Bundeswettbewerb Mathematik
Wissenschaftszentrum • Postfach 20 14 48 • 53144 Bonn
Fon: 0228 - 3727 411 • Fax: 0228 - 3727 413
e-mail: info@bundeswettbewerb-mathematik.de
www.bundeswettbewerb-mathematik.de

Korrekturkommission • Karl Fegert

Aufgaben und Lösungen

2. Runde 2005

Über Kommentare und Ergänzungen zu diesen Lösungsbeispielen freuen wir uns!

Anschrift oder Email–Adresse s.o.

Stand: Oktober 2005

Aufgabe 1: Zwei Spieler haben auf einem 100x100 – Schachbrett je einen Stein. Sie ziehen abwechselnd ihren Stein, wobei jeder Zug aus einem Schritt senkrecht oder waagrecht auf ein Nachbarfeld besteht und A den ersten Zug ausführt. Zu Beginn liegt der Stein von A in der linken unteren Ecke und der Stein von B in der rechten unteren Ecke.

Man beweise: Der Spieler A kann unabhängig von den Spielzügen des Spielers B stets nach endlich vielen Zügen das Feld erreichen, auf dem gerade der Stein von B steht.

Vorbemerkungen: Anstatt "Der Stein des Spielers A steht / wird gezogen... " sagen wir häufig kürzer "A steht / zieht...".

Die Felder des Schachbrettes seien in üblicher Weise abwechselnd schwarz und weiß gefärbt. Die Zugregel bewirkt dann, dass bei jedem Zug der Stein auf ein Feld der anderen Farbe gezogen wird. Da zu Beginn die beiden Steine auf Feldern verschiedener Farbe stehen und A mit dem Ziehen anfängt, stehen die Steine vor jedem Zug von A und nach jedem Zug von B auf Feldern verschiedener Farbe; sie stehen vor jedem Zug von B und nach jedem Zug von A auf Feldern gleicher Farbe. Hieraus folgt übrigens, dass der Spieler B niemals seinen Stein auf das Feld setzen kann, auf dem gerade der Stein von A steht.

Mit "Spaltenabstand zweier Steine" und "Zeilenabstand zweier Steine" sei die Mindestzahl von Zügen bezeichnet, die ein Stein benötigt, um (bei feststehendem anderen Stein) in die gleiche Spalte bzw. die gleiche Zeile wie der andere Stein zu kommen, mit "Abstand" bezeichnen wir die Summe aus Spalten– und Zeilenabstand. Bei jedem Zug wird genau eine der ersten beiden Größen um 1 kleiner oder größer, ebenso der Abstand. Hieraus folgt, dass vor jedem Zug von A der Abstand eine ungerade ganze Zahl, vor jedem Zug von B eine gerade ganze Zahl ist. Der Abstand zweier Steine ist immer eine ganze Zahl. Übrigens folgt hieraus ebenfalls, dass der Spieler B niemals seinen Stein auf das Feld setzen kann, auf dem gerade der Stein von A steht.

Wir sagen "Stein X bewegt sich zu Stein Y hin" bzw. "von Stein Y weg", wenn der Spalten– oder Zeilenabstande kleiner bzw. größer wird.

1. Beweis (konkrete Angabe einer Strategie): Eine mögliche Strategie für A ist nun die folgende:

"Betrachte vor deinem Zug das Rechteck aus Schachfeldern, das durch die Zeilen und Spalten bestimmt wird, auf denen die beiden Steine stehen. Ziehe nun so, dass die längere Seite dieses Rechtecks kürzer wird."

Um nachzuweisen, dass A mit dieser Strategie das Ziel des Spieles erreicht, weisen wir folgendes nach:

* Die geforderten Züge sind eindeutig beschrieben: Die Summe der um 1 verminderten Seitenlängen des Rechtecks ist der Abstand der beiden Steine; wären die Seitenlängen des Rechtecks vor dem Zug von A gleich, so wäre der Abstand eine gerade Zahl. Dies ist aber nie der Fall, wenn A am Zug ist. Also ist immer eine Seite länger als die andere und jeder Zug eindeutig beschrieben.

* Die geforderten Züge sind immer möglich: Die längere Seite des Rechtecks besteht aus mindestens 2 Feldern, sodass A seinen Zug immer innerhalb des Rechtecks durchführt. Da das angegebene Rechteck immer vollständig innerhalb des Schachbretts liegt, sind die Züge möglich.

* Die Strategie führt zum Ziel: A zieht immer innerhalb des bestehenden Rechtecks, jeder Zug innerhalb des Rechtecks verkürzt den Abstand der Steine um 1. Wenn nach dem Zug von A der Abstand den Wert 0 hat, dann steht der Stein von A auf dem Feld, auf dem gerade der Stein von B steht, und A hat das Ziel erreicht. Um dies zu verhindern, muss also B irgendwann eine Folge von Zügen finden, bei der er bei jedem einzelnen Zug den Abstand um 1 vergrößert, d.h. jeder Zug von B muss aus dem Rechteck hinaus führen. Dies ist jedoch nicht möglich, wie folgende Argumentation zeigt:

  O.B.d.A. sei das Rechteck weniger Felder hoch als Felder breit, ferner stehe der Stein von A in einer Spalte, die weiter links von der Spalte von B liegt (andernfalls dreht man das Schachbrett um 90° und / oder spiegelt es an einer Zeile oder Spalte.)

  Wenn das Rechteck nur 1 Feld hoch, also Teil von nur einer Zeile ist, ist es – der Abstand der Steine ist vor dem Zug von B geradzahlig – mindestens 3 Felder breit. Ein Zug außerhalb des Rechtecks für B ist entweder ein Zug nach oben (oder unten), dann ist der

Abstand nach dem folgenden Zug von A gleichgeblieben und das Rechteck hat eine Höhe von 2 Feldern und eine Breite von mindestens 3 Feldern. Oder B zieht nach rechts, dann bleibt die Form des Rechtecks nach dem folgenden Zug von A unverändert und es wird lediglich um eine Spalte nach rechts verschoben. Einen Zug nach rechts kann B aber wegen der Begrenzung des Schachbretts nur endlich oft durchführen. Nach endlich vielen Zügen muss B also nach oben (oder unten) ziehen, d.h. die beiden Seiten des Rechtecks haben dann eine Länge von mindestens 2 bzw. 3 Feldern und der Abstand der Steine ist gleichgeblieben.

