Bundeswettbewerb Mathematik
Wissenschaftszentrum • Postfach 20 14 48 • 53144 Bonn
Fon: 0228 - 3727 411 • Fax: 0228 - 3727 413
e-mail: info@bundeswettbewerb-mathematik.de
www.bundeswettbewerb-mathematik.de

Korrekturkommission • Karl Fegert

Aufgaben und Lösungen

1. Runde 2005

Über Kommentare und Ergänzungen zu diesen Lösungsbeispielen freuen wir uns!

Anschrift oder Email–Adresse s.o.

Stand: Mai 2005

Aufgabe 1: Im Zentrum eines 2005x2005–Schachbrettes liegt ein Spielwürfel, der in einer Folge von Zügen über das Brett bewegt werden soll. Ein Zug besteht dabei aus folgenden drei Schritten:

– Man dreht den Würfel mit einer beliebigen Seite nach oben,
– schiebt dann den Würfel um die angezeigte Augenzahl nach rechts oder um die angezeigte Augenzahl nach links und
– schiebt anschließend den Würfel um die verdeckt liegende Augenzahl nach oben oder um die verdeckt liegende Augenzahl nach unten.

Das erreichte Feld ist das Ausgangsfeld für den nächsten Zug.

Welche Felder lassen sich durch eine endliche Folge derartiger Züge erreichen? Die Richtigkeit der Antwort ist zu beweisen.

Antwort: Es lässt sich jedes Feld des Schachbrettes in einer endlichen Folge solcher Züge erreichen.

Gemeinsame Bezeichnungen: Mit $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ sei der (nicht notwendigerweise erlaubte) Zug bezeichnet, bei dem der Würfel um a Felder nach rechts (bzw. um $|a|$ Felder nach links, wenn a negativ ist) und b Felder nach oben (bzw. um $|b|$ Felder nach unten, wenn b negativ ist) bewegt wird.

Führt man dann die Züge $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ hintereinander aus, so schreiben wir $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$; offensichtlich ist $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$.

1. Beweis: Es wird vorausgesetzt, dass der Spielwürfel wie üblich beschriftet ist; d.h. dass die Seiten so mit den Zahlen 1, 2, ..., 6 beschriftet sind, dass die Summe der auf gegenüberliegenden Seiten stehenden Zahlen stets 7 ergibt.

	↓	←	←	1			
	↓			↑			
	↓			↑			
	↓			↑			
	2	→	→	↑	→	↓	
				↑		↓	
				↑	0	3	

		↓	2				
		↓	↑				
		↓	↑				
		↓	↑				
		↓	↑	←	←	1	
		↓				↑	
	0	3	→	→	→	↑	

Wir weisen zuerst nach, dass der Würfel von jedem Feld aus mit einer Folge von erlaubten Zügen jedes unmittelbar in der gleichen Zeile oder Spalte benachbarte Feld erreichen kann. Durch ein geeignetes Aneinanderreihen solcher Zugfolgen kann damit jedes Feld des Schachbrettes erreicht werden; z.B. indem wir uns zuerst vom Zentrum aus auf der Mittelzeile bis zur Spalte des Zielfeldes bewegen und dann in dieser Spalte bis zum Zielfeld.

Legt man den Würfel bei einer Zugfolge von 3 Zügen so, dass der Reihe nach die Zahlen 1, 3 und 5 oben liegen, dann besteht eine mögliche erlaubte Zugfolge aus $\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (vgl. 1. Skizze); d.h. der Würfel wird vom Ausgangsfeld des Zuges (in der Skizze mit "0" bezeichnet) bei den drei Zügen über die mit "1" und "2" bezeichneten Felder insgesamt um ein Feld nach rechts bewegt. Dabei überquert der Würfel nur Felder, die in einem durch 7 Zeilen und 6 Spalten bestimmten Rechteck liegen, dessen rechte untere Ecke das Zielfeld darstellt. Mit dieser Zugfolge kann der Stein also immer dann auf das – sofern vorhanden – rechts benachbarte Feld gezogen werden, ohne dabei das Schachbrett zu verlassen, wenn nach oben noch 6 Zeilen und nach links noch 4 Spalten Platz ist.

Ist nach links nicht mehr genügend Platz, aber noch nach oben, so ziehen wir $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (vgl. 2. Skizze); d.h. wir ziehen in umgekehrter Reihenfolge und ersetzen zusätzlich bei jedem Zug "rechts" durch "links" und umgekehrt. Da das gesamte Schachbrett mehr als

9 Spalten breit ist, ist "nach links weniger als 4 Spalten Platz" gleichbedeutend mit "nach rechts mehr als 5 Spalten Platz", und diese Folge von Zügen ist möglich. Wieder wird der Würfel bei den drei Zügen insgesamt um ein Feld nach rechts bewegt; der Würfel überquert dabei aber nur Felder, die in einem durch 7 Zeilen und 6 Spalten bestimmten Rechteck liegen, dessen linke untere Ecke das Startfeld ist; d.h. die Zugfolge ist immer dann möglich, wenn nach rechts noch 5 Spalten und nach oben noch 6 Zeilen Platz ist.

Mit einer der beiden Zugfolgen kann also der Würfel immer dann auf das rechts benachbarte Feld gezogen werden, wenn der Würfel nicht in einer der obersten 6 Zeilen liegt.

In der ganzen Argumentation können wir bei jeder der beiden Zugfolgen die Richtung "nach oben" durch "nach unten" und umgekehrt ersetzen; bildlich gesprochen entspricht dies einer Spiegelung an der Zeile des Ausgangsfeldes. Die gleiche Argumentation ergibt dann, dass der Würfel stets das rechts neben ihm liegende Feld erreichen kann, wenn er nicht in den 6 untersten Zeilen liegt. Da das Spielfeld mehr als 11 Zeilen besitzt, kann der Würfel nie gleichzeitig in den 6 untersten und den 6 obersten Zeilen liegen; eine der vier vorgestellten Zugfolgen ist also immer möglich.

Jede Zugfolge ist auch umkehrbar: Wenn der Zug $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ vom einem Ausgangsfeld über das Schachbrett zum Zielfeld führt, dann ist $\begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}$ ein erlaubter Zug, der vom Zielfeld zum Ausgangsfeld führt und – da das Schachbrett rechteckig ist – das Schachbrett nicht verlässt. Damit kann der Würfel auch stets durch eine Folge von Zügen um ein Feld nach links bewegt werden.

Schließlich können wir jeden erlaubten Zug auch in einer um 90° gegen den Uhrzeigersinn gedrehten Form durchführen. Hierzu legen wir den Würfel auf das bisher oben liegende Feld und ersetzen bei der Zugfolge und in der Argumentation die Richtungen "oben" bzw. "unten" durch "links" bzw. "rechts" sowie "links" bzw. "rechts" durch "unten" bzw. "oben" und zusätzlich noch "Spalten" durch "Zeilen" und umgekehrt.

Damit gibt es zu jedem Ausgangsfeld stets eine Zugfolge, mit der der Würfel von jedem Feld auf beide in der Spalte angrenzenden Felder gezogen werden kann.

Variante (etwas knapp formuliert): Wir betrachten zunächst den Fall, dass das Zielfeld im rechten oberen Quadranten des Schachbrettes liegt; d.h. dass es vom Zentrum durch eine Folge von r Schritten nach rechts jeweils auf das Nachbarfeld in der Mittelzeile und anschließend durch eine Folge von s Schritten nach oben jeweils auf das oben benachbarte Feld in der Spalte des Zielfeldes erreicht werden kann ($0 \le r$, $s \le 1002$).

Wir führen nun, beginnend vom Zentrum, r–mal die Zugfolge $\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ aus; dabei bewegt sich der Stein r mal um genau ein Feld nach rechts. Die Zugfolge ist auch möglich, da der Würfel nur Felder überquert, die nicht unterhalb und höchstens 6 Felder oberhalb des jeweiligen Ausgangsfeldes liegen und die höchstens 4 Felder links vom jeweiligen Ausgangsfeld und nicht rechts vom jeweiligen Zielfeld liegen; von jedem Feld der rechten Hälfte der Mittelzeile hat man so viel Platz zur Verfügung.

Anschließend führen wir s mal die Zugfolge $\begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ aus; dabei bewegt sich der Würfel s mal um genau ein Feld nach oben. Die Zugfolge ist auch möglich, da der Würfel nur Felder überquert, die nicht rechts und höchstens 6 Felder links vom jeweiligen Ausgangsfeld liegen und die höchstens 4 Felder unterhalb des jeweiligen Ausgangsfeldes und nicht oberhalb des jeweiligen Zielfeldes liegen; von jedem Feld im rechten oberen Quadranten hat man soviel Platz zur Verfügung.

Falls das Zielfeld im linken oberen Quadranten liegt, d.h. wenn das Zielfeld durch eine Folge von r Schritten nach oben und von anschließend s Schritten nach links erreicht werden kann ($0 \le r$, $s \le 1002$), führen wir r–mal die Zugfolge $\begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ aus; dabei bewegt sich der Würfel um r Felder nach oben. Anschließend führen wir s–mal die Zugfolge

$\begin{pmatrix}1\\-6\end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ aus, dabei bewegt sich der Würfel um s Felder nach links. Die Argumentation für die Durchführbarkeit der Züge verläuft analog.

Falls das Zielfeld im linken unteren Quadranten oder im rechten unteren Quadranten liegt, verwenden wir die Zugfolge, die zu demjenigen Feld führt, das punktsymmetrisch zum Zielfeld liegt; wir ersetzen aber jede Zahl x in der Zugfolge durch die Zahl $-x$. Jede Zugfolge, die den Würfel ursprünglich um ein Feld nach oben oder nach rechts bzw. nach links führte, führt nun um ein Feld nach unten oder nach links bzw. nach rechts.

2. Beweis: Wir zeigen zunächst, dass wir jedes Feld erreichen können, das höchstens 6 Spalten und höchstens 6 Zeilen vom Zentrum entfernt ist; die Menge dieser Felder nennen wir "Startbereich". Hierzu legen wir zunächst vor jedem Zug den Würfel so, dass die Zahl 1 oben liegt (dann liegt die 6 unten), oder so, dass die 6 oben liegt (dann liegt die 1 unten). Auf diese Art können wir, ausgehend vom in der Skizze mit "1" bezeichneten Zentrum, der Reihe nach die in der Skizze mit den Zahlen "2", ..., "24" bezeichneten Felder des Schachbrettes erreichen, also die Randfelder eines Quadrates mit Kantenlänge 7. Vom Feld 19 kann auch das Feld 20' erreicht werden, das benachbart zur einen Ecke dieses Quadrates ist (in der Skizze ebenfalls grau markiert). Wenn wir nun vom Feld 20' aus die gleiche Zugfolge durchführen, erreichen wir so alle Felder, die ein Feld weiter links liegen als die bisher erreichten (die neu erreichten Felder sind in der Skizze mit "27" bis "43" bezeichnet). Dies wiederholen wir weitere 6 Male und erreichen so alle Felder, die in einem Rechteck liegen, das durch die Mittelzeile und die 6 darüber liegenden Zeilen sowie die Mittelspalte und die 6 jeweils links und rechts anschließenden Spalten begrenzt wird; das ist die obere Hälfte des Startbereiches.

38	19	2	17	4	15	6	13		
31	12					39	20		
40	21					30	11		
29	10					41	22		
42	23					28	9		
27	8					43	24		
20'	1	18	3	16	5	14	7		

Wenn wir, beginnend vom Startfeld 1, die gleichen Züge wie oben ausführen, dabei aber die Richtungen "nach oben" mit "nach unten" vertauschen (dies ist nach der Zugregel erlaubt), erreichen wir die Felder des Rechtecks, das durch Spiegeln des oben beschriebenen Rechtecks an der Mittelzeile entsteht; dies ist genau die untere Hälfte des Startbereiches.

Um den Beweis zu vervollständigen, genügt es also zu zeigen, dass jedes Zielfeld auf dem Schachbrett von einem Feld des Startbereiches in einer Folge erlaubter Züge erreicht werden kann. Dazu konstruieren wir zunächst eine Folge erlaubter Züge vom Zielfeld in den Startbereich, schreiben uns diese Züge auf und führen später die Züge vom erreichten Feld im Startbereich in umgekehrter Reihenfolge rückwärts durch; dies ist stets möglich., weil es zum Zug $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ immer den "Gegenzug" $\begin{pmatrix}-a\\-b\end{pmatrix}$ gibt, der – das Schachbrett ist rechteckig – immer über das Spielbrett führt. Damit kann der Würfel auch stets durch eine Folge von Zügen um ein Feld nach links bewegt werden., was ja möglich ist.

Ein möglicher Algorithmus für eine solche Zugfolge ist z.B. "Lege den Würfel so, dass eine beliebige Seite oben liegt. Befindet sich der Würfel rechts vom Zentrum, ziehe die oben liegende Zahl nach links, sonst nach rechts; befindet sich der Würfel oberhalb vom Zentrum, ziehe die unten liegende Zahl nach unten, sonst nach oben." Diese Züge sind immer möglich, da das Schachbrett mehr als 6 Zeilen ober– und unterhalb der Mittelzeile und mehr als 6 Spalten rechts und links von der Mittelspalte besitzt. Bei jedem solchen Zug verringert sich der Abstand zur Mittelspalte oder es wird ein Feld erreicht, das höchstens 6 Spalten von der Mittelspalte entfernt ist; entsprechendes gilt für die Mittelzeile. Nach einer endlichen Zahl von Zügen befindet sich der Würfel also höchstens 6 Spalten und höchstens 6 Zeilen vom Zentrum entfernt, also im Startbereich.

3. Beweis (Widerspruchsbeweis mit Minimalprinzip): Wir legen ein Koordinatensystem so über das Schachbrett, dass der Mittelpunkt des Zentralfeldes die Koordinaten (0|0), die Mittelpunkte aller Spielfelder ganzzahlige Koordinaten ($a|b$) mit $-1002 \le a,b \le 1002$ besitzen.

Zunächst stellen wir fest, dass man, wenn man mit einer Zugfolge das Feld $(a|b)$ erreichen kann, auch die Felder $(-a|b)$, $(a|-b)$ und $(-a|-b)$ erreichen kann: Dies folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass das Spielfeld achsensymmetrisch zur Mittelzeile und auch zur Mittelspalte ist und man nach Zugregel in jedem Zug die Richtungen "nach oben" und "nach unten" vertauschen kann und ebenso die Richtungen "nach rechts" und "nach links"; d.h. man kann auch den Zug an den genannten Achsen spiegeln. Es genügt also zu zeigen, dass man alle Felder $(a|b)$ mit $a \geq 0$ und $b \geq 0$ erreichen kann.

Wäre nun mindestens ein solches Feld nicht erreichbar, so könnten wir – da $a \geq 0$ und $b \geq 0$ – aus all diesen unerreichbaren Feldern eines aussuchen, für das $a+b$ einen minimalen Wert annimmt. Da $(0|0)$ erreichbar ist, ist $a+b > 0$, also $a > 0$ oder $b > 0$.

Falls $a > 0$, hat das Feld $(a-1|b)$ nicht–negative Koordinaten; und weil $a-1+b < a+b$, ist es nach Annahme erreichbar. Im Widerspruch zur Annahme ist aber von hier das Feld $(a|b)$ erreichbar, nämlich z.B. mit der Zugfolge $\begin{pmatrix}-4\\-3\end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Dabei ist diese Zugfolge tatsächlich durchführbar: Sie führt nur über Felder, die links und unterhalb vom Feld $(a|b)$ liegen und höchstens 4 Spalten und höchstens 6 Zeilen vom Feld $(a|b)$ entfernt sind; da das Ausgangsfeld nicht–negative Koordinaten hat und das Spielfeld mehr als 8 Spalten und mehr als 12 Zeilen hat, ist dieser Platz auch immer vorhanden.

Falls $b > 0$, folgern wir mit völlig analoger Argumentation (man vertausche die Begriffe "Spalte" und "Zeile"), dass das Feld $(a|b-1)$ erreichbar ist und dass im Widerspruch zur Annahme die Zugfolge $\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ durchführbar ist und auf das Feld $(a|b)$ führt.

4. Beweis: Über die Aufgabenstellung hinaus wird bewiesen, dass jedes Feld auch dann in einer endlichen Folge solcher Züge erreicht werden kann, wenn die Seiten des Würfels irgendwie mit den Zahlen 1, 2, ..., 6 beschriftet sind; d.h. wenn man auf die Forderung verzichtet, dass die Summe der Zahlen auf gegenüberliegenden Seiten immer 7 beträgt.

Zunächst stellen wir fest, dass jede Spiegelung eines zulässigen Zuges an der Spalte des Ausgangsfeldes, an der Zeile des Ausgangsfeldes oder am Ausgangsfeld selbst prinzipiell wieder einen zulässigen Zug darstellt (der allerdings wegen Erreichen des Randes des Schachbrett evtl. nicht durchführbar ist). Diese Spiegelung entspricht nämlich einer Vertauschung in der Zugregel von "rechts" mit "links" und / oder "oben" mit "unten", was laut Zugregel möglich ist. Genauso ist das Spiegelbild eines erlaubten Zuges an einer Diagonalen durch das Ausgangsfeld wieder ein erlaubter Zug: hier werden in der Zugregel die Begriffe "links" bzw. "rechts" mit den Begriffen "unten" bzw. "oben" vertauscht; dies ist dann möglich, wenn wir gleichzeitig den Würfel mit der Grundseite nach oben legen.

Wir werden zeigen, dass es für jedes Ausgangsfeld eine Zugfolge gibt, die den Würfel um ein Feld nach rechts führt und gleichzeitig nur über Felder führt, die in einem genügend kleinen Rechteck liegen, in dessen rechter unterer Ecke das Zielfeld liegt oder in dessen linker unterer Ecke das Ausgangsfeld liegt. Durch evtl. mehrfaches Spiegeln dieser Zugfolge an der Zeile, der Spalte oder an den Diagonalen des Ausgangsfeldes erhalten wir dann Zugfolgen, die den Würfel nicht nur um ein Feld nach links, nach unten oder nach oben führen, sondern auch das oben beschriebene Rechteck in das Innere des Schachbrettes abbilden; d.h. bei der sich durch die Spiegelung ergebenden Zugfolge verlässt der Würfel das Schachbrett nicht.

Bei der Konstruktion einer solchen Zugfolge stellen wir zunächst fest, dass die Anzahl der Würfelseiten mit einer geradzahligen Beschriftung (also 2, 4 oder 6) ungerade ist. Deswegen gibt es bei jeder Beschriftung der Würfelseiten eine Seite, die mit einer geraden Zahl beschriftet ist und deren gegenüberliegende Seite nicht mit einer geraden, also einer ungeraden Zahl beschriftet ist. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1: Das einzige solche Paar ist (3;6).

Dann sind die beiden anderen Paare (1;5) und (2;4); die Zugfolgen

$$\begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix}-3\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

bestehen also aus lauter erlaubten Zügen und bewegen den Würfel insgesamt um ein Feld nach rechts; dabei überqueren beide Zugfolgen nur Felder, die höchstens 6 Zeilen oberhalb des

Ausgangsfeldes liegen, die erste zusätzlich nur solche Felder, die höchstens 3 Felder links vom Ausgangsfeld liegen, die zweite nur solche Felder, die höchstens 4 Spalten rechts vom Ausgangsfeld liegen. Da das Schachbrett mehr als 7 Spalten hat, kann kein Feld sowohl nach links weniger als 3 und nach rechts weniger als 4 Spalten Platz haben. Liegt das Ausgangsfeld also nicht in den obersten 6 Zeilen, so ist mindestens eine der beiden Zugfolgen möglich.

Spiegeln wir die Zugfolgen an der Zeile des Ausgangsfeldes, so erhalten wir – wie oben begründet – wieder erlaubte Zugfolgen, die dann möglich sind, wenn das Startfeld nicht in den untersten 6 Zeilen liegt und die den Würfel ebenfalls um ein Feld nach rechts führen. Da kein Feld sowohl in den obersten wie untersten 6 Zeilen liegen kann, ist somit gezeigt, dass es für jedes Ausgangsfeld eine Zugfolge gibt, die den Würfel um ein Feld nach rechts führt.

Fall 2: Es gibt ein Paar gegenüberliegender Seiten, von denen eine mit einer ungeraden Zahl $u \in \{1, 3, 5\}$, die andere mit einer geraden Zahl $g \in \{2, 4, 6\}$, aber $(u;g) \neq (3;6)$ beschriftet ist. Dann sind für jedes Paar $(u;g)$ u.a. die acht Züge $\begin{pmatrix} \pm g \\ \pm u \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \pm u \\ \pm g \end{pmatrix}$ möglich.

Mit $r \odot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ sei für $r \geq 0$ die aus r Zügen bestehende Zugfolge $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \oplus ... \oplus \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ bezeichnet, für $r<0$ die aus $|r|$ Zügen bestehende Zugfolge $\begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix} \oplus ... \oplus \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}$.

In beiden Fällen ist $r \odot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra \\ rb \end{pmatrix}$

u	g	s
1	2	1
1	4	2
1	6	3
3	2	3
3	4	3
3	6	entfällt
5	2	7
5	4	5
5	6	5

Wir betrachten nun die Zugfolge

$$s \odot \begin{pmatrix} -g \\ u \end{pmatrix} \oplus (g-s) \odot \begin{pmatrix} g \\ u \end{pmatrix} \oplus u \odot \begin{pmatrix} u \\ -g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -gs + (g-s)g + u^2 \\ su + (g-s)u - ug \end{pmatrix}$$

$= \begin{pmatrix} u^2 - 2gs + g^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und wählen ein positives ganzzahliges s so, dass $u^2 - 2gs + g^2 = 1$; dies ist für alle betrachteten $(u|g)$ möglich, wie einfaches Nachrechnen der Tabelle zeigt. Die angegebene Zugfolge bewegt den Würfel also insgeamt um ein Feld nach rechts.

Eine einfache Untersuchung der Vorzeichen ergibt: Unabhängig davon, ob $g-s$ negativ oder nicht negativ ist, geht man bei dieser Zugfolge zuerst sg bzw. $sg+|g-s|g$ Zügen nach links und dann die restlichen Züge wieder nach rechts, ebenso zuerst $su+|g-s|u$ bzw. su Zügen nach oben und dann die restlichen Züge wieder nach unten; der Würfel bewegt sich also nie auf Feldern, die sich rechts oder unterhalb vom Zielfeld befinden. Gleichzeitig zieht der Würfel nie weiter als 36 Felder nach links und nie weiter als 35 Felder nach oben (einfaches Nachrechnen der Werte aus der Tabelle); d.h. er bewegt sich in einem Rechteck, das immer vollständig im Innern des Schachbrettes liegt.

Eine Umkehrung der Zugreihenfolge mit gleichzeitigem Multiplizieren der unteren Einträge mit (–1) bewegt den Würfel wieder insgesamt um ein Feld nach rechts, wobei der Würfel zuerst nach rechts, dann nach links und zuerst nach oben und dann nach unten gezogen wird. Er bewegt sich also nur auf Feldern, die sich rechts und nicht unterhalb des Ausgangsfeldes befinden.

Bemerkung: Der Beweis kann natürlich für eines der Paare (1|6), (3|4), (5|2) allein geführt werden und stellt damit einen Beweis für die spezielle Aussage der ursprünglichen Aufgabenstellung dar.

Aufgabe 2: Die ganze Zahl a habe die Eigenschaft, dass $3a$ in der Form $x^2 + 2y^2$ mit ganzen Zahlen x, y darstellbar ist.

Man beweise, dass dann auch a in dieser Form darstellbar ist.

1. Beweis: Seien a, x, y ganze Zahlen mit $3a = x^2 + 2y^2$. Die linke Seite ist ganzzahliges Vielfaches von 3, also auch die rechte. Notwendige Bedingung für die Zahlen x und y ist also, dass $x^2 + 2y^2$ bei Division durch 3 den Rest 0 lässt. Diesen Rest kann man aus den Resten der Zahlen x und y berechnen (vgl. Tabelle):

Reste bei Division durch 3.		0	1	2	y
		0	1	1	y^2
		0	2	2	$2y^2$
0	0	0	2	2	
1	1	1	0	0	
2	1	1	0	0	
x	x^2			$x^2 + 2y^2$	

Wenn also ganzzahlige Werte a, x, y die Bedingung $3a = x^2 + 2y^2$ erfüllen, muss notwendigerweise einer der beiden Fälle eintreten:

Fall1: x und y lassen bei Division durch 3 den gleichen Rest.

Dann lassen sowohl $x+2y$ als auch $x-y$ bei Division durch 3 den Rest 0; es sind also $X := \frac{x+2y}{3}$ und $Y := \frac{x-y}{3}$ beides ganze Zahlen und wir haben mit

$$X^2+2Y^2 = \left(\frac{x+2y}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{x-y}{3}\right)^2 = \frac{x^2+4xy+4y^2+2x^2-4xy+2y^2}{9} = \frac{3x^2+6y^2}{9} = \frac{x^2+2y^2}{3} = a$$

eine Darstellung der gewünschten Form nachgewiesen.

Fall 2: x lässt bei Division durch 3 den Rest 1 und y den Rest 2 oder umgekehrt.

Dann lassen sowohl $x-2y$ als auch $x+y$ bei Division durch 3 den Rest 0; es sind also $X := \frac{x-2y}{3}$ und $Y := \frac{x+y}{3}$ beides ganze Zahlen und wir haben mit

$$X^2 + 2Y^2 = \left(\frac{x-2y}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{x+y}{3}\right)^2 = \frac{x^2-4xy+4y^2+2x^2+4xy+2y^2}{9} = \frac{3x^2+6y^2}{9} = a$$

wieder eine Darstellung der gewünschten Form nachgewiesen.

Variante zur Vermeidung der Fallunterscheidung: Da $3a = x^2 + 2y^2 = (-x)^2 + 2y^2$, lassen also entweder x und y oder $(-x)$ und y bei Division durch 3 den gleichen Rest; o.B.d.A. tritt also Fall 1 ein.

2. Beweis (eigentlich Variante des 1. Beweises): Die Gleichung $3a = x^2 + 2y^2$ ist äquivalent zu $3a - 3y^2 = x^2 - y^2$ bzw. $3(a - y^2) = (x + y)(x - y)$. Da a, x und y alle ganzzahlig sind, sind dies auch alle Faktoren auf der rechten und linken Seite.

Die Zahl 3 ist Teiler der linken Seite. Da 3 eine Primzahl ist, ist 3 auch Teiler von mindestens einem Faktor auf der rechten Seite, also von $(x + y)$ oder $(x - y)$. Es gibt also eine ganze Zahl k, für die die Gleichung $3k = (x \mp y)$ bzw. $x = 3k \pm y$ für eines der Zeichen '+' oder '–' eine wahre Aussage ist. Dies setzen wir in die ursprüngliche Gleichung ein und erhalten so

$$3a = (3k \pm y)^2 + 2y^2 = 9k^2 \pm 6ky + y^2 + 2y^2 = 3(3k^2 \pm 2ky + y^2);$$

$$\Leftrightarrow \quad a = (3k^2 \pm 2ky + y^2) = k^2 \pm 2ky + y^2 + 2k^2 = (k \pm y)^2 + 2k^2 .$$

Mit ganzzahligen k und y sind auch $X := k \pm y$ und $Y := k$ ganzzahlig; wir haben also wie verlangt für a die Darstellung $a = X^2 + 2Y^2$ nachgewiesen.

Bemerkungen: In den beiden Beweisen werden die gleichen Werte X und Y wie im 1. Beweis konstruiert.

Die Menge M := $\{z \in \mathbb{Z} \mid \exists x, y \in \mathbb{Z}$ mit $z = x^2 + 2y^2\}$ ist bezüglich der Multiplikation abgeschlossen; dies weist man mit der Identität $(a^2+2b^2)(c^2+2d^2) = (ac-2bd)^2+2(ad+bc)^2$ nach.

Hintergrund dieser Aufgabe ist der Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$, d.h. die Menge der Zahlen $a+b\sqrt{-2}$ mit $a,b\in\mathbb{Z}$ und der auf diesem Ring definierten Norm $|a+b\sqrt{-2}| := a^2 + 2b^2$. Die obige Identität besagt "Die Norm eines Produktes zweier Faktoren ist das Produkt der Normen der beiden Faktoren".

Es lässt sich beweisen, dass man in der Behauptung die Zahl 3 durch jede Zahl ersetzen kann, die ihrerseits in der Form $x^2 + 2y^2$ dargestellt werden kann:

Mit höherer Mathematik (Reziprozitätsgesetze) kann man nachweisen, dass die nicht–negative ganze Zahl z genau dann in der Form $z = x^2 + 2y^2$ ($x,y\in\mathbb{Z}$) dargestellt werden kann, wenn in der Primfaktor-zerlegung (PFZ) von z jeder Primfaktor aus der Restklassen 5 $\bmod$ 8 und jeder Primfaktor der Restklasse 7 $\bmod$ 8 nur in gerader Vielfachheit vorkommt. Wenn also in den PFZen von z und von za jeder Primfaktor der Restklassen 5 und 7 $\bmod$ 8 nur in gerader Vielfachheit vorkommt, dann kommt er auch in der PFZ von a nur in gerader Vielfachheit vor.

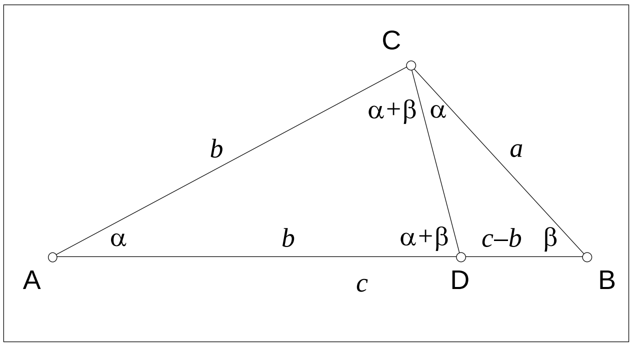
Damit lässt sich folgende Verallgemeinerung der Aussage der Aufgabe beweisen:

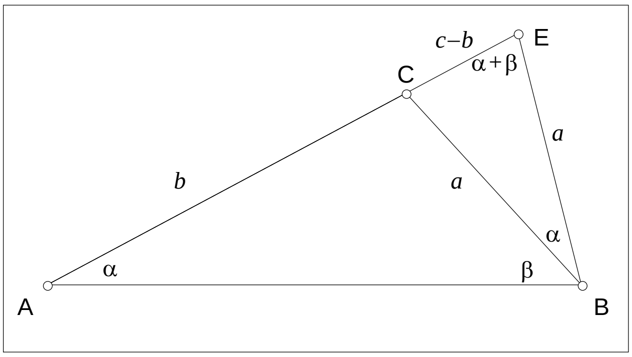
Satz: Die nicht–negativen ganzen Zahlen z und a lassen sich genau dann beide in der Form $x^2 + 2y^2$ mit ganzen Zahlen x,y darstellen, wenn sich z und za beide in dieser Form darstellen lassen.

Aufgabe 3: Den Seiten a, b, c eines Dreiecks liegen die Winkel α, β, γ gegenüber. Es sei ferner $3\alpha + 2\beta = 180°$.

Man beweise, dass dann $a^2 + bc = c^2$ ist.

Bemerkung: Die ausformulierten Beweise sind mit wenig Aufwand umkehrbar; es gilt also über die Aufgabenstellung hinaus $3\alpha + 2\beta = 180° \Leftrightarrow a^2 + bc = c^2$.





1. Beweis (über eine Verhältnisgleichung aus ähnlichen Dreiecken): Es ist $\gamma = 180° - (\alpha+\beta) = (3\alpha+2\beta) - (\alpha+\beta) = (\alpha+\beta) + \alpha$. Wir können also im Innern der Strecke AB einen Punkt D so wählen, dass CD den Winkel $\angle ACB$ in die Teilwinkel $\angle ACD = (\alpha+\beta)$ und $\angle DCB = \alpha$ aufteilt.

Dann stimmen ΔABC und ΔCBD in zwei Winkeln überein, sind also ähnlich und es gilt

$$\overline{BC} : \overline{BA} = \overline{BD} : \overline{BC} \quad (*).$$

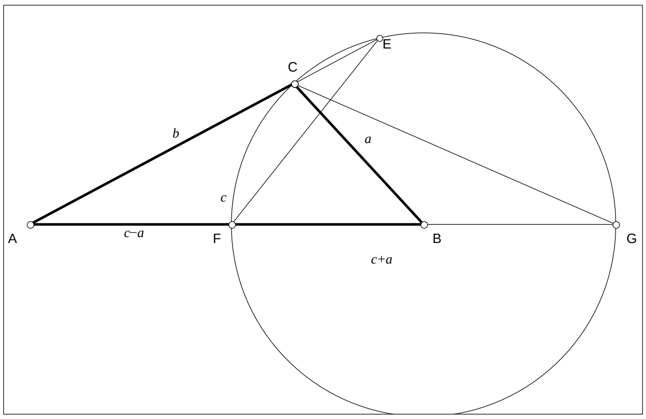
Aus dem Außenwinkelsatz im Dreieck ΔDBC folgt, dass $\angle CDA = (\alpha+\beta)$, also $\angle CDA = \angle ACD$ und somit das Dreieck ΔCAD gleichschenklig mit $\overline{DA} = \overline{CA} = b$ ist. Da D innerer Punkt von AB ist, ist $\overline{BD} = \overline{BA} - \overline{DA} = (c-b) > 0$. Dies setzen wir in (*) ein und erhalten $a : c = (c-b) : a$, was äquivalent zur Behauptung $a^2 + bc = c^2$ ist.

Variante: Anstatt eines Punktes D auf AB mit $\overline{BD} = c-b > 0$ kann man auch einen Punkt E auf der Halbgeraden (AC außerhalb von AC wählen mit $\overline{AE} = c$, also $\overline{CE} = c-b$. Dann hat das gleichschenklige Dreieck ΔBAE den Basiswinkel $\angle CEB$ mit der Weite $\frac{1}{2}\cdot(180°-\alpha) = \frac{1}{2}\cdot(3\alpha+2\beta-\alpha) = \alpha+\beta$. Nach Außenwinkelsatz im Dreieck ΔABC folgt aber auch $\angle BCE = \alpha+\beta$; damit sind das Dreieck ΔCBE mit seinen Seiten $c-b$ und a und das Dreieck ΔEAB mit den Seiten a und c ähnlich, was zur Gleichung $a : c = (c-b) : a$ und damit zur Behauptung $a^2 + bc = c^2$ führt.

2. Beweis (mit cos–Satz; vgl. Figur zur Variante des 1. Beweises): Weil $\gamma = 180° - (\alpha+\beta) = 2\alpha+\beta > \beta$, ist auch $c > b$. Damit gibt es auf der Halbgeraden (AC einen Punkt E außerhalb von AC mit $\overline{AE} = \overline{AB}$. Nach Konstruktion ist das Dreieck ΔBAE gleichschenklig mit Basis BE; zusammen mit der Voraussetzung folgt $\angle AEB = \frac{1}{2}\cdot(180°-\alpha) = \frac{1}{2}\cdot(3\alpha+2\beta-\alpha) = \alpha+\beta$. Nach Außenwinkelsatz im Dreieck ΔABC ist auch $\angle BCE = \alpha+\beta$; damit ist das Dreieck ΔCBE ebenfalls gleichschenklig mit Basis CE; deren Länge ist $c-b$.

Das Lot von B auf CE trifft also CE in der Mitte; aus dem entstehenden rechtwinkligen Dreieck liest man sofort ab (es ist $\gamma = 2\alpha+\beta > \frac{1}{2}(3\alpha+2\beta) = 90°$; also $\cos(\gamma) < 0$): $\cos(\gamma) = -\frac{\overline{CE}}{2} : a$, also $2a\cdot\cos(\gamma) = -(c-b)$. Mit dem cos-Satz im Dreieck ΔABC erhält man wie gewünscht $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma) = a^2 + b^2 + b(c-b) = a^2 + bc$.

3. Beweis (Umfangswinkelsatz): Da alle Streckenlängen positiv sind, ist $a^2 + bc = c^2 \Leftrightarrow bc = (c+a)(c-a)$ $\Leftrightarrow \frac{c-a}{c} = \frac{b}{c+a}$ (*). Es genügt also nachzuweisen, dass aus der Voraussetzung zwei ähnliche Dreiecke konstruiert werden können, von denen eines die Seiten c und $c-a$, das andere in entsprechender Lage die Seiten $c + a$ und b hat.

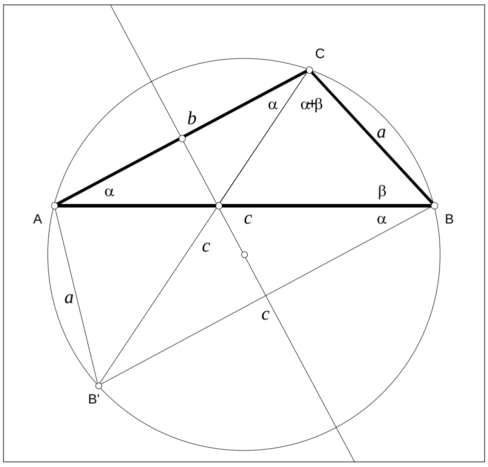


Zu dieser Konstruktion betrachten wir den Kreis um B mit Radius a.

Aus $\gamma = 180° - (\alpha+\beta) = (3\alpha+2\beta) - (\alpha+\beta) = (\alpha+\beta) + \alpha$ folgt $\gamma > \alpha$ und somit $c > a$. Der Kreis schneidet also die Halbgerade (AB in einem inneren Punkt der Strecke AB (diesen nennen wir F) und in einem weiteren Punkt (diesen nennen wir G). Ferner schneidet dieser Kreis die Halbgerade (AC außer in C in einem weiteren (evtl. mit C zusammenfallenden) Punkt, diesen nennen wir E. Die Dreiecke ΔAEF und ΔAGC erfüllen dann die geforderten Bedingungen:

Nach Umfangswinkelsatz ist $\angle CEF = \angle CGF$, also stimmen die Dreiecke ΔAEF und ΔAGC nicht nur im Winkel bei A überein, sondern auch im Winkel bei E bzw. C, sind also ähnlich.

Offensichtlich ist $\overline{AF} = c-a$, $\overline{AG} = c+a$, $\overline{AC} = b$. Schließlich ist das Dreieck ΔCBE gleichschenklig; zusammen mit Außenwinkelsatz im Dreieck ABC ist also $\angle CEB = \angle BCE = (\alpha+\beta)$. Hieraus folgt dann auch $\angle EBA = 180° - \angle BAC - \angle AEB = (3\alpha + 2\beta) - \alpha - (\alpha+\beta) = (\alpha+\beta)$, das Dreieck ΔBAE ist also ebenfalls gleichschenklig und $\overline{AE} = \overline{AB} = c$.



4. Beweis (Satz des Ptolemäus): Wir werden aus den Bedingungen der Aufgabe ein Sehnenviereck konstruieren, dessen Diagonalen beide die Länge c haben und bei dem die Seiten eines Paares gegenüberliegender Seiten beide die Länge a, die Seiten des anderen Paares die Seitenlängen b bzw. c haben. Nach dem Satz des Ptolemäus gilt dann sofort wie gewünscht $c \cdot c = a \cdot a + b \cdot c$.

Das Bild des Punktes B bei der Achsenspiegelung an der Mittelsenkrechten der Seite AC nennen wir B'. Das Viereck AB'BC erfüllt dann die oben genannten Bedingungen:

Da die Mittelsenkrechte auf AC den Umkreismittelpunkt enthält, führt diese Achsspiegelung den Umkreis des Dreiecks ΔABC in sich über; damit ist AB'BC ein Sehnenviereck.

Aus Symmetriegründen haben die Diagonalen gleiche Länge, es ist also $\overline{B'C} = \overline{AB} = c$; ebenso haben die gegenüberliegenden Seiten AB' und CB gleiche Länge; es ist also $\overline{AB'} = \overline{CB} = a$.

Weiter ist aus Symmetriegründen $\angle BAC = \angle ACB' = \alpha$; nach Umfangswinkelsatz auch $\angle ABB' = \angle ACB' = \alpha$. Weiter ist nach den Bedingungen der Aufgabe $3\alpha + 2\beta = 180°$, also $\gamma = 180° - (\alpha+\beta) = (3\alpha + 2\beta) - (\alpha+\beta) = \alpha + (\alpha+\beta)$, d.h. die Diagonale CB' teilt den Winkel bei C in einen Winkel der Weite α und einen der Weite $\alpha+\beta$. Damit hat das Dreieck ΔBB'C bei B und bei C gleiche Winkel, ist also gleichschenklig. Damit ist auch $\overline{B'B} = \overline{AB} = c$; die Seiten des zweiten Paares haben also die Längen b bzw. c.

5. Beweis (über Flächenbetrachtungen): Die Behauptung $a^2 + bc = c^2$ ist nachgewiesen, wenn das Quadrat über der Seite c zerlegt werden kann in ein Rechteck mit den Seiten b und c sowie ein weiteres Rechteck, das flächengleich mit dem Quadrat über der Seite a ist.

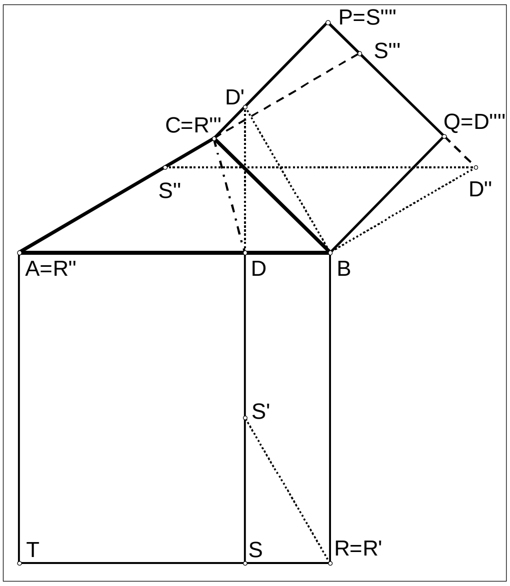
Mit D bezeichnen wir denjenigen Punkt auf der Halbgeraden (AB, für den AD und AC die gleiche Länge haben; da $\gamma = 180° - (\alpha+\beta) = 2\alpha+\beta > \beta$, also auch $c > b$, ist D innerer Punkt von AB. Weiter bezeichnen wir die äußeren Ecken der über BC und AB nach außen errichteten Quadrate mit P und Q bzw. R und T. Schließlich schneidet die Senkrechte auf AB durch D die Quadratseite CP (oder deren Trägergerade) und die Quadratseite RT in Punkten, die wir mit D' bzw. S bezeichnen.

Das Quadrat über der Seite c wird von der Strecke DS in zwei Rechtecke ADST und DBRS zerlegt, von denen das Rechteck ADST die Kantenlängen b und c, also den Flächeninhalt bc hat. Das Rechteck DBRS werden wir durch eine Verkettung von vier flächentreuen Abbildungen in das Quadrat über der Seite a überführen.

Zunächst stellen wir fest, dass $\angle$ACD Basiswinkel im nach Konstruktion gleichschenkligen Dreieck ΔDAC ist. Seine Weite ist also $^1/_2(180° - \alpha) = {}^1/_2(3\alpha + 2\beta - \alpha) = (\alpha+\beta)$.

Nach Konstruktion erscheint die Strecke D'B sowohl von D als auch von C aus unter einem Winkel von 90°. Die Punkte B, D, C und D' liegen somit alle auf dem Thaleskreis über BD'. Nach Umfangswinkelsatz schließen wir hieraus

$$\angle DD'B = \angle DCB = \gamma - \angle ACD = [180° - (\alpha+\beta)] - (\alpha+\beta) = 3\alpha + 2\beta - 2(\alpha+\beta) = \alpha.$$



Nun unterwerfen wir in einer ersten Abbildung das Rechteck DBRS derjenigen Scherung mit Achse BR, die den Punkt D in den Punkt D' überführt. Da eine Scherung parallelentreu ist, ist das entstehende Viereck D'BRS' ein Parallelogramm, es hat bei D' und bei R Innenwinkel mit der Weite α.

Anschließend drehen wir in einer zweiten Abbildung das Parallelogramm D'BRS' um B um 90°, sodass die Seite BR in die Seite BA überführt wird; dies ist möglich, da BRTA ein Quadrat ist. Da das Dreieck ABC bei A ebenfalls einen Innenwinkel der Weite α besitzt, liegt das Bild S'' von S' auf der Seite AC. Weiter wird – da BCPQ ein Quadrat ist – die Gerade (CP) in die Gerade (PQ) überführt, so dass das Bild D'' auf der Geraden (PQ) zu liegen kommt.

In einer dritten Abbildung unterwerfen wir das Parallelogramm D''BR''S'' derjenigen Scherung mit Achse BD'', die den Punkt A=R'' in den Punkt C überführt. Da die Scherung parallelentreu ist, kommt dabei der Punkt S''' auf der Parallelen zu BR''' = BC durch Q, also auf der Geraden (PQ) zu liegen.

Schließlich unterwerfen wir in einer vierten Abbildung das Parallelogramm D''BR'''S''' derjenigen Scherung mit Achse BR''' = BC, die S''' in P überführt. Damit liegen drei Ecken des entstehenden Parallelogramms auf den Ecken des Quadrates QBCP, also auch die vierte.

Insgesamt haben wir damit das Rechteck DBRS mit flächentreuen Abbildungen in das Quadrat QBCP überführt.

6. Beweis (Sinus und Cosinus–Satz): In jedem Dreieck gilt nach Sinus–Satz $b : c = \sin(\beta) : \sin(\gamma)$, und nach Cosinus–Satz $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$. Ferner benützen wir die beiden bekannten, ohne Einschränkung gültigen goniometrischen Formeln $\sin(90°\pm\varphi) = \cos(\varphi)$ und $2\cos(\varphi)\cos(\psi) = \cos(\varphi-\psi) + \cos(\varphi+\psi)$ (*).

Aus der Voraussetzung $3\alpha + 2\beta = 180°$ folgt sofort $\beta = 90° - \frac{3}{2}\alpha$, und hieraus $\gamma = 180° - (\alpha+\beta) = 90° + \frac{1}{2}\alpha$. Mit Sinus–Satz ergibt sich $\frac{b}{c} = \frac{\sin(\beta)}{\sin(\gamma)} = \frac{\sin(90° - \frac{3}{2}\alpha)}{\sin(90° + \frac{1}{2}\alpha)} = \frac{\cos(\frac{3}{2}\alpha)}{\cos(\frac{1}{2}\alpha)}$. Da alle beteiligten Winkel kleiner als 180° sind, kann – wie auch in den folgenden Ausdrücken – der Nenner nicht den Wert Null annehmen.

Nun können wir (*) anwenden: Es ist $2\cos(\alpha)\cos(\frac{1}{2}\alpha) = \cos(\frac{1}{2}\alpha) + \cos(\frac{3}{2}\alpha)$; dies führt nach Division durch $\cos(\frac{1}{2}\alpha) \neq 0$ zur äquivalenten Aussage $2\cos(\alpha) = 1 + \frac{\cos(\frac{3}{2}\alpha)}{\cos(\frac{1}{2}\alpha)}$ oder $2\cos(\alpha) = 1 + \frac{b}{c}$. Multiplikation mit $bc \neq 0$ ergibt $2\,bc\cos(\alpha) = bc + b^2$, was nach Cosinus–Satz gleichbedeutend mit $b^2 + c^2 - a^2 = bc + b^2$ oder der Behauptung $c^2 = a^2 + bc$ ist.

Aufgabe 4: Für welche positiven ganzen Zahlen n kann man die n Zahlen 1, 2, 3, ..., n so in einer Reihe anordnen, dass für je zwei beliebige Zahlen der Reihe ihr arithmetisches Mittel nicht irgendwo zwischen ihnen steht?

Die Richtigkeit der Antwort ist zu begründen.

Antwort: Eine solche Anordnung ist für jedes positive ganze n möglich.

Vorbemerkung: Eine Anordnung von Zahlen $a_1, a_2, ..., a_n$ in einer Reihe nennen wir *zulässig*, wenn sie die Bedingung der Aufgabe erfüllt; d.h., wenn für keine drei Indices i, m, j mit $i < m < j$ die Beziehung $^1/_2(a_i + a_j) = a_m$ gilt.

1. Beweis: Zunächst formulieren wir zwei Hilfssätze:

HS 1: Aus der Richtigkeit der Aussage für ein bestimmtes n_0 folgt deren Richtigkeit für alle $n < n_0$.

Zum Nachweis entfernen wir in einer zulässigen Anordnung der Zahlen 1, 2, ..., n_0 die Zahlen n+1, n+2, ..., n_0. Wenn bisher das arithmetische Mittel zweier Zahlen der Reihe nicht zwischen diesen beiden Zahlen stand, so steht es nach dem Entfernen einiger dieser Zahlen erst recht nicht zwischen ihnen.

Es genügt also zu zeigen, dass die Aussage richtig ist für alle n von der Form $n = 2^k$ mit einer positiven ganze Zahl k.

HS 2: Für beliebige ganze Zahlen $r \neq 0$ und s gilt: Die Reihe $a_1, a_2, ..., a_k$ ist genau dann zulässig, wenn die Reihe $ra_1+s, ra_2+s, ..., ra_k+s$ zulässig ist.

Dies folgt aus der Linearitätseigenschaft des arithmetischen Mittels: Es ist nämlich $\frac{(ra_i+s)+(ra_j+s)}{2}$ $= r\frac{a_i+a_j}{2}+s$, d.h. eine Zahl ra_m+s ist genau dann das arithmetische Mittel aus ra_i+s und ra_j+s, wenn a_m das arithmetische Mittel aus a_i und a_j ist.

Die eigentliche Aussage beweisen wir nun für $n = 2^k$ mit vollständiger Induktion nach k:

Induktionsanfang: Für $k = 0$, also $n = 2^0 = 1$ ist die Aussage richtig, da 1 offensichtlich ein zulässige Anordnung der aus einer Zahl bestehenden Zahlenreihe ist.

Induktionsannahme: Sei für ein bestimmtes k die Reihe $a_1, a_2, ..., a_n$ mit $n = 2^k$ eine zulässige Anordnung der Zahlen 1, 2, ..., 2^k.

Induktionsschluss: Zu zeigen ist, dass man dann die Zahlen 1, 2, ..., 2^{k+1} ebenfalls zulässig anordnen kann. Hierzu bilden wir aus der lt. Induktionsvoraussetzung zulässigen Anordnung $a_1, a_2, ..., a_n$ mit $n = 2^k$ die Anordnung $b_1 := 2a_1$, $b_2 := 2a_2$, ..., $b_n := 2a_n$, $b_{n+1} := 2a_1–1$, $b_{n+2} := 2a_2–1$, ..., $b_{2n}:= 2a_n–1$. Diese Anordnung hat folgende Eigenschaften:

1. Sie enthält offensichtlich die positiven ganzen Zahlen 1, 2, ..., 2^{k+1}, und zwar jede genau einmal, und keine anderen Zahlen.

2. Das arithmetische Mittel zweier Zahlen b_i und b_j steht nie zwischen diesen Zahlen: Entweder sind b_i und b_j beide aus der gleichen Hälfte der Anordnung, dann steht das arithmetische Mittel nach Konstruktion zusammen mit HS 2 nicht zwischen b_i und b_j. Oder b_i und b_j stehen in verschiedenen Hälften: Dann ist eine der beiden Zahlen gerade, die andere ungerade; ihr arithmetisches Mittel ist also keine ganze Zahl und kommt daher in der Anordnung nicht vor, steht also insbesondere nicht zwischen ihnen.

Bemerkung: Man erhält so der Reihe nach die Anordnungen 1; 2 1; 4 2 3 1; 8 4 6 2 7 3 5 1; 16 8 12 4 14 6 10 2 15 7 11 3 13 5 9 1 usw.. Die Konstruktion der Anordnung kann auch folgendermaßen beschrieben werden: Beginne mit der Anordnung "1". Aus einer zulässigen Anordnung mit 2^n Zahlen erhält man eine zulässige Anordnung mit 2^{n+1} Zahlen, indem für eine erste Gruppe jede Zahl mit 2 multipliziert, für eine zweite Gruppe jede Zahl mit 2 multipliziert und 1 subtrahiert; anschließend die beiden Gruppen nebeneinander schreibt.

2. Beweis: Wir betrachten n paarweise verschiedenen positiven ganzen Zahlen und stellen jede im Zweiersystem dar, also in der Form $a = z_r z_{r-1} ... z_2 z_1 z_0|_2$ mit $a = \sum_{i=0}^{r} z_i 2^i$ und $z_i \in \{0;1\}$; bekanntlich ist eine solche Darstellung eindeutig. Wir ordnen diese Zahlen lexikographisch in einer Reihe nach dem Wert der Ziffern von rechts (dabei ergänzen wir von links soweit nötig führende Nullen) und benennen sie nach dieser Reihenfolge mit $a_1, a_2, ..., a_n$; d.h. die Zahl a_i steht genau dann vor der Zahl a_j, wenn die erste von rechts her verschiedene Ziffer bei a_i kleiner als die entsprechende Ziffer von a_j ist;. Wir werden zeigen, dass diese Anordnung zulässig ist:

Hierzu betrachten wir beliebige zwei dieser Zahlen a_i und a_j mit $i < j$. Aufgrund der Anordnung stimmen sie für ein geeignetes $k\geq 1$ in den ersten (k–1) Ziffern von rechts überein, während die k–te Ziffer von a_i kleiner als die k–te Ziffer von a_j ist; d.h. die erste hat also den Wert 0, die zweite den Wert 1.

Jede Zahl a_m zwischen ihnen (also mit $i < m < j$) stimmt aufgrund der lexikographischen Anordnung mit a_i und a_j ebenfalls in den ersten k–1 Ziffern von rechts überein, andernfalls wäre $m<i$ oder $j<m$. Die k–te Ziffer von a_m kann nicht kleiner als die k–te Ziffer von a_i und nicht größer als die k–te Ziffer von a_j sein; damit ist sie entweder 0 (also identisch mit der k–ten Ziffer von a_i, Fall 1) oder 1 (also identisch mit der k–ten Ziffer von a_j, Fall 2).

Im ersten Fall stimmen a_i und a_m in den ersten k Ziffern von rechts überein, während a_m und a_j nur auf den ersten k–1 Ziffern übereinstimmen und die k–te Ziffer verschieden ist. Damit haben die letzten k Ziffern von $|a_j–a_m|$ den Wert 0, während die k–te Ziffer von $|a_m–a_j|$ den Wert 1 hat; insbesondere ist $|a_j–a_m| \neq |a_m–a_i|$; hieraus folgt $^1/_2(a_i + a_j) \neq a_m$. Analog wird der zweite Fall abgehandelt: man vertausche in der Argumentation einfach j und i.

Bemerkungen: Der zweite Beweis benützt nicht die Bedingung, dass es sich bei den n Zahlen um aufeinander folgende ganze Zahlen handelt. Die Sortierung der Zahlen kann auch folgendermaßen beschrieben werden: Sortiere zunächst in eine erste Gruppe alle geraden Zahlen, in eine zweite Gruppe alle ungeraden Zahlen; sortiere innerhalb jeder Gruppe nach dem Rest $\bmod 2^2$, danach in jeder Gruppe nach dem Rest $\bmod 2^3$ usw. bis 2^k größer als die größte der zu sortierenden Zahl ist.

Die Aufgabe kann auch folgendermaßen formuliert werden: Beweisen Sie, dass jede endliche Menge ganzer Zahlen so angeordnet werden kann, dass die Anordnung keine dreigliedrige arithmetische Teilfolge enthält.

Die Aussage gilt für endliche Mengen positiver ganzer Zahlen. Man kann aber zeigen, dass dies nicht für alle Mengen mit unendlich vielen natürlichen Zahlen geht.