Bundeswettbewerb Mathematik
Wissenschaftszentrum, Postfach 20 14 48, 53144 Bonn
Fon: 0228 - 3727 411 • Fax: 0228 - 3727 413
e-mail: info@bundeswettbewerb-mathematik.de
www.bundeswettbewerb-mathematik.de

Korrekturkommission • Karl Fegert

Aufgaben und Lösungen

2. Runde 2003

Stand: Oktober 2003

Aufgabe 1: Der Graph einer auf ganz R definierten reellwertigen Funktion f habe mindestens zwei Symmetriezentren.

Man beweise, dass sich f als Summe einer linearen und einer periodischen Funktion darstellen lässt.

Begriffserläuterungen: Ein Punkt P heißt ***Symmetriezentrum*** einer Figur F, wenn jeder Punkt von F bei Spiegelung an P wieder in einen Punkt von F übergeht.
Eine Funktion g heißt ***linear***, wenn es reelle Zahlen a, b gibt, so dass die Gleichung $g(x) = ax+b$ für alle x gilt.
Eine Funktion p heißt ***periodisch***, wenn es eine positive reelle Zahl k gibt, so dass $p(x) = p(x+k)$ für alle x gilt.

Bemerkung:

1. Beweis: Bekanntlich ist ein Punkt $(r|s)$ genau dann Symmetriezentrum zu zwei Punkten $(a|b)$ und $(c|d)$, wenn er Mittelpunkt der Verbindungsstrecke ist, d.h. wenn seine Koordinaten die Werte $r = \frac{a+c}{2}$ und $s = \frac{b+d}{2}$ haben; hieraus folgt durch Auflösen nach c bzw. d sofort, dass das Bild eines Punktes $(a|b)$ bei Spiegelung am Punkt $(r|s)$ die Koordinaten $(2r-a|2s-b)$ hat.

Wir bezeichnen den Graphen von f mit G, die beiden nach Voraussetzung existierenden Symmetriezentren und deren Koordinaten mit $S_1(x_1|y_1)$ und $S_2(x_2|y_2)$; ferner sei $A := 2(x_2-x_1)$ und $B := 2(y_2-y_1)$.

Wir zeigen zunächst, dass $A \neq 0$: Die Bilder des Punktes $(x_1|f(x_1))$ von G bei der Spiegelung an den Symmetriezentren S_1 und S_2 sind die Punkte $(2x_1-x_1|2y_1-f(x_1)) = (x_1|2y_1-f(x_1))$ und $(2x_2-x_1|2y_2-f(x_1))$. Da beide Punkte nach Voraussetzung auf G liegen, sind die y–Koordinaten jeweils die Funktionswerte der x–Koordinaten, also $f(x_1) = 2y_1-f(x_1)$ und $f(2x_2-x_1) = 2y_2-f(x_1)$. Wäre nun $x_1 = x_2$, so erhielte man hieraus sofort $y_1 = y_2$, und die beiden Symmetriezentren wären im Widerspruch zur Voraussetzung nicht verschieden.

Nun unterwerfen wir zu einem beliebig gewählten $x \in$ R den Punkt $(x|y) \in$ G zunächst einer Spiegelung an S_1; er geht dabei in den Punkt $(2x_1-x|2y_1-y)$ über; dieser ist nach Voraussetzung wieder ein Punkt von G. Die Spiegelung an S_2 führt diesen schließlich in den Punkt $(2x_2-(2x_1-x)|2y_2-(2y_1-y))$ $= (x+2(x_2-x_1) \mid y+(2(y_2-y_1)) = (x+A \mid y+B)$ über. Dieser Punkt ist wieder Punkt von G; damit ist $f(x+A) = y+B = f(x) + B$ für alle $x \in$ R.

Wir definieren $p(x) := f(x) - \frac{B}{A} \cdot x$ $(x \in$ R$)$ (*); dies ist wegen $A \neq 0$ möglich. Es ist dann

$$p(x+A) = f(x+A) - \tfrac{B}{A} \cdot (x+A) = f(x) + B - \tfrac{B}{A} \cdot x - \tfrac{B}{A} \cdot A = f(x) - \tfrac{B}{A} \cdot x = p(x) \text{ für alle } x \in \text{R};$$

es ist also die Funktion p periodisch mit Periodenlänge A.

Schließlich lösen wir (*) nach $f(x)$ auf und erhalten für alle $x \in$ R wie gewünscht $f(x) = p(x) + \frac{B}{A} \cdot x$, eine Summe aus der periodischen Funktion $x \to p(x)$ und der linearen Funktion $x \to \frac{B}{A} \cdot x$.

2. Beweis: Wir bezeichnen die beiden nach Voraussetzung existierenden Symmetriezentren und deren Koordinaten mit $S_1(x_1|y_1)$ und $S_2(x_2|y_2)$.

Zunächst stellen wir fest, dass jedes Symmetriezentrum gleichzeitig Punkt des Graphen von f ist, d.h. dass $f(x_1) = y_1$: Andernfalls würde die Spiegelung an $S_1(x_1|y_2)$ aus dem Punkt $(x_1|f(x_1))$ des Graphen einen zweiten Punkt des Graphen mit gleicher x–Koordinate, aber verschiedener y–Koordinate erzeugen. Insbesondere haben die beiden (verschiedenen!) Symmetriezentren verschiedene x–Koordinaten, es ist also $x_1 \neq x_2$. Die Verbindungsgerade (S_1S_2) ist damit nicht parallel zur y–Achse und kann als Graph einer linearen Funktion g beschrieben werden.

Nach Voraussetzung führt eine Verkettung der Spiegelungen an S_1 und S_2 den Graph von f in sich über. Bekanntlich kann eine solche Verkettung auch beschrieben werden durch eine Parallelverschiebung um den Vektor $2\overrightarrow{S_1S_2}$. (Beweis: Das Bild von P bei der Spiegelung an S_1 sei P_1, das Bild von P_1 bei der Spiegelung an S_2 sei P_2; dann ist S_1S_2 Mittelparallele im – evtl. entarteten – Dreieck PP_1P_2, also $P_1P_2 \| S_1S_2$ und $\overline{P_1P_2} = 2\,\overline{S_1S_2}$.) In Koordinaten ausgedrückt: Es ist $f(x + 2(x_2-x_1)) = f(x)+2(y_2-y_1)$ für alle $x \in$ R; und – die Gerade S_1S_2 geht bei dieser Verschiebung ebenfalls in sich über – auch $g(x + 2(x_2-x_1)) = g(x)+2(y_2-y_1)$ für alle $x \in$ R.

Nun betrachten wir die Funktion $p := f - g$. Für alle $x \in R$ ist nach vorigem Absatz $p(x + 2(x_2-x_1)) = (f(x)+2(y_2-y_1)) - (g(x)+2(y_2-y_1)) = f(x) - g(x) = p(x)$; d.h. die Funktion p ist periodisch mit Periodenlänge $2(x_2-x_1)$.

Aus der Definition von p folgt schließlich wie gewünscht die Darstellung $f = p + g$, die Summe einer periodischen und einer linearen Funktion.

Bemerkung: Beweise, die für nicht-lineare Funktionen mit einem kleinsten Abstand von Symmetriezentren argumentieren, sind fehlerhaft. Es gibt nämlich Funktionen $f : R \to R$, die folgende Eigenschaften haben: (A) f ist nicht linear (B) Jeder Punkt $(q, f(q))$ mit $q \in Q$ ist Symmetriezentrum. (C) Jeder Punkt $(r, f(r))$ mit $r \in R \backslash Q$ ist nicht Symmetriezentrum.

Aufgabe 2: Die Zahlenfolge $(a_1, a_2, a_3, ...)$ sei rekursiv definiert durch:

$$a_1 := 1,\ a_2 := 1,\ a_3 := 2 \text{ und } a_{n+3} := \frac{1}{a_n}(a_{n+1}a_{n+2} + 7) \text{ für } n > 0.$$

Man beweise, dass alle Folgenglieder ganzzahlig sind.

Vorbemerkung: Die Aufgabenstellung setzt die Existenz der Folge voraus, formal entfällt damit die Notwendigkeit folgenden Nachweises: Wenn a_n, a_{n+1}, und a_{n+2} positiv sind, ist offensichtlich auch a_{n+3} positiv; und da bereits a_1, a_2, und a_3 alle positiv sind, folgt sofort durch vollständige Induktion, dass alle a_n positiv und insbesondere alle $a_n \neq 0$ sind. In keinem Nenner kann also der Wert 0 auftauchen; die Folge ist damit wohldefiniert.

1. Beweis (Darstellung der Folge durch eine lineare rekursive Definition mit ganzzahligen Koeffizienten): Wir betrachten die Zahlenfolge

$$b_1 := 1,\ b_2 := 1,\ b_3 := 2,\ b_4 := 9 \text{ und } b_{n+4} := 13b_{n+2} - b_n \text{ für } n > 0.$$

Da die ersten drei Folgenglieder ganzzahlig sind und alle anderen Folgenglieder aus diesen durch Addition, Subtraktion oder Multiplikation ganzer Zahlen entstehen, ist jedes Glied dieser Folge sicher ganzzahlig. Der geforderte Nachweis ist also erbracht, wenn wir noch zeigen, dass $a_n = b_n$ für alle $n = 1, 2, 3, ...$. Dies geschieht durch vollständige Induktion:

<u>Induktionsanfang</u>: Es ist nach Definition $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$ und nach Rekursionsformel auch

$a_4 = \frac{1}{a_1}(a_2a_3 + 7) = \frac{1}{1}(1\cdot2+7) = 9 = b_4$ sowie $a_5 = \frac{1}{a_2}(a_3a_4 + 7) = \frac{1}{1}(2\cdot9+7) = 25$
$= 13\cdot2 - 1 = 13\cdot b_3 - b_1 = b_5$

<u>Induktionsannahme</u>: Sei $a_n = b_n$ für alle $n \le n_0$ für ein bestimmtes $n_0 \ge 5$.

<u>Induktionsschluss</u>: Zunächst folgt durch Auflösen der Rekursionsformel der Folge (a_n) für alle $n>0$ die Identität $\frac{1}{a_{n+2}}(a_{n+3}a_n - 7) = a_{n+1}$; nach Induktionsannahme gilt also auch für alle $5 \le n \le n_0$ die Identität $\frac{1}{b_{n-2}}(b_{n-1}b_{n-4} - 7) = b_{n-3}$ (zusätzlich wurde der Index n durch $n-4$ ersetzt, dies ist wegen $n \ge 5$ möglich). Zusammen mit der Definition der Folge (b_i) folgt

$$a_{n+1} = \frac{1}{a_{n-2}}(a_{n-1}a_n + 7) = \frac{1}{b_{n-2}}(b_{n-1}b_n + 7) = \frac{1}{b_{n-2}}(b_{n-1}(13b_{n-2} - b_{n-4}) + 7)$$
$$= 13b_{n-1} - \frac{1}{b_{n-2}}(b_{n-1}b_{n-4} - 7) = 13b_{n-1} - b_{n-3} = b_{n+1};$$ es ist also $a_n = b_n$ für alle $n \le n_{0+1}$.

2. Beweis (Darstellung der Folge durch eine zweistufige lineare rekursive Definition mit ganzzahligen Koeffizienten; etwas knapper in der Darstellung): Zunächst ergibt Auflösen der Rekursionsformel der

Folge (a_n) nach a_{n+2} die Identität $a_{n+2} = \frac{1}{a_{n+1}}(a_n a_{n+3} - 7)$ für alle n>0. Hiermit lässt sich mit vollst. Induktion folgender Hilfssatz ableiten:

HS: Es ist $a_{2n+1} = 3a_{2n} - a_{2n-1}$ und $a_{2n+2} = 5a_{2n+1} - a_{2n}$ für alle n>0:

Die beiden Gleichungen stimmen nämlich wegen $a_{2\cdot1+1} = a_3 = 2 = 3\cdot1-1 = 3a_2 - a_1 = 3a_{2\cdot1} - a_{2\cdot1-1}$ und $a_{2\cdot1+2} = a_4 = \frac{1}{a_1}(a_2a_3 + 7) = \frac{1}{1}(1\cdot2 + 7) = 9 = 5\cdot2-1 = 5\cdot a_3 - a_2 = 5\cdot a_{2\cdot1+1} - a_{2\cdot1}$ für n=1,

und wenn sie für irgend ein n stimmen, so stimmen sie wegen $a_{2(n+1)+1} = a_{2n+3} = \frac{1}{a_{2n}}(a_{2n+1}a_{2n+2} + 7)$

$= \frac{1}{a_{2n}}((3a_{2n} - a_{2n-1})a_{2n+2} + 7) = 3a_{2n+2} - \frac{1}{a_{2n}}(a_{2n-1}a_{2n+2} - 7) = 3a_{2n+2} - a_{2n+1} = 3a_{2(n+1)} - a_{2(n+1)-1}$ und

$a_{2(n+1)+2} = a_{2n+4} = \frac{1}{a_{2n+1}}(a_{2n+2}a_{2n+3} + 7) = \frac{1}{a_{2n+1}}((5a_{2n+1} - a_{2n})a_{2n+3} + 7) = 5a_{2n+3} - \frac{1}{a_{2n+1}}(a_{2n}a_{2n+3} - 7)$

$= 5a_{2n+3} - a_{2n+2} = 5a_{2(n+1)+1} - a_{2(n+1)}$ auch für n+1.

Also entsteht jedes Folgenglied rekursiv aus den ganzzahligen Werten $a_1 = a_2 = 1$ durch eine Verknüpfung von Addition, Subtraktion oder Multiplikation; ist also selbst wieder ganzzahlig.

Variante (mit Herleitung dieser Rekursion): Durch äquivalente Umformung (es hat kein Folgenglied den Wert Null) und Indexverschiebung erhält man aus der Rekursionsgleichung für alle n>0 die beiden Gleichungen

$$a_{n+3}a_n = a_{n+1}a_{n+2} + 7 \quad \text{und}$$
$$a_{n+4}a_{n+1} = a_{n+2}a_{n+3} + 7.$$

Subtraktion ergibt $a_{n+3}a_n - a_{n+4}a_{n+1} = a_{n+1}a_{n+2} - a_{n+2}a_{n+3}$ oder

$$(*) \qquad \frac{a_n + a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+2} + a_{n+4}}{a_{n+3}} \quad \text{für alle } n>0.$$

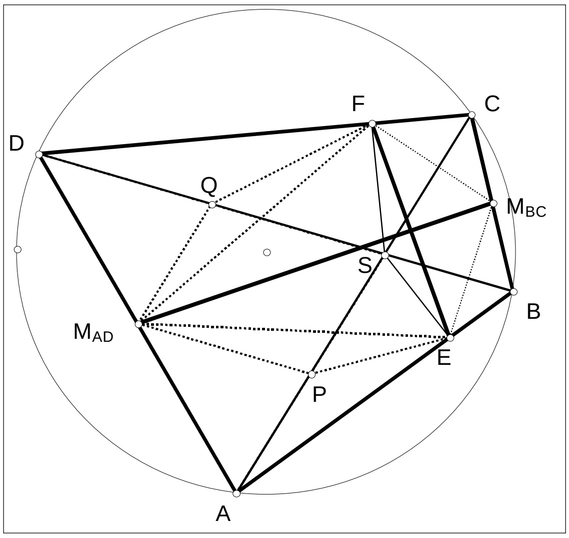
Sei $c_n := \frac{a_n + a_{n+2}}{a_{n+1}}$; dann besagt Gleichung (*), dass $c_n = c_{n+2}$ für alle n>0; mit vollst. Induktion erhält man so $c_n = c_1 = \frac{a_1 + a_{1+2}}{a_{1+1}} = \frac{1+2}{1} = 3$ für alle ungeraden n und $c_n = c_2 = \frac{a_2 + a_{2+2}}{a_{2+1}} = \frac{1+9}{2} = 5$ für alle geraden n. Aus (*) erhält man so für gerade n die Rekursionsgleichung $a_{n+4} = \frac{a_n + a_{n+2}}{a_{n+1}}a_{n+3} - a_{n+2}$ $= c_na_{n+3} - a_{n+2} = 3a_{n+3} - a_{n+2}$ und für ungerade n analog $a_{n+4} = 5a_{n+3} - a_{n+2}$. Da schließlich die Werte $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = \frac{1}{a_1}(a_2a_3 + 7) = \frac{1}{1}(1\cdot2+7) = 9$ alle ganzzahlig sind, entstehen alle Folgenglieder aus einer Verkettung von Addition, Subtraktion und Multiplikation ganzer Zahlen und sind damit ebenfalls ganzzahlig.

Aufgabe 3: Gegeben sei ein konvexes Sehnenviereck ABCD mit Diagonalenschnittpunkt S; die Fußpunkte der Lote von S auf AB und auf CD seien E bzw. F.

Man beweise: Die Mittelsenkrechte der Strecke EF halbiert die Seiten BC und DA.

Gemeinsame Vorbemerkung: Die Mittelpunkte der Stecken AD, BC, AS und DS seien mit M_{AD}, M_{BC}, P bzw. Q bezeichnet. Wir werden $\overline{M_{AD}E} = \overline{M_{AD}F}$ zeigen; analog folgt dann $\overline{M_{BC}E} = \overline{M_{BC}F}$; damit sind die Dreiecke $\Delta EM_{AD}F$ und $\Delta EM_{BC}F$ gleichschenklig. Die Mittelsenkrechte auf deren gemeinsamen Basis FE ist also gleichzeitig Seitenhalbierende, hieraus folgt dann die Behauptung.

1. Beweis (mit Kongruenzbetrachtungen): Zunächst betrachten wir den "Normal"fall, dass A nicht auf EB sowie D nicht auf FC liegt:



Nach Umfangswinkelsatz ist $\angle BAC = \angle BDC$, also $\angle EAS = SDF$, damit stimmen die beiden rechtwinkligen Dreiecke ΔEAS und ΔFDS in zwei Winkeln überein, sind also ähnlich. Damit sind auch die Winkel gleich, die entsprechende Grundseiten mit der Seitenhalbierenden von der gegenüberliegenden Ecke einschließen, also ist $\angle EPS = \angle SQF$.

$M_{AD}Q$ ist Mittellinie in ΔADS und P Seitenmitte von AS, also $\overline{M_{AD}Q} = \overline{PS}$, ferner ist P als Hypotenusenmittelpunkt Umkreismittelpunkt des bei E rechtwinkligen Dreiecks ΔAES, also $\overline{PS} = \overline{PE}$, insgesamt also $\overline{M_{AD}Q} = \overline{PE}$ und analog $\overline{M_{AD}P} = \overline{QF}$.

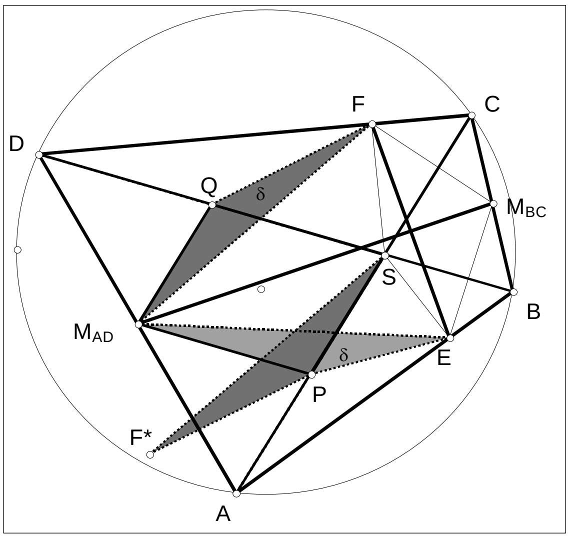
Ferner ist $\angle SPM_{AD} = \angle M_{AD}QS$, da das Viereck $SPM_{AD}Q$ ein Parallelogramm ist. Dies setzen wir zusammen zu $\angle EPM_{AD} = \angle SPM_{AD} + \angle EPS = \angle M_{AD}QS + \angle SQF = \angle M_{AD}QF$, dabei kann dieser Winkel überstumpf sein. (Weil Viereck ABCD konvex ist, liegen stets E und M_{AD} in verschiedenen Halbebenen bez. (AS), ebenso M_{AD} und F bezüglich (DS), die absoluten Winkelgrößen werden also stets addiert.)

Damit stimmen ΔEPM_{AD} und $\Delta M_{AD}QF$ in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein, sind also kongruent. Insbesondere ist wie gewünscht $\overline{M_{AD}E} = \overline{M_{AD}F}$.

Falls nun abweichend vom "Normal"fall A zwischen E und B liegt, ist $\angle BAC > 90°$, nach Umfangswinkelsatz also auch $\angle BDC > 90°$ und somit auch D zwischen F und C. Damit folgt aus $\angle BAC = \angle BDC$ wieder wie oben $\angle EAS = \angle SDF$, also kann obige Argumentation übernommen werden. Falls schließlich A mit E und somit auch D mit F zusammenfällt, können wir direkt $\angle EPS = \angle SQF$ (= 180°) schließen und dann wie oben weiter argumentieren.

Bemerkung: Hiermit haben wir folgenden kleinen Satz bewiesen, dessen Formulierung ohne die Punkte B und C auskommt: Errichtet man auf den Seiten SA und DA eines Dreiecks ASD nach außen gegensinnig ähnliche rechtwinklige Dreiecke ΔSEA und ΔSFD mit rechten Winkeln bei E bzw. F, so haben E und F gleiche Entfernung zum Mittelpunkt der Seite AD.

2. Beweis (abbildungsgeometrisch): Mit $\rho(X,\varphi)$ sei nach Vorgabe eines Punktes X und eines Winkels φ die Drehung um den Punkt X um den Winkel φ bezeichnet.



Zuerst stellen wir fest, dass $M_{AD}P$ und $M_{AD}Q$ Mittellinien im Dreieck ADS sind, damit ist das Viereck $M_{AD}PSQ$ ein Parallelogramm. Die Punktspiegelung, die dieses Parallelogramm in sich überführt, sei mit σ bezeichnet. σ führt also S in M_{AD} und umgekehrt über, ebenso Q in P und umgekehrt.

Zunächst betrachten wir den "Normal"fall, dass A nicht auf EB sowie D nicht auf FC liegt: Die beiden Dreiecke ΔEAS und ΔSDF sind beide rechtwinklig bei E bzw. F, die Mittelpunkte ihrer Hypotenusen P bzw. Q sind also deren Umkreismittelpunkte (dies gilt auch im entarteten Fall A=E bzw. D=F). Mehrfache Anwendung des Umfangswinkelsatzes (zusätzlich ist das Viereck ABCD ein Sehnenviereck!) ergibt $\angle EPS = 2\angle EAS = 2\angle BAC = 2\angle BDC = 2\angle SDF =$

$\angle$SQF (*), also $\angle$EPS = $\angle$SQF. Sei $\delta := \angle EPS = \angle SQF$, dann geht also bei der Drehung $\rho(P,\delta)$ der Punkt E in den Punkt S über, und bei der Drehung $\rho(Q,\delta)$ der Punkt S in den Punkt F.

Nun betrachten wir die Abbildung $\psi := \sigma \circ \rho(P,\delta)$, also die Hintereinanderausführung von zuerst $\rho(P,\delta)$ und dann σ. Wir stellen fest, dass $\psi = \sigma \circ \rho(P,\delta) = \rho(Q,\delta) \circ \sigma$, da man bei der Verkettung einer Punktspiegelung und einer Drehung die gleiche Abbildung erhält, wenn man deren Reihenfolge vertauscht und gleichzeitig den ursprünglichen Drehpunkt durch den Bildpunkt dieses Drehpunktes bei der Punktspiegelung ersetzt (vgl. Figur zum 2. Beweis: die Abbildung $\sigma \circ \rho(P,\delta)$ führt M_{AD} über F* nach F; die Abbildung $\rho(Q,\delta) \circ \sigma$ führt M_{AD} über S nach F). Es ist schließlich $\psi(E) = M_{AD}$ und $\psi(M_{AD}) = F$.

Als Verkettung von Kongruenzabbildungen ist ψ wieder eine Kongruenzabbildung, insbesondere ist dann $\overline{M_{AD}E} = \overline{\psi(M_{AD})\psi(E)} = \overline{FM_{AD}} = \overline{M_{AD}F}$.

Falls nun abweichend vom "Normal"fall A zwischen E und B liegt, ist $\angle BAC > 90°$, nach Umfangswinkelsatz also auch $\angle BDC > 90°$ und somit auch D zwischen F und C. Damit bleibt das Ergebnis von (*), also $\angle EPS = \angle SQF$ bestehen, weil in (*) gleichzeitig $\angle$BAC durch $180° - \angle BAC$ und $\angle$BDC durch $180° - \angle BDC$ ersetzt wird. Falls schließlich A mit E und somit auch D mit F zusammenfällt, können wir direkt $\angle EPS = \angle SQF$ (= 180°) schließen und dann wie oben weiter argumentieren.

3. Beweis (vektoriell): Wir wählen S als Ursprung eines Koordinatensystems; wie üblich seien mit **a**, **b**, **c**, **d**, **e**, **f**, **m** die Ortsvektoren der Punkte A; B, C, D, E, F, M_{AD} bezeichnet; es ist $2\mathbf{m} = \mathbf{a}+\mathbf{d}$.

Wegen $\mathbf{e} \perp (\mathbf{a}-\mathbf{e})$ ist $\mathbf{e}(\mathbf{a}-\mathbf{e}) = 0$, also $\mathbf{ae}-\mathbf{e}^2 = 0$ und analog $\mathbf{df}-\mathbf{f}^2 = 0$; wegen der Ähnlichkeit von ΔASE und ΔDSF (sie stimmen in zwei Winkeln überein: die Innenwinkel bei E bzw. F sind beide 90°, die Innenwinkel bei A bzw. D sind gleiche Peripheriewinkel über der gemeinsamen Sehne BC des Umkreises des Sehnenvierecks ABCD) ist $|\mathbf{a}||\mathbf{f}| = |\mathbf{d}||\mathbf{e}|$, und da zusätzlich $\angle(\mathbf{f},\mathbf{a}) = \angle(\mathbf{d},\mathbf{e})$ (folgt wieder aus der Ähnlichkeit von ΔASE und ΔDSF), ist sogar $\mathbf{af} = \mathbf{de}$, also $\mathbf{af}-\mathbf{de} = 0$. Dies setzen wir zusammen zu $0 = (\mathbf{ae}-\mathbf{e}^2) - (\mathbf{df}-\mathbf{f}^2) - (\mathbf{af}-\mathbf{de}) = \mathbf{ae} + \mathbf{de} - \mathbf{af} - \mathbf{df} - \mathbf{e}^2 + \mathbf{f}^2 = (\mathbf{a}+\mathbf{d})\mathbf{e} - (\mathbf{a}+\mathbf{d})\mathbf{f} - \mathbf{e}^2 + \mathbf{f}^2 = 2\mathbf{me} - 2\mathbf{mf} - \mathbf{e}^2 + \mathbf{f}^2 + (\mathbf{m}^2-\mathbf{m}^2) = -(\mathbf{m}-\mathbf{e})^2 + (\mathbf{m}-\mathbf{f})^2$; dies ist äquivalent zur Behauptung $\overline{M_{AD}E} = \overline{M_{AD}F}$.

4. Beweis (mit Koordinaten, vgl. Fig. zum 1. Beweis): Entgegen der gemeinsamen Vorbemerkung zeigen wir hier, dass M_{AD} auf der Mittelsenkrechten m_{EF} liegt, analog ist dann auch M_{BC} auf m_{EF}. Hierzu legen wir ein kartesisches Koordinatensystem so auf die Figur, dass die y-Achse auf EF, die x-Achse auf die Mittelsenkrechte von EF zu liegen kommt, ferner wählen wir die Einheit so, dass F die Koordinaten (0,1), der Punkt E somit die Koordinaten (0,–1) hat. Die Koordinaten von S nennen wir (x_s,y_s).

Es ist dann $\overrightarrow{SF} = \begin{pmatrix} -x_s \\ 1-y_s \end{pmatrix}$, ein zu $\overrightarrow{SF}$ senkrecht stehender Vektor gleicher Länge $\overrightarrow{SF}_\perp = \begin{pmatrix} -1+y_s \\ -x_s \end{pmatrix}$

(Koordinaten vertauschen, eine wird mit (–1) multipliziert). Da $\overrightarrow{FD} \perp \overrightarrow{SF}$, ist bei geeigneter Wahl eines Vorzeichens

$$\overrightarrow{FD} = \pm \frac{|\overrightarrow{FD}|}{|\overrightarrow{SF}|} \cdot \begin{pmatrix} -1+y_s \\ -x_s \end{pmatrix} = \pm \cot(\angle BDC) \cdot \begin{pmatrix} -1+y_s \\ -x_s \end{pmatrix}, \text{ also } \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \pm \cot(\angle BDC) \begin{pmatrix} -1+y_s \\ -x_s \end{pmatrix}.$$

Entsprechend leiten wir aus $\overrightarrow{SE} = \begin{pmatrix} -x_s \\ -1-y_s \end{pmatrix}$ her:

$$\overrightarrow{EA} = \pm \frac{|\overrightarrow{EA}|}{|\overrightarrow{SE}|} \cdot \begin{pmatrix} 1+y_s \\ -x_s \end{pmatrix} = \pm \cot(\angle BAC) \cdot \begin{pmatrix} +1+y_s \\ -x_s \end{pmatrix}, \text{ also } \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EA} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \pm \cot(\angle BAC) \begin{pmatrix} +1+y_s \\ -x_s \end{pmatrix}.$$

Dabei gelten immer verschiedene Vorzeichen: C liegt genau dann nicht zwischen F und D, wenn $\angle BDC \le 90°$ ist; und weil nach Umfangswinkelsatz $\angle BDC = \angle BAC$ ist, liegt genau dann auch A nicht zwischen E und B; damit haben die Winkel $\angle$SFD und $\angle$SEA stets gegenläufige Orientierung, damit müssen bei der Bildung des senkrecht stehenden Vektors jeweils verschiedene Koordinaten mit (–1) multipliziert werden.

Aus der Verschiedenheit der Vorzeichen und der Gleichheit der Winkel $\angle$BAC und $\angle$BDC folgt schließlich: Die y-Koordinate von $\overrightarrow{OM_{AD}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD})$ ist $\pm(1 + (-1) + x_s(\cot(\angle BDC) - \cot(\angle BAC))) = 0$. Damit liegt M_{AD} auf der x–Achse, also wie behauptet auf der Mittelsenkrechten von EF.

Aufgabe 4: Es seien p und q zwei verschiedene teilerfremde positive ganze Zahlen. Die Menge der ganzen Zahlen soll so in drei Teilmengen A, B, C zerlegt werden, dass für jede ganze Zahl z in jeder der Mengen A, B, C genau eine der drei Zahlen z, $z+p$, $z+q$ liegt.

Man beweise, dass eine solche Zerlegung genau dann möglich ist, wenn $p+q$ durch 3 teilbar ist.

Beweis: **"$\Leftarrow$"**: Sei $p+q$ durch 3 teilbar. Mit den Bedingungen der Aufgabe folgt hieraus sofort entweder $p\equiv 1 \mod 3$ und $q\equiv 2 \mod 3$ oder $p\equiv 2 \mod 3$ und $q\equiv 1 \mod 3$; der Fall $p \equiv q \equiv 0 \mod 3$ scheidet wegen der geforderten Teilerfremdheit von p und q aus. Dann ist mit A := { $a\in$ Z | $a \equiv 0 \mod 3$}, B := { $a\in$ Z | $a \equiv 1 \mod 3$} und C := { $a\in$ Z | $a \equiv 2 \mod 3$} eine Zerlegung der geforderten Art gegeben: Jede ganze Zahl a gehört zu genau einer Restklasse mod 3 und damit zu genau einer der drei Mengen A, B oder C; und für jede Zahl z gehören wegen $p\equiv 1 \mod 3$ und $q\equiv 2 \mod 3$ (oder umgekehrt) je zwei der drei Zahlen z, $z+p$, $z+q$ zu verschiedenen Restklassen mod 3 und damit zu zwei verschiedenen Mengen A, B oder C.

"$\Rightarrow$", Variante 1: Es gebe eine Zerlegung der geforderten Art. Zunächst zeigen wir, dass jede ganze Zahl z genau dann in A (bzw. B bzw. C) liegt, wenn $z+p+q$ in A (bzw. B bzw. C) liegt: Falls $z\in$A, ist nach Voraussetzung o.B.d.A $(z+p) \in$ B und $(z+q) \in$ C (andernfalls vertauscht man die Bezeichnungen für B und C). Insbesondere ist $p\neq q$, ferner ist $z+p+q = ((z+p)+q) \notin$ B und $z+p+q = ((z+q)+p) \notin$ C, also $(z+p+q) \in$ A; und falls $z\notin$A, also $z\in$B oder $z\in$C, folgt durch analoge Schlussweise $(z+p+q) \in$ B bzw. $(z+p+q) \in$ C, also $(z+p+q) \notin$ A. Die Zuordnung der ganzen Zahlen in die Mengen A, B oder C ist also periodisch mit Periodenlänge $(p+q)$ oder anders ausgedrückt: z_1 und z_2 liegen in der gleichen Menge, wenn z_1 und z_2 bei Division durch $(p+q)$ den gleichen Rest lassen.

Nun betrachten wir die ganzen Zahlen im Intervall D := $[0;p+q-1]$, dies sind $(p+q)$ verschiedene Zahlen und jeder mögliche Rest bei Division durch $(p+q)$ kommt genau einmal vor. Wir werden zeigen, dass je gleichviel dieser $(p+q)$ verschiedenen Zahlen diese Intervalls in den Mengen A, B und C enthalten sind, hieraus folgt dann sofort, dass $p+q$ durch 3 teilbar ist:

> Zu jeder ganzen Zahl $z \in$ A$\cap$D bezeichne $p(z)$ diejenige der beiden Zahlen $(z+p)$ und $(z+p)-(p+q)$, die in D liegt, entsprechend sei $q(z)$ diejenige der beiden Zahlen $(z+q)$ und $(z+q)-(p+q)$, die in D liegt, offensichtlich sind die Zahlen $p(z)$ und $q(z)$ eindeutig bestimmt und wohldefiniert. Nach Voraussetzung sind $p(z)$ und $q(z)$ beide in D; keine der beiden Zahlen ist in A enthalten. Ferner sind keine zwei aller möglichen Zahlen $p(z)$, $q(z)$ mit z$\in$A$\cap$D gleich: Für alle z, z_1, $z_2\in$A$\cap$D ist wegen $p\neq q$ stets $p(z)\neq q(z)$, für $z_1\neq z_2$ ist stets $p(z_1)\neq p(z_2)$ und $q(z_1)\neq q(z_2)$; wäre $p(z_1)=q(z_2)$, erhielte man $p(z_1)-q = q(z_2)-q = z_2 \in$ A, also auch $z_1+2p = p(z_1)-q+(p+q) \in$ A; im Widerspruch hierzu folgt aus $((z_1+p)+q) \in$ A aber $z_1+p \notin$ A und auch $(z_1+p)+p = z_1+2p = \notin$ A.
>
> Damit enthält die Menge D$\cap$(B$\cup$C) mindestens doppelt so viele Zahlen wie die Menge D$\cap$A, es ist also (die Mengen A, B, C sind disjunkt!) $p+q$ = |D| = |A$\cap$D| + |(B$\cup$C)$\cap$D| $\geq$ 3|A$\cap$D|; mit analoger Schlussweise erhält man auch $p+q \geq$ 3|B$\cap$D| und $p+q \geq$ 3|C$\cap$D|. Mit der Darstellung $(p+q)$ = |D| = |A$\cap$D| + |B$\cap$D| + |C$\cap$D| lässt sich also $p+q$ als Summe dreier Summanden darstellen, von denen jeder mindestens so groß wie ein Drittel der Zahl ist. Dies geht nur, wenn die Zahlen gleich sind, es ist also |A$\cap$D| = |B$\cap$D| = |C$\cap$D|, also $p+q$ = 3|A$\cap$D|, also $3|(p+q)$.

"$\Rightarrow$", Variante 2: Es gebe eine Zerlegung der geforderten Art. Für $R, S \in$ Z bezeichne das 2–Tupel $(R;S)$ die ganze Zahl $Rp+Sq$; wir nennen zwei Zahlen *benachbart*, wenn sie eine Darstellung (R,S) bzw. (R',S') besitzen mit $R = R'$ und $|S-S'| = 1$ oder $|R-R'| = 1$ und $S = S'$. Der Betrag der Differenz benachbarter Zahlen hat damit den Wert p oder q; nach Aufgabenstellung sind damit benachbarte Zahlen in verschiedenen Mengen.

Wir werden von R, S abhängige notwendige Bedingungen für die Zugehörigkeit von (R,S) zu einer der drei Mengen A, B oder C herleiten und dann zeigen, dass diese notwendigen Bedingungen höchstens dann erfüllbar sind, wenn $p+q$ durch 3 teilbar ist.

N.B.1: (R,S) und $(R+1,S+1)$ liegen stets in der gleichen Menge: Unmittelbar aus der Aufgabenstellung folgt, dass die Zahlen (R,S), $(R+1,S) = (R,S)+p$ und $(R,S+1) = (R,S)+q$ in drei verschiedenen Mengen liegen, o.B.d.A sei $(R,S)\in$A, $(R+1,S)\in$B und $(R,S+1)\in$C (andernfalls benennen wir die Mengen um). Nun ist aber $(R+1,S+1)\notin$B, da benachbart zu $(R+1,S)\in$B. Ebenso ist $(R+1,S+1)\notin$C, da benachbart zu $(R,S+1)\in$C. Da nach Voraussetzung eine Zerlegung der geforderten Art existiert, ist notwendigerweise $(R+1,S+1)\in$A.

N.B.2: (R,S), $(R+1,S)$ und $(R+2,S)$ gehören stets zu drei verschiedenen Mengen: (R,S) und $(R+1,S)$ sind benachbart, liegen also in verschiedenen Mengen, o.B.d.A. sei $(R,S)\in$A und $(R+1,S)\in$B. Nach N.B.1 ist nun $((R+1,S)+q) = (R+1,S+1) \in$ A; nach Aufgabenstellung sind $(R+1,S)$, $(R+1,S)+q = (R+1,S+1)$ und $((R+1,S)+p) =(R+2,S)$ in verschiedenen Mengen; es bleibt also nur $(R+2,S) \in$ C. Analog begründen wir

N.B.3: (R,S), $(R,S+1)$ und $(R,S+2)$ gehören stets zu drei verschiedenen Mengen.

Mehrfaches Anwenden von N.B.1 ergibt: Für alle ganzen Zahlen k liegen die $(R+k,S+k)$ in der gleichen Menge. Mehrfaches Anwenden von N.B2 und N.B3 ergibt: Für alle ganzen Zahlen a, b liegen die Zahlen $(R+3a,S+3b)$ in der gleichen Menge. Zusammenfassend können wir formulieren:

N.B 4: Notwendig für die Existenz einer Zerlegung nach den Bedingungen der Aufgabe ist: Wenn $(R-S) \equiv (R'-S') \bmod 3$ ist, sind die zwei ganzen Zahlen (R,S) und (R',S') in der gleichen Menge, .

Diese notwendige Bedingung ist nur dann erfüllbar, wenn für verschiedene Darstellungen $(R,S) = (R',S') = z$ stets $R-S \equiv R'-S' \bmod 3$ ist. Hierfür leiten wir eine notwendige Bedingung her:

Habe z die verschiedenen Darstellungen $z = Rp+Sq = R'p+S'q$, es ist dann $(R-R')p = (S'-S)q$ mit $R-R'\neq 0$ und $S'-S\neq 0$. Links und rechts stehen ganze Zahlen; wegen der Teilerfremdheit von p und q enthält $(R-R')$ den Faktor q und $(S'-S)$ den Faktor p. Es gibt also ganze Zahlen r und s mit $(R-R') = rq$ und $(S'-S) = sp$; wegen $(R-R')p = (S'-S)q \Leftrightarrow rqp = spq$ ist sogar $r = s$ und $R' - S' = R - rq - (sp + S) = R - S - sp + sq = R - S - s(p+q)$. Hieraus folgern wir: $(R-S) \equiv (R'-S') \bmod 3 \Leftrightarrow s(p+q) \equiv 0) \bmod 3$ und hieraus – da für alle p,q der Fall $s \not\equiv 0 \bmod 3$ möglich ist – schließlich $(p+q) \equiv 0 \bmod 3$. (Z.B. führt $z = 3pq = (2q)p+(1p)q = (1q)p+(2p)q$ zu $S = 1p$, $S' = 2p$, d.h. zu $(S'-S)q = (2-1)pq$, also zu $s = 1$)

Bemerkung: Die erste Variante von "$\Rightarrow$" benötigt nicht die Voraussetzung, dass p,q teilerfremd sind. Tatsächlich kann allgemeiner gezeigt werden:

Seien p,q positive ganze Zahlen.

Eine Zerlegung der geforderten Art ist genau dann möglich, wenn $p\neq q$ und $3 \mid \dfrac{p+q}{ggT(p,q)}$.

Beweisskizze: Sei $t := ggT(p,q)$, jede ganze Zahl ist dann bekanntlich eindeutig in der Form $z = tz' + r$ mit $t, z'\in \mathbb{Z}$ und $0 \le r \le (t-1)$ darstellbar. Die Variablen p' und q' seien durch die Gleichungen $p = tp'$ und $q = tq'$ definiert; nach Konstruktion sind dann p' und q' teilerfremd.

Falls $3 \mid \dfrac{p+q}{ggT(p,q)}$, also $3 \mid p'+q'$, ist eine Zerlegung der geforderten Art z.B. durch $A := \{ z\in \mathbb{Z} \mid z = tz' + r, z' \equiv 0 \bmod 3\}$, $B := \{ z\in \mathbb{Z} \mid z = tz' + r, z' \equiv 1 \bmod 3\}$, $C := \{ z\in \mathbb{Z} \mid z = tz' + r, z' \equiv 2 \bmod 3\}$ gegeben (dabei sei wieder $t, z'\in \mathbb{Z}$ und $0 \le r \le (t-1)$).

Falls eine Zerlegung der geforderten Art existiert, betrachten wir die Zugehörigkeit der Zahlen aus der Menge $t\mathbb{Z}$ zu den drei Mengen A, B, C und die hierdurch definierten Mengen $A' := \{ z'\in \mathbb{Z} \mid tz' \in A\}$, $B' := \{ z'\in \mathbb{Z} \mid tz' \in B\}$ und $C' := \{ z'\in \mathbb{Z} \mid tz' \in C\}$. Offensichtlich bilden A', B' und C' eine Zerlegung von $\mathbb{Z}$. Nach Voraussetzung liegt für alle $z\in t\mathbb{Z}$ in jeder der Mengen A, B, C genau eine der Zahlen $z = tz'$, $z+p = t(z'+p')$ und $z+q = t(z'+q')$; damit liegt für jedes $z' \in \mathbb{Z}$ in jeder der Mengen A', B', C' genau eine der Zahlen z', $z'+p'$ und $z'+q'$. Schon aus der Bedingung der Aufgabe folgt $p\neq q$, da zusätzlich $ggT(p', q')=1$, folgt nach ursprünglichem Satz $3|(p' + q')$, was gleichbedeutend ist mit $3 \mid \dfrac{p+q}{ggT(p,q)}$.