Wenn das Rechteck nun mindestens 2 Felder hoch und mindestens 3 Felder breit ist, steht B in der oberen rechten Ecke. B kann also aus dem Rechteck hinaus nur nach rechts oder nach oben ziehen; in beiden Fällen behält das Rechteck nach dem Zug von A seine Form und wird nur um eine Spalte nach rechts oder eine Zeile nach oben verschoben. Wegen der Begrenztheit des Schachbrettes sind diese beiden Züge nur endlich oft möglich.

Nach endlich vielen Zügen ist B also gezwungen, innerhalb des Rechtecks zu ziehen.

Bemerkung: Mit diesem Beweis ist gezeigt, dass A das Ziel des Spieles immer dann erreichen kann, wenn vor einem Zug von A die beiden Steine auf Feldern verschiedener Farbe liegen.

2. Beweis (eigtl. nur eine andere Beschreibung der Strategie aus dem 1. Beweis): Mit dem Begriff "Diagonale des Steines X" bezeichnen wir die Reihe von Feldern, die sich untereinander an der linken unteren bzw. rechten oberen Ecke berühren und die dasjenige Feld enthält, auf dem der Stein X gerade steht. Bei dieser Definition hat das 100x100–Schachbrett 199 disjunkte Diagonalen, jedes Feld gehört zu genau einer Diagonalen, je nach Lage besteht eine Diagonale aus höchstens 100 Feldern und mindestens einem Feld, alle Felder einer Diagonalen haben die gleiche Farbe. Bei jedem Zug wird ein Stein auf die benachbarte Diagonale gesetzt.

Ein mögliche Strategie für A, um das Ziel des Spieles zu erreichen, ist die folgende:

"Zu Beginn zieht A auf der untersten Zeile stets nach rechts, bis er auf der Diagonalen des Steins von B steht. Danach antwortet A auf jeden Zug von B wie folgt:

(1) Zieht B nach rechts oder unten, so zieht A nach rechts.

(2) Zieht B nach oben oder links, so zieht A nach oben."

Um nachzuweisen, dass diese Strategie zum Ziel führt, weisen wir folgendes nach:

* Nach endlich vielen Zügen steht A tatsächlich auf der Diagonalen des Steines B: Jede Diagonale trennt auf dem Schachbrett zwei disjunkte Bereiche: Ein Bereich links von dieser Diagonalen und einen Bereich rechts von dieser Diagonalen (wobei z.B. der rechte Bereich leer sein kann, nämlich wenn B auf dem Feld rechts unten steht.) Zu Beginn steht A links von der Diagonalen von B; wenn er immer nach rechts zieht, steht er nach 100 Zügen auf dem Feld rechts unten; da dann der Bereich rechts von der Diagonalen leer ist und die Diagonale von A aus nur einem Feld besteht, verläuft die Diagonale von B links von A. Damit hat A bei irgendeinem Zug entweder sich auf die Diagonale von B gestellt oder B hat so gezogen, dass seine Diagonale durch das Feld von A geht. Da alle Felder einer Diagonalen gleiche Farbe haben, tritt dieser Fall nach dem Zug von A auf.
* Die angegebenen Züge sind eindeutig definiert: Zu jeder der vier Zugmöglichkeiten von B ist eine eindeutige Zuganweisung gegeben.
* Die angegebenen Züge sind immer möglich: Da A seine ersten Züge auf der untersten Zeile durchführt, gibt es bei Erreichen der Diagonalen von B zwei Möglichkeiten: Entweder steht er auf dem gleichen Feld wie B, dann ist das Ziel erreicht. Oder er steht links und damit auch unterhalb von B; dann sind Züge nach rechts und nach oben immer möglich. Nach jedem Zug von A stehen beide Steine wieder auf der gleichen Diagonalen, damit sind die angegebenen Züge wieder möglich.
* Die Strategie führt zum Ziel: Wenn A zum ersten Mal die Diagonale von B erreicht hat, stehen die beiden Steine nach jedem Zug von A wieder auf der gleichen Diagonalen. Wenn B nach unten oder nach links zieht, verkleinert sich der Abstand zu A um 1, der darauf folgende Zug von A verkleinert den Abstand erneut um 1; nach einem solchen Doppelzug hat sich also der Abstand um 2 Felder verringert. Wenn B nach oben oder nach rechts zieht, vergrößert sich der Abstand um 1 und der anschließende Zug von A verkleinert ihn wieder um 1; nach einem solchen Doppelzug bleibt der Abstand also gleich. Da das Schachbrett

aber begrenzt ist, kann B nach jedem Zug nach links oder unten nur endlich oft nach oben oder nach rechts ziehen. Nach endlich vielen Zügen hat damit der Abstand der Steine den Wert 0 erreicht; da 0 eine gerade Zahl ist, ist dies nach dem Zug von A der Fall und A hat das Ziel des Spieles erreicht.

Bemerkung: Diese Strategie bezieht sich auf die spezielle Ausgangsstellung. Sie kann allerdings leicht auf rechteckigen Schachbrettern beliebiger Größe verallgemeinert werden, wenn nur verlangt wird, dass zu Beginn A und B auf Feldern verschiedener Farbe stehen.

Aufgabe 2: Es sei x eine rationale Zahl.

Man beweise: Es gibt nur endlich viele Tripel (a,b,c) ganzer Zahlen mit $a < 0$ und $b^2 - 4ac = 5$, für die $ax^2 + bx + c > 0$.

Bezeichnung: Ein Tripel, das für ein bestimmtes x die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, nennen wir ein "zur Zahl x zulässiges Tripel" oder auch kürzer "x–zulässiges Tripel".

1. Beweis: Sei $a < 0$. Dann ist bekanntlich der Graph der Funktion $p_{a,b,c} : x \to ax^2 + bx + c$ eine nach unten geöffnete Parabel, deren Scheitel die Koordinaten $(x_s, y_s) = (-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a})$ hat; also ist

$-\frac{b^2-4ac}{4a} \geq ax^2 + bx + c$ für alle $x \in \mathbb{R}$. (*)

Seien nun x eine rationale Zahl, d.h. $x = \frac{p}{q}$ für geeignete $p,q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$, sowie a, b, c ganze Zahlen mit $a < 0$. Dann ist $ax^2 + bx + c = \frac{ap^2 + bpq + cq^2}{q^2}$; da der Zähler hier offensichtlich ganzzahlig und der Nenner positiv ist, folgt aus $ax^2 + bx + c > 0$ schärfer $ax^2 + bx + c \geq \frac{1}{q^2}$.

Ist nun zusätzlich $b^2 - 4ac = 5$, so folgt zusammen mit (*) die Ungleichungskette

$$-\frac{5}{4a} = -\frac{b^2-4ac}{4a} \geq ax^2 + bx + c \geq \frac{1}{q^2} \quad \text{und hieraus} \quad |a| = -a \leq \frac{5}{4}q^2 .$$

Also kann für jedes rationale x die ganzzahlige Variable a in den x–zulässigen Tripeln (a,b,c) nur endlich viele verschiedene Werte annehmen.

Wenn $a < 0$ ist, sind die Lösungen der Ungleichung $ax^2 + bx + c > 0$ diejenigen Zahlen, die zwischen den Nullstellen des quadratischen Polynoms der linken Seite sind. Die Ungleichung ist also äquivalent zu $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} < x < \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$; zusammen mit $b^2 - 4ac = 5$ lässt sich dies weiter äquivalent umformen zu $-b-\sqrt{5} < 2ax < -b+\sqrt{5}$ oder $-2ax - \sqrt{5} < b < -2ax + \sqrt{5}$. Hieraus folgt die recht grobe Abschätzung $|b| < |2ax| + \sqrt{5}$.

Also kann bei festem x und festem a in einem x–zulässigen Tripel (a,b,c) die ganzzahlige Variable b nur endlich viele verschiedene Werte annehmen; damit kann es für jede rationale Zahl x in den x–zulässigen Tripeln (a,b,c) auch nur höchstens endlich viele Kombinationen (a,b) geben.

Schließlich ist in jedem x–zulässigen Tripel (a,b,c) nach Vorgabe von a und b der Wert von c durch $b^2 - 4ac = 5$, also $c = \frac{b^2-5}{4a}$ eindeutig bestimmt; es gibt also für rationale x insgesamt nur endlich viele x–zulässige Tripel (a,b,c).

2. Beweis (Konstruktion aller möglichen Tripel): Mit $A(x)$ bezeichnen wir die Menge der x–zulässigen Tripel, d.h. die Menge der ganzzahligen Tripel (a,b,c) mit $a < 0$, $b^2 - 4ac = 5$ und $ax^2 + bx + c > 0$; ferner sei $\varphi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\psi := \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Zunächst formulieren wir die folgenden Hilfssätze:

HS 1: $A(0) = \{(-1,1,1), (-1,-1,1)\}$, insbesondere ist $|A(0)| = 2$.

HS 2: Für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt: $(a,b,c) \in A(x) \Leftrightarrow (a, b-2ak, ak^2-bk+c) \in A(x+k)$.
Die hierdurch induzierte Abbildung zwischen $A(x)$ und $A(x+k)$ ist bijektiv; insbesondere ist $|A(x)| = |A(x+k)|$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ und $x \in \mathbb{R}$. Anders formuliert: Ist die Differenz zweier Zahlen eine ganze Zahl, so sind die Mengen ihrer zulässigen Tripel gleichmächtig.

HS 3: Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ gilt: $(a,b,c) \in A(x)$ und $c < 0 \iff (c,b,a) \in A(\frac{1}{x})$ und $a < 0$.

D.h.: Entfernt man aus $A(x)$ und $A(\frac{1}{x})$ evtl. vorhandene Tripel (a,b,c) mit $c \geq 0$, so ist die hierdurch induzierte Abbildung zwischen diesen Mengen bijektiv. Anders formuliert: Die Mengen der zu $x \neq 0$ und $\frac{1}{x}$ zulässigen Tripel mit negativem c sind gleichmächtig.

HS 4 Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $(a,b,c) \in A(x)$ und $c \geq 0 \Rightarrow (a,b,c) = (-1,\pm1,1)$.
Anders formuliert: $(-1,\pm1,1)$ sind die beiden einzigen zulässigen Tripel mit nicht–negativem c.

HS 5 $(-1,+1,1) \in A(x)$ oder $(-1,-1,1) \in A(x) \iff |x| < \varphi \approx 1{,}62$;
$(-1,+1,1) \in A(x)$ und $(-1,-1,1) \in A(x) \iff |x| < |\psi| \approx 0{,}62$.
Anders formuliert: Die Zahlen im Intervall [–0,618...;0,618...] und nur diese haben genau zwei zulässige Tripel mit positivem c, die Zahlen im Intervall [–1,618...;1,618...] und nur diese haben wenigstens ein solches Tripel.

Beweise:

Zu 1 und 4: Mit $x = 0$ vereinfacht sich $ax^2 + bx + c > 0$ zur Bedingung $c > 0$. Schon für $c \geq 0$ erhält man zusammen mit $a < 0$ die Bedingung $5 = b^2 - 4ac \geq b^2$; also $|b| \in \{0, 1, 2\}$. Für $b = \pm2$ ist die Gleichung $5 = b^2 - 4ac$ äquivalent zu $5 = 4 - 4ac$; für $b = 0$ äquivalent zu $5 = -4ac$; beide sind nicht mit ganzen Zahlenpaaren (a,c) lösbar. Es bleiben also nur die Lösungen für $b = \pm1$; in diesem Fall erhält man aus $5 = 1 - 4ac$ die einzigen Werte $(a,b,c) = (-1,\pm1,1)$.

zu 2: Es ist
$$\begin{aligned} p_{a,b,c}(x) &= p_{a,b,c}((x+k) - k) = a((x+k) - k)^2 + b((x+k) - k) + c \\ &= a(x+k)^2 - 2a(x+k)k + ak^2 + b(x+k) - bk + c \\ &= a(x+k)^2 + (b - 2ak)(x+k) + ak^2 - bk + c \\ &= p_{a,(b-2ak),\ (ak^2-bk+c)}(x+k); \end{aligned}$$

insbesondere ist $p_{a,b,c}(x) > 0 \iff p_{a,(b-2ak),\ (ak^2-bk+c)}(x+k) > 0$.

Zu 3: Für $x \neq 0$ gilt: $ax^2 + bx + c > 0 \iff c\,(\frac{1}{x})^2 + b(\frac{1}{x}) + a > 0$. (Division durch $x^2 > 0$.)

Zu 5: Wir betrachten die beiden zu den Tripeln $(-1,\pm1,1)$ gehörenden Parabeln $p : x \to -x^2 \pm x + 1$. Sie sind nach unten geöffnet und haben die Nullstellen ψ und φ bzw. $-\psi$ und $-\varphi$; die einzigen x–Werte, für die $p(x) > 0$ ist, liegen zwischen diesen Nullstellen.

Sei nun x eine rationale Zahl, d.h. $x = \frac{p}{q}$ für geeignete $p,q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$. Zu diesem x konstruieren wir eine endliche Folge von rationalen Zahlen $x_0, x_1, ..., x_n$ nach folgendem Algorithmus:

Es ist $x_0 = x$. Zu $x_i = \frac{p_i}{q_i}$ ($i \geq 0$) wählen wir dasjenige $k_i \in \mathbb{Z}$, für das $-\frac{1}{2} < x_i + k_i \leq \frac{1}{2}$ und setzen $x_i' := x_i + k_i = \frac{p_i'}{q_i}$ mit einem geeigneten ganzen $p_i' \in \left]-\frac{q_i}{2}, +\frac{q_i}{2}\right]$. Dies ist offensichtlich immer möglich und p_i' ist eindeutig bestimmt.

Falls $x_i' = 0$, ist $n := i$ und wir sind fertig; falls $x_i' \neq 0$, sei $x_{i+1} := \frac{1}{x_i'} = \frac{q_i}{p_i'}$. Nach Konstruktion ist $|p_i'| \leq |\frac{q_i}{2}|$, damit ist der Nenner von x_{i+1} (das ist $q_{i+1} = p_i'$) höchstens halb so groß wie der Nenner von x_i.

Für ein $n \leq \log_2(q)$ ist dann $q_n = 1$ und damit $k_i = x_i$, also $x_n' = 0$; die Konstruktion der Folge ist also für jedes rationale x nach endlich vielen Schritten beendet.

Beispiel: Für $x = \frac{4817}{285}$ erhält man so der Reihe nach die Zahlen $x_0 = \frac{4817}{285} \to x_0' = -\frac{28}{285} \to$
$x_1 = -\frac{285}{28} \to x_1' = -\frac{5}{28} \to x_2 = -\frac{28}{5} \to x_2' = \frac{2}{5} \to x_3 = \frac{5}{2} \to x_3' = \frac{1}{2} \to x_4 = \frac{2}{1} \to x_4' = 0$.

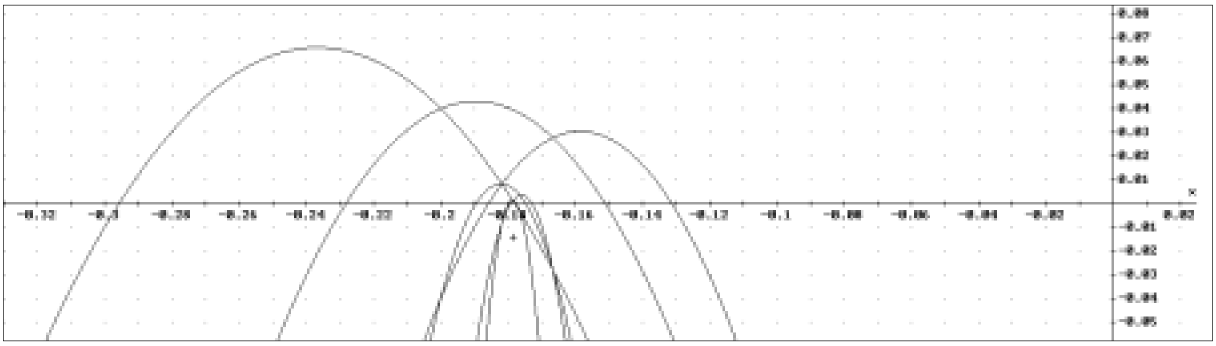
Nach HS 2 gilt nun $|A(x_i)| = |A(x_i')|$ für alle $i = 0, 1, ..., n$; nach HS 1 ist insbesondere $|A(x_n)| = |A(x_n')| = |A(0)| = 2$.

Nach Konstruktion ist $|x_i'| \le \frac{1}{2} < |\psi|$ für alle $i = 0, 1, ..., n$ und nach HS 5 somit $(-1,\pm 1,1) \in A(x_i')$. Falls zusätzlich $x_i' \neq 0$, ist aber gleichzeitig $|x_{i+1}| = |\frac{1}{x_i'}| \ge 2 \ge \frac{1}{|\psi|} = \varphi$; nach HS 5 ist also $(-1,\pm 1,1) \notin A(x_{i+1})$.

Mit HS 2 und HS 3 schließen wir hieraus $|A(x_i)| = |A(x_i)'| = |A(\frac{1}{x_i'})| + 2 = |A(x_{i+1})| + 2$; durch mehrfache Anwendung $|A(x)| = |A(x_0)| = |A(x_1)| + 2 = |A(x_2)| + 2\cdot 2 = ... = |A(x_n)| + n\cdot 2 = 2(n+1)$. Insbesondere ist $A(x)$ endlich.

Beispiel: Mit dem Zahlenbeispiel von oben erhält man folgende zulässigen Zahlentripel:

zu 0:	(–1,1,1), (–1,–1,1), also zu 2: (–1,5,–5), (–1,3,–1)
zu $\frac{1}{2}$:	(–5,5,–1), (–1,3,–1), (–1,1,1), (–1,–1,1), also zu $\frac{5}{2}$: (–5,25,–31), (-1,7,-11), (-1,5,-5), (-1,3,-1).
zu $\frac{2}{5}$:	(–31,25,–5), (–11,7,–1), (–5,5,–1), (–1,3,–1), (–1,1,1), (–1,–1,1), also zu $\frac{-28}{5}$: (–31,–347,–971), (–11, –125, –355), (–5,–55,–151), (–1,–9,–19), (–1,–11,–29),(–1,–13,–41) usw.



Die folgende Figur zeigt sechs der hieraus resultierenden acht Parabeln zu $x = \frac{-5}{28} \approx -0{,}1785$:

Bemerkungen: Die Bedingung "x rational" ist notwendig und hinreichend dafür, dass es höchstens endliche viele x–zulässige Tripel gibt. Ein Beweis, der diese Bedingung nicht verwendet, muss also irgendwo fehlerhaft sein.

Zum Beweis konstruieren wir zu einer beliebigen irrationalen Zahl y eine unendliche Menge zulässiger Tripel:

Es gibt eine unendliche Teilfolge $(\frac{p_i}{q_i})$ der Kettenbruchentwicklung von y, für die $|\frac{p_i}{q_i} - y| < \frac{1}{\sqrt{5}q_i^2}$.

Jedes zu einem solchen $(\frac{p_i}{q_i})$ zulässige Tripel ist dann auch ein y–zulässiges Tripel.

Beweisskizze: Eine solche Teilfolge existiert, da von drei aufeinander folgenden Brüchen der Kettenbruchentwicklung von y mindestens einer die oben angeführte Eigenschaft hat. (Quelle: O. Perron, "Die Lehre von den Kettenbrüchen", Teubner-Verlag Stuttgart 1954, S. 214 ff.)

Die Parabel $p_{a,b,c} : x \to ax^2 + bx + c$ hat die irrationalen Nullstellen $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{5}}{2a}$; für alle Werte x zwischen diesen Nullstellen ist $p_{a,b,c}(x) > 0$. Aus $ax^2 + bx + c \ge \frac{1}{q^2}$ (vgl. erster Beweis) folgt: Wenn die Zahl y nahe genug bei einem solchen x liegt, dann liegt y ebenfalls zwischen den Nullstellen, es ist also auch $p_{a,b,c}(y) > 0$. Weil die Parabel in der Nullstellen die Steigung $\pm\sqrt{5}$ hat, kann man das quantitativ ausdrücken durch $\left|\frac{p_i}{q_i} - y\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2} \Rightarrow ay^2 + by + c > 0$. Damit ist jedes der unendlich vielen $\frac{p_i}{q_i}$–zulässigen Tripel auch y–zulässig; da es ferner zu jedem $x = \frac{p_i}{q_i}$ ein zulässiges Tripel mit $q^2 \le |a| \le \frac{5}{4}q^2$ gibt (was man aus der Konstruktion des zweiten Beweises folgern kann), gibt es unendlich viele y–zulässige Tripel.

Für manche irrationale x, z.B. $x = \frac{\varphi}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ kann man auch direkt eine unendliche Menge von zulässigen Tripeln konstruieren, nach folgender Motivation: Wir wollen unendlich viele Tripel finden. Da es zu jedem a bzw. b nur endliche viele b bzw. a geben kann, müssen a und b beide betragsmäßig groß werden. Die Bedingungen $-2ax - \sqrt{5} < b < -2ax + \sqrt{5}$ führt bei großen $|a|$ zu $b{:}a \approx -2x = \text{const.}$; zusammen mit der Bedingung $a\cdot(4c) = b^2 - 5$ erinnert uns dies an die Fibonacci-Folge (f_i): alle Glieder sind ganze Zahlen, manche davon sind durch 4 teilbar, es gilt ähnlich wie oben $f_{i+1} : f_i = \text{const} \approx \varphi$. sowie $f_{i+1}f_{i-1} = f_i^2 \pm 1$. Vielleicht gibt es eine Fibonacci-Folge mit anderen Startwerten, bei der immer wieder drei aufeinander folgende Glieder $-a$, b, $-4c$ unsere Bedingung erfüllen? Dies führt nach einigem Suchen zur Folge (d_i), die rekursiv definiert ist durch $d_0 = 1$, $d_1 = 3$ sowie $d_{i+2} = d_i + d_{i+1}$ ($i = 0, 1, 2, 3, ...$). Dann ist (a_k,b_k,c_k) mit $a_k := -d_{6k}$, $b_k := d_{6k+1}$, $c_k := -\frac{1}{4}d_{6k+2}$ ($k = 0, 1, 2, 3, ...$) ein x–zulässiges Tripel, und alle diese Tripel sind verschieden. (Die Folge der d_i ist also 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, 1364, ...; man erhält dann die Folge der Tripel (a_k,b_k,c_k) zu (–1,3,–1), (–29,47,–19), (–521,843,–341), ...). (Auf einen Beweis wird hier verzichtet.)

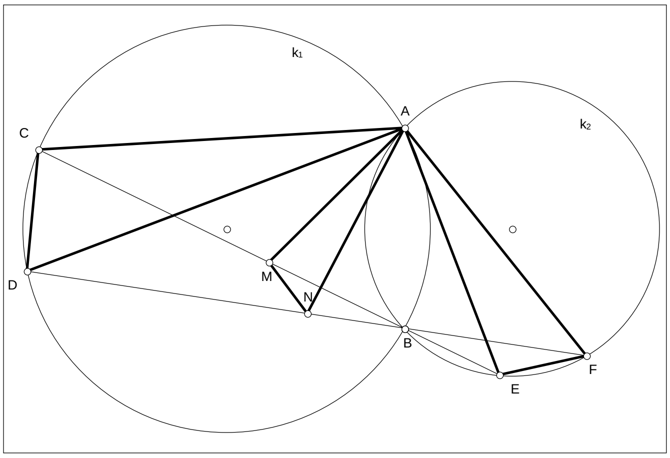
Aufgabe 3: Zwei Kreise k_1 und k_2 schneiden sich in A und B. Eine erste Gerade durch B schneide k_1 in C und k_2 in E. Eine zweite Gerade durch B schneide k_1 in D und k_2 in F; dabei liege B zwischen den Punkten C und E sowie zwischen den Punkten D und F. Schließlich seien M und N die Mittelpunkte der Strecken CE und DF.

Man beweise: Die Dreiecke ACD, AEF und AMN sind zueinander ähnlich.

1. Beweis (Umfangswinkelsatz): O.B.d.A. liegen C und B in verschiedenen Halbebenen bezüglich der Geraden (AD) und gleichzeitig B und F in verschiedenen Halbebenen bezüglich (AE), andernfalls vertauschen wir in den folgenden Beweisen die Buchstaben C und D sowie E und F.

Es ist nach Umfangswinkelsatz

$\angle CAD$ = $\angle CBD$ (Umfangswinkelsatz; A und B sind Punkte auf dem gleichen Kreisbogen über CD)
= $\angle EBF$ (Scheitelwinkel an der Kreuzung der Geraden (CE) und (DF))
= $\angle EAF$ (Umfangswinkelsatz; B und A sind Punkte auf dem gleichen Kreisbogen über EF).



Ferner ist

$\angle ADC$ = $\angle ABC$ (Umfangswinkelsatz)
= $180° - \angle EBA$ (Nebenwinkel)
= $\angle AFE$ (gegenüber liegende Winkel im Sehnenviereck ABEF).

Damit stimmen die Dreiecke ΔACD und ΔAEF in zwei entsprechend liegenden Winkeln überein, sind also ähnlich.

Zum Nachweis, dass auch ΔAMN zu diesen beiden Dreiecken ähnlich ist, betrachten wir zunächst die Dreiecke ΔACE und ΔADF. Auch sie sind ähnlich zueinander, es gilt nämlich

$\angle ECA$ = $\angle BCA$ (B liegt auf der Halbgeraden (CE)
= $\angle BDA$ (Umfangswinkelsatz; C und D sind Punkte auf dem gleichen Bogen über AB)
= $\angle FDA$ (F liegt auf der Halbgeraden (DB).

analog weist man $\angle AEC = \angle AFD$ nach (man muss lediglich die Bezeichnungen von C und E vertauschen, ebenso die von D und F, sowie den Drehsinn der Winkel ändern. Damit stimmen die beiden Dreiecke in zwei entsprechend liegenden Winkeln überein.

Nun kann man verschieden schließen:

Variante 1: AM und AN sind in diesen ähnlichen Dreiecken Seitenhalbierende in entsprechender Lage; ihre Längen stehen also im gleichen Verhältnis zu den Längen anderer entsprechend liegender Strecken und sie schließen mit anderen entsprechend liegenden Strecken dieser Dreiecke gleiche Winkel ein. Insbesondere gilt also $|AC| : |AM| = |AD| : |AN|$ und $\angle CAM = \angle DAN$. Aus letzterem folgt sofort $\angle CAD = \angle MAN$ (hierbei muss auch berücksichtigt werden, dass die Winkel gleich orientiert sind). Damit stimmen ΔACD und ΔAMN im Verhältnis zweier entsprechend liegender Seiten und in der Weite des eingeschlossenen Winkeln überein, sind also ähnlich.

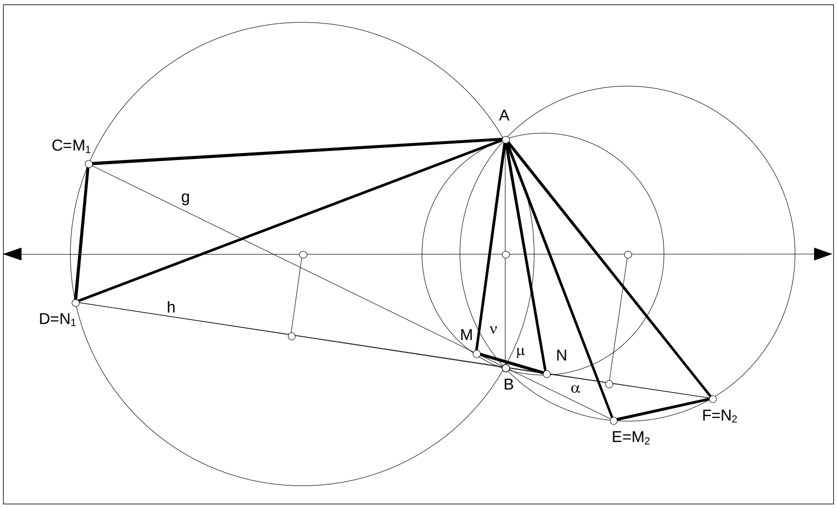
Variante 2: Der gemeinsame Punkt A liegt in den beiden Dreiecken in entsprechender Lage und die beiden Dreiecke sind gleichsinnig ähnlich (dies folgt aus der vorgegebenen Lagebeziehung von B). Damit gibt es eine Drehstreckung um A, die C in D sowie E in F überführt. Da eine Drehstreckung geradentreu ist, wird insbesondere auch CE in DF überführt, genau so der Mittelpunkt der einen Strecke in den der anderen, also M in N. Hieraus schließen wir $\angle MAN = \angle CAD$: Da auch AC in AD sowie AM in AN überführt wird, ist $|AC| : |AD| = |AM| : |AN|$. Damit stimmen ΔACD und ΔAMN im Verhältnis zweier entsprechend liegender Seiten und in der Weite des eingeschlossenen Winkels überein, sind also ähnlich.

Bemerkungen: Die Aussage kann also verallgemeinert werden: Es genügt, dass M und N die Strecken CE bzw. DF im gleichen Verhältnis teilen.

Auf die Bedingung "B liegt zwischen den Punkten C und E sowie zwischen den Punkten D und F." kann verzichtet werden. Sie wurde in den Aufgabentext aufgenommen, um in den Teilnehmerarbeiten eine langwierige Diskussion der Lagebeziehungen zu vermeiden.

2. Beweis: Wir betrachten einen Punkt A und zwei Geraden g und h, die sich in B schneiden und beide den Punkt A nicht enthalten, als fest vorgegeben. Zu dieser Konstellation betrachten wir einen beliebigen Kreis k, der durch A und B geht und mit den Geraden g und h außer dem Punkt B noch je einen nicht mit B zusammenfallenden weiteren Punkt hat; diese nennen wir M bzw. N.

Wir können die Bezeichnungen so wählen, dass die Gerade g bei einer Drehung um den Punkt B um 180° gegen den Uhrzeigersinn zuerst die Gerade h, dann die Gerade (AB) überstreicht, bevor sie mit sich selbst wieder zur Deckung kommt. Die drei Winkel, die dadurch bestimmt sind, bezeichnen wir in dieser Reihenfolge mit α, μ und ν; es ist dann $\alpha + \mu + \nu = 180°$. Mit dieser Festlegung liegen auch bei jeder möglichen Lage die Punkte A, M und N in dieser Reihenfolge gegen den Uhrzeigersinn auf dem Kreis (in der Figur durch Indices bei den Punkten M und N angedeutet).



HS 1: Das Dreieck ΔAMN hat bei jeder möglichen Lage die gleichen Innenwinkel; und zwar an der Ecke M den Winkel μ, an der Ecke N den Winkel ν und an der Ecke A den Winkel α.

Beweis: Wir unterscheiden drei Fälle, je nach Lage des Punktes B relativ zu A, M und N, und schließen mit Umfangswinkelsatz (nach Satz von der Innenwinkelsumme im Dreieck genügt es, die Identität für zwei Winkel zu zeigen):

Fall 1: Die Punkte A, M, N und B liegen in dieser Reihenfolge gegen den Uhrzeigersinn auf dem Kreis. Dann liegen A und B auf dem gleichen Kreisbogen über MN, es haben also $\angle$MAN und $\angle$MBN die gleiche Weite, nämlich α. Ferner liegen die Punkte N und B auf dem gleichen Kreisbogen über AM, damit haben $\angle$ANM und $\angle$ABM die gleiche Weite, nämlich ν.

Fall 2: Die Punkte A, M, B und N liegen in dieser Reihenfolge gegen den Uhrzeigersinn auf dem Kreis. Dann liegen M und N auf verschiedenen Kreisbögen über AB und die Winkel $\angle$MAN und $\angle$NBM ergänzen sich zu 180° und $\angle$NBM ist Nebenwinkel zu α, also hat $\angle$MAN die Weite $180° - \angle NBM = \alpha$. Ferner liegen B und N auf dem gleichen Kreisbogen über AM, also haben $\angle$MNA und $\angle$MBA die gleiche Weite ν.

Fall 3: Die Punkte A, B, M, N liegen in dieser Reihenfolge gegen den Uhrzeigersinn auf dem Kreis. Mit völlig analoger Argumentation wie in Fall 1 (ersetze M durch N) zeigt man $\angle MAN = \alpha$ und $\angle NMA = \mu$.

HS 2: Der Abstand der Mittelpunkte zweier möglicher Kreise durch A und B ist proportional zum Abstand der durch sie erzeugten Punkte M_1 und M_2 auf g, ebenso proportional zum Abstand der durch sie erzeugten Punkte N_1 und N_2 auf h. Damit bestimmen die durch drei Kreise erzeugten Punktepaare (M_1,N_1), (M,N), (M_2,N_2) auf beiden Geraden das gleiche Teilverhältnis.

Beweis: Die Mittelsenkrechten auf den Strecken N_1B bzw. N_2B schneiden die Mittelsenkrechte auf AB in den Mittelpunkten des Kreises. Unmittelbar aus der Figur lässt sich ablesen, dass der Abstand der Mittelpunkte so groß ist wie das halbe Produkt aus dem Abstand der Mittelsenkrechten und dem sinus des Winkels zwischen Gerade und der Mittelsenkrechten auf AB.

HS 3: Teilt M die Strecke M_1M_2 im gleichen Verhältnis wie N die Strecke N_1N_2, so ist das Viereck AMBN ein Sehnenviereck.

Beweis: Der Umkreis des Dreiecks ΔABM schneidet die Gerade H in einem Punkt N*. Nach Hilfssatz 2 ist das Dreieck ΔAMN* ähnlich zu den Dreiecken ΔAM_iN_i , ferner teilen M und N* die Strecken M_1M_2 bzw. N_1N_2 im gleichen Verhältnis. Damit ist N* = N und die Vierecke ABMN* und ABMN identisch, also beides Sehnenvierecke.

Die eigentliche Behauptung folgt nun sofort als Kombination von HS 3 und HS 1.

3. Beweis (Beschreibung mit komplexen Zahlen): Wir identifizieren wie üblich den Punkt $Z(x|y)$ mit der komplexen Zahl $z = x + iy$ und legen die Figur so in die komplexe Zahlenebene, dass der Punkt B in den Ursprung fällt. Die gegebenen Kreise und Geraden enthalten dann den Ursprung, somit vereinfachen sich die bekannten Gleichungen für Kreis bzw. Gerade (z^* sei die zu z konjugiert komplexe Zahl, vgl. auch z.B. das Schulbuch von H. Dittmann: "Komplexe Zahlen", Bay. Schulbuch-Verlag, München 1976, S. 39 ff.) zu $zz^* - m_iz^* - m_i^*z = 0$ oder äquivalent

$(z - m_i)\, z^* - m_i^*z = 0$ für die Kreise k_i (mit $m_i \neq 0$, $m_1 \neq m_2$), sowie zu

$h_iz^* + h_i^*z = 0$ für die Geraden g_i mit $h_i \neq 0$ ($i = 1, 2$).

Der Punkt B ist Schnittpunkt der beiden Kreise, er ist also eine der Lösungen des aus den beiden Kreisgleichungen bestehenden Gleichungssystems. Multiplikation der Gleichung für den Kreis k_1 mit $(z–m_2)$ und der Gleichung für k_2 mit $z–m_1$ ergibt das Gleichungssystem

$$(z - m_1)\,(z - m_2)\,z^* - (z - m_2)\,m_1^*z = 0$$

$$(z - m_1)\,(z - m_2)\,z^* - (z - m_1)\,m_2^*z = 0$$

Hieraus folgt nach Subtraktion $z\,[(z - m_1)\,m_2^* - (z - m_2)\,m_1^*] = 0$ und damit die erste Lösung $z_1 = b = 0$ (was nichts Neues ist, da beide Kreise durch den Ursprung gehen); die zweite Lösung ist

$$z_2 = a = \frac{m_1^*m_2 - m_1m_2^*}{m_1^* - m_2^*}.$$ (Wegen $m_1 \neq m_2$ ist der Nenner sicher von Null verschieden!)

Die Punkte C, D, E, F sind die Schnittpunkte je eines Kreises und einer Geraden, also Lösungen der Gleichungssysteme, die aus je einer Kreisgleichung k_i und einer Geradengleichung g_j mit $i,j \in \{1,2\}$ bestehen. Multiplikation der Kreisgleichung mit h_j und der Geradengleichung mit $(z - m_i)$ ergibt das Gleichungssystem

$$h_j\,(z - m_i)\,z^* - h_j\,m_i^*\,z = 0$$

$$h_j\,(z - m_i)\,z^* + h_j^*(z - m_i)\,z = 0 \quad (i,j \in \{1, 2\})$$

Hieraus folgt nach Subtraktion $z\,[h_j^*(z - m_i) + h_jm_i^*] = 0$; die erste, schon bekannte Lösung ist $z_1 = b = 0$, die zweite Lösung ist $z_2 = \dfrac{h_j^*m_i - h_jm_i^*}{h_j^*}$ (Nenner sicher von Null verschieden). Für $(i,j) = (1,1)$ erhalten wir den Punkt C, für $(i,j) = (1,2)$ den Punkt D, für $(i,j) = (2,1)$ den Punkt E und für $(i,j) = (2,2,)$ den Punkt F.

Nun zum eigentlichen Beweis: Um die Ähnlichkeit der Dreiecke ΔACD und ΔAEF mit dem gemeinsamen Punkt A zu zeigen, genügt es nachzuweisen, dass E und F die Bilder von C bzw. D bei der gleichen Drehstreckung mit Zentrum A sind. Bekanntlich ist dies der Fall, wenn die Bedingungen $(e - a) = r\,(c - a)$ und $(f - a) = r\,(d - a)$ für die gleiche komplexe Zahl r erfüllt sind. (Dabei bestimmt der Faktor $r \neq 0$ eineindeutig den Drehwinkel und den Streckfaktor.)

Falls $c = a$, ist auch $e = a$; damit entarten die Dreiecke zu Strecken und sind sicher ähnlich. Falls $c \neq a$, kann man die erste Gleichung eindeutig nach r auflösen; Einsetzen in die zweite ergibt, dass die beiden Gleichungen sicher dann für das gleiche r erfüllbar sind, wenn $(e–a)(d–a) = (c–a)(f–a)$ oder äquivalent $ed - cf = a(e+d–c–f)$. Einsetzen der oben berechneten Werten ergibt eine wahre Aussage (alle Nenner sind sicher von Null verschieden!):

$$ed - fc = a\,(e+d–c–f)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{h_1^*m_2 - h_1m_2^*}{h_1^*} \cdot \frac{h_2^*m_1 - h_2m_1^*}{h_2^*} - \frac{h_1^*m_1 - h_1m_1^*}{h_1^*} \cdot \frac{h_2^*m_2 - h_2m_2^*}{h_2^*}$$

$$= \frac{m_1{*}m_2 - m_1m_2{*}}{m_1{*} - m_2{*}}\left(\frac{h_1{*}m_2 - h_1m_2{*}}{h_1{*}} + \frac{h_2{*}m_1 - h_2m_1{*}}{h_2{*}} - \frac{h_1{*}m_1 - h_1m_1{*}}{h_1{*}} - \frac{h_2{*}m_2 - h_2m_2{*}}{h_2{*}}\right)$$

$\Leftrightarrow$ (rechts und links fallen die Terme mit $h_1{*}h_2{*}$ sowie mit h_1h_2 weg)

$$\frac{-h_1{*}m_2h_2m_1{*} - h_1m_2{*}h_2{*}m_1 + h_1{*}m_1h_2m_2{*} + h_1m_1{*}h_2{*}m_2}{h_1{*}h_2{*}}$$

$$= \frac{m_1{*}m_2 - m_1m_2{*}}{m_1{*} - m_2{*}} \cdot \frac{-h_1h_2{*}m_2{*} - h_1{*}h_2m_1{*} + h_1h_2{*}m_1{*} + h_1{*}h_2m_2{*}}{h_1{*}h_2{*}}$$

$\Leftrightarrow$ (unten ausmultiplizieren und mit der oberen Zeile vergleichen)

$$\frac{(h_1h_2{*} - h_1{*}h_2)(m_1{*}m_2 - m_1m_2{*})}{h_1{*}h_2{*}} = \frac{m_1{*}m_2 - m_1m_2{*}}{m_1{*} - m_2{*}} \cdot \frac{(h_1h_2{*} - h_1{*}h_2)(m_1{*} - m_2{*})}{h_1{*}h_2{*}},$$

was offensichtlich bei jeder erlaubten Wahl von m_1, m_2, h_1, h_2 eine wahