vergleich mit (1) liefert schließlich $\dfrac{\sin(\delta_1)}{\sin(\delta_2)} = 1$ oder äquivalent $\sin(\delta_1) = \sin(\delta_2)$. Da offensichtlich $0° < \delta_1 + \delta_2 < 180°$, folgt hieraus wie gewünscht $\delta_1 = \delta_2$.

Die folgenden Beweise benützen den teilweise im Schulstoff bekannten, hier nicht bewiesenen

Hilfssatz: In jedem Dreieck ist eine Gerade durch eine Ecke genau dann Winkelhalbierende, wenn diese die der Ecke gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt.

4. Beweis (mit Strahlensatz, Rückführung auf den Hilfssatz): Die Gerade (MC) schneidet (AD) in einem Punkt, den wir mit E bezeichnen. Mit Strahlensatz lesen wir aus der Figur ab:



$\overline{ED}:\overline{DC} = \overline{EA}:\overline{AM}$ (Zentrum E und AM||DC)

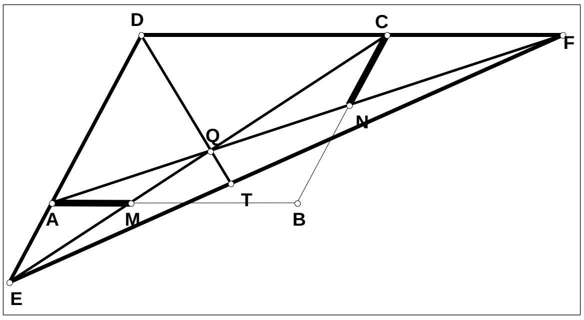
$= \overline{EA}:\overline{CN}$ (nach Vor. ist $\overline{AM} = \overline{CN}$)

$= \overline{QE}:\overline{QC}$ (Zentrum Q und AE||NC).

Also teilt im ΔEDC der Punkt Q die Strecke EC im Verhältnis der anliegenden Seiten, also ist DQ Winkelhalbierende.

5. Beweis (Satz von Ceva): Die Geraden (CM) und (AN) schneiden die Gerade (DA) bzw. (DC) in Punkten, die wir mit E bzw. F bezeichnen; den Schnittpunkt von DQ mit EF bezeichnen wir mit T.

Im ΔEDF sind dann EC, FA und DT drei Transversalen, die durch den gemeinsamen Punkt Q gehen; nach Satz von Ceva ist dann $\overline{ET}\cdot\overline{FC}\cdot\overline{DA} = \overline{TF}\cdot\overline{CD}\cdot\overline{AE}$. Nach Strahlensatz (Zentrum F und AD||CN)



ist $\overline{DA} = \overline{CN}\cdot\dfrac{\overline{DF}}{\overline{FC}}$, analog ist $\overline{DC} = \overline{AM}\cdot\dfrac{\overline{DE}}{\overline{AE}}$ (Zentrum E und DC||AM). Einsetzen ergibt

$\overline{ET}\cdot\overline{FC}\cdot\overline{DA} = \overline{TF}\cdot\overline{CD}\cdot\overline{AE}$

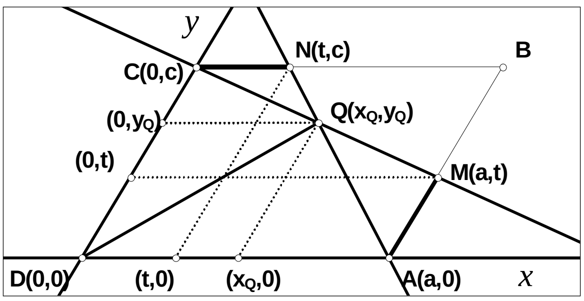
$\Leftrightarrow \quad \overline{ET}\cdot\overline{FC}\cdot\overline{CN}\cdot\dfrac{\overline{DF}}{\overline{FC}} = \overline{TF}\cdot\overline{AM}\cdot\dfrac{\overline{DE}}{\overline{AE}}\cdot\overline{AE}$;

dies kürzt sich mit $\overline{AM} = \overline{CN}$ sofort zu $\overline{ET}\cdot\overline{DF} = \overline{TF}\cdot\overline{DE}$ oder zu $\overline{ET}:\overline{FT} = \overline{DE}:\overline{DF}$.

Also teilt im ΔEDF der Punkt T die Strecke EF im Verhältnis der anliegenden Seiten, also ist (DT) bzw. (DQ) Winkelhalbierende.

Bemerkung: Also gilt auch die Umkehrung: Im Parallelogramm ABCD halbiert DQ genau dann den Winkel $\angle$ADC, wenn (AQ) und (CQ) gleiche Abschnitte auf den Seiten CB bzw. AB ausschneiden.

6. Beweis (mit Koordinaten – eigentlich mit Strahlensatz und Seiten-Parallelen durch M,N,Q): Wir legen das Parallelogramm so in ein schiefwinkliges Koordinatensystem, dass der Ursprung mit D und die beiden Achsen mit DA bzw. DC zusammenfallen; wir wählen auf beiden Achsen Einheiten gleicher Länge. Die Winkelhalbierende wird dann durch die Gleichung $y = x$ beschrieben; es genügt also zu zeigen, dass $x_Q = y_Q$.



Wir können reelle Zahlen $a, c > 0$ und $t \in]\,0, \min(a,c)\,[$ so wählen, dass die beteiligten

Punkte die Koordinaten A(a,0), C(0,c), M(a,t) und N(t,c) haben. Die Gerade (AN) wird dann beschrieben durch die Koordinatengleichung $(a-t)\cdot y = (a-x)\cdot c$ oder $c\cdot x + (a-t)\cdot y = a\cdot c$ (Verifikation z.B. durch Einsetzen der Koordinaten von A und N oder Herleitung mit Strahlensatz mit Zentrum A); aus Symmetriegründen die Gerade (CM) durch die Gleichung $(c-t)\cdot x + a\cdot y = a\cdot c$ (man vertausche x mit y sowie a mit c). Für die Koordinaten (x_Q, y_Q) eines möglichen Schnittpunktes Q folgt aus der Subtraktion der beiden Gleichungen sofort $t\cdot x_Q - t\cdot y_Q = 0$; und weil $t \neq 0$, sogar $x_Q = y_Q$.

Bemerkung: Lässt man für t alle reellen Werte zu, dient obige Argumentation als Beweisgrundlage für folgende

Verallgemeinerung: Zu einem Parallelogramm ABCD werden auf den Geraden (AB) und (BC) die Punkte M und N so gewählt, dass deren orientierte Entfernungen zu A und C gleich lang sind; dabei seien die Entfernungen von B zu A und zu C beide positiv. Der Schnittpunkt der Geraden (AN) und (CM) sei – falls existent und eindeutig bestimmt – mit Q bezeichnet. Dann halbiert DQ den Winkel $\angle$ADC.

Zum Beweis wäre noch zu ergänzen: Durchläuft t alle reellen Zahlen, so durchlaufen M und N alle möglichen Punkte auf (AB) bzw. (CB). Falls $t = 0$, ist A=M und C=N, dann fallen die beiden Geraden (AN) und (CM) zusammen. Falls $t = a+c$, sind die beiden Geraden parallel und es existiert kein Schnittpunkt. Für alle anderen t gibt es einen eindeutig bestimmten Schnittpunkt, dies zeigt die Rechnung

$$\begin{vmatrix} c & (a-t) \\ (c-t) & a \end{vmatrix} = 0 \iff ca-(c-t)(a-t) = 0 \iff t\,(t-a-c) = 0 \iff t=0 \text{ oder } t = a+c.$$

Aufgabe 4: Man gebe alle positiven ganzen Zahlen an, die sich nicht in der Form $\frac{a}{b}+\frac{a+1}{b+1}$ darstellen lassen, wobei a und b positive ganze Zahlen sind.

Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.

Ergebnis: Eine positive ganze Zahl n lässt sich genau dann nicht in der geforderten Art darstellen, wenn $n-2$ keinen ungeraden ganzzahligen Teiler besitzt, der größer als 1 ist.

Alternative Formulierungen: Die Zahl 1 sowie alle Zahlen der Form $2+2^k$ (k = 0,1,2,3,...) sind genau diejenigen positiven ganzen Zahlen, die sich nicht in der geforderten Form darstellen lassen.

Eine positive ganze Zahl n lässt sich genau dann nicht in der geforderten Art darstellen, wenn $n = 1$ ist oder wenn $n-2$ eine Zweierpotenz ist.

1. Beweis Teil 1 ("⇒"): Sei die positive ganze Zahl n in der geforderten Art darstellbar. Es gibt also positive ganze Zahlen a und b, sodass $n = \frac{a}{b}+\frac{a+1}{b+1}$. Dann können wir verschieden schließen:

Variante 1: Umformung ergibt $n = \frac{a}{b}+\frac{a+1}{b+1} = \frac{a(b+1)+b(a+1)}{b(b+1)} = \frac{b(2a+1)+a}{b(b+1)}$.

Da n ganzzahlig ist, ist auch der Bruch ganzzahlig, d.h. der im Nenner enthaltene Faktor b lässt sich kürzen, ist also im Zähler enthalten. Der Zähler besteht aus der Summe zweier Zahlen, von denen eine den Faktor b enthält; damit muss ihn auch der zweite Summand, also a enthalten. Damit ist $r := \frac{a}{b}$ eine ganze Zahl; und da n ganzzahlig, auch $s := \frac{a+1}{b+1}$. (**Oder**: Im mittleren Bruch enthält der erste Summand den Faktor (b+1) des Nenners, der zweite Summand den Faktor b des Nenners. Da $\mathrm{ggT}(b,b+1) = 1$, enthält a den Faktor b und (a+1) den Faktor (b+1).)

Es ist also $rb = a$ und $s(b+1) = a+1$, also $rb - s(b+1) = -1$ oder $(r-s)b + 1 = s$ und auch $(r-s)b + 1 + (r-s) = r$. Diese Darstellungen von s und r verwenden wir bei der Umformung $n = \frac{a}{b}+\frac{a+1}{b+1} = r + s = (r-s)b + 1 + (r-s) + (r-s)b + 1 = (r-s)(2b+1) + 2$, also $n-2 = (r-s)(2b+1)$. Mit r und s ist auch $(r-s)$ ganz, also enthält die Zahl $n-2$ den offensichtlich ungeraden ganzzahligen Faktor $2b+1 > 1$.

Variante 2: Umformung ergibt $n = \frac{a}{b}+\frac{a+1}{b+1} \iff (nb-a)(b+1) = b(a+1)$. Da die Zahlen b und b+1 immer teilerfremd sind und beide Seiten die gleiche Primfaktorzerlegung besitzen, sind alle Faktoren von (b+1) auch in (a+1) enthalten; ebenso sind alle Faktoren von b in der Zahl ($nb - a$) und sogar – da der eine Summand den Faktor b enthält – auch im Summanden a enthalten. Es sind also $s := \frac{a+1}{b+1}$ und auch $r := \frac{a}{b}$ beides ganze Zahlen. Von hier schließt man weiter wie in Variante 1, zweiter Absatz.

Variante 3: Umformung ergibt (man konzentriert sich von Beginn an auf den Ausdruck n–2):

$$n-2 = \frac{a}{b}+\frac{a+1}{b+1}-2 = \frac{ab+a+ab+b-2b^2-2b}{b(b+1)} = \frac{a(2b+1)-b(2b+1)}{b(b+1)} = (2b+1)\frac{(a-b)}{b(b+1)},$$

dabei sind (2b+1), (a–b), und (b+1) ganze Zahlen, offensichtlich ist (2b+1)>1, ganz und ungerade.

n – 2 ist eine ganze Zahl, also ist die rechte Seite ebenfalls ganz und man kann den Nenner kürzen. Dabei bleibt allerdings der – sicher ganzzahlige – Faktor (2b+1) erhalten, da (2b+1) weder mit b noch mit (b+1) einen gemeinsamen echten Teiler hat: Jeder gemeinsame Teiler von (2b+1) und b ist auch Teiler von (2b+1)–2b = 1, also ist $\text{ggT}(2b+1,b)=1$. Analog ist jeder gemeinsamer Teiler von (2b+1) und (b+1) auch Teiler von (2b+1)–2(b+1) = –1, also $\text{ggT}(2b+1,b+1) = 1$.

Es ist also $\frac{(a-b)}{b(b+1)}$ eine ganze Zahl. Damit enthält aber n–2 den ungeraden Faktor (2b+1) > 1.

Teil 2 ("⇐"): Besitze n–2 den ungeraden Teiler d > 1. Wie man sofort nachrechnet, ist dann $n \neq 1$, also $n-2 \geq 0$. Dann ist $n = d\cdot m + 2$ für ein geeignetes ganzzahliges $m \geq 0$.

Wir definieren $b := \frac{1}{2}(d-1)$ und $a := b(mb+m+1)$. Da d > 1, ganz und ungerade, ist b positiv ganz; da zusätzlich $m \geq 0$, ist auch a ganz. Es ist dann wie gewünscht

$$\frac{a}{b}+\frac{a+1}{b+1} = \frac{b(mb+m+1)}{b}+\frac{b(mb+m+1)+1}{b+1} = mb+m+1+\frac{(mb+1)(b+1)}{b+1} = 2mb+m+2$$

$$= m\cdot(2b+1)+2 = m(2\cdot(\tfrac{1}{2}\cdot(d-1))+1)+2 = md + 2 = n$$ eine Darstellung der geforderten Art.

2. Beweis (mit Hilfssatz über lineare diophantische Gleichungen): Wir bestimmen zunächst zu vorgegebenem positivem ganzen b alle ganzzahligen Lösungen (n,a) der diophantischen Gleichung $n = \frac{a}{b}+\frac{a+1}{b+1}$. Es ist $n = \frac{a}{b}+\frac{a+1}{b+1} \Leftrightarrow b(b+1)n = a(b+1) + (a+1)b$ oder $b(b+1)n - (2b+1)a = b$ (*).

Nachrechnen zeigt, dass z.B. (n,a) = (2,b) eine solche Lösung ist. Da die Koeffizienten dieser diophantischen Gleichung, also $b(b+1)$ und (2b+1), für alle positiven ganzen b teilerfremd sind, können wir aus dieser Lösung nach Hilfssatz (s.u.) die Menge aller Lösungen konstruieren:

$$L_b = \{ (a,n) \mid a = b + tb(b+1) \text{ und } n = 2 + t(2b+1) \text{ und } t\in Z \}.$$

Für jedes positive ganze b ist in dieser Beschreibung die Zahl n offensichtlich genau dann eine positive ganze Zahl, wenn $t \geq 0$; und wenn $t \geq 0$, ist auch a positiv ganz.

Damit ist eine positive ganze Zahl n genau dann in der Form $n = \frac{a}{b}+\frac{a+1}{b+1}$ ($a,b\in Z$ und $a,b \geq 1$) darstellbar, wenn sich n in der Form $n = 2 + t\cdot(2b+1)$ mit $t,b\in Z$ und $b\geq 1$ darstellen lässt; dies ist genau dann der Fall, wenn die Zahl n–2 einen ungeraden Teiler hat, der größer als 1 ist.

Bemerkung: Die Darstellung $n = 2+t(2b+1)$ ermöglicht eine bijektive Abbildung zwischen der Menge der ungeraden Teiler > 1 von n–2 und der Menge der möglichen Darstellungen von n im Sinne der Aufgabe.

Hilfssatz: Seien A,B≠0 ganze Zahlen und $\text{ggT}(A,B)=1$. Wenn (r_0,s_0) eine spezielle Lösung der diophantischen Gleichung $A\cdot r - B\cdot s = C$ ist, so ist $\{(r,s) \mid r = r_0+t\cdot B \text{ und } s = s_0+t\cdot A \text{ und } t\in Z\}$ deren vollständige Lösungsmenge.

Beweis: Für alle $t\in Z$ ist $A\cdot(r_0+t\cdot B) - B\cdot(r_0+t\cdot A) = A\cdot r_0 - B\cdot r_0 = C$, damit ist für alle $t\in Z$ mit (r_0,s_0) auch stets ($r_0+t\cdot B$, $s_0+t\cdot A$) eine Lösung der diophantischen Gleichung $A\cdot r - B\cdot s = C$.

Seien umgekehrt (r_0,s_0) und (r_1,s_1) Lösungen, also sowohl $A\cdot r_0 - B\cdot s_0 = C$ als auch $A\cdot r_1 - B\cdot s_1 = C$. Subtraktion liefert $A\cdot(r_0 - r_1) - B\cdot(s_0 - s_1) = 0$ oder $(r_0 - r_1) = \frac{B}{A}\cdot(s_0 - s_1)$ (**) oder $\frac{1}{B}\cdot(r_0 - r_1) = \frac{1}{A}\cdot(s_0 - s_1)$ (***). Weil ($r_0 - r_1$) ganzzahlig ist, ist nach (**) auch $\frac{B}{A}\cdot(s_0 - s_1)$ ganzzahlig; weil $\text{ggT}(A,B)=1$, kürzt sich A vollständig gegen ($s_0 - s_1$), es ist also $t := -\frac{1}{A}\cdot(s_0 - s_1) = -\frac{1}{B}\cdot(r_0 - r_1)$ ganzzahlig. Hieraus folgt sofort $s_1 = s_0+t\cdot A$ und $r_1 = r_0+t\cdot B$ und $t\in Z$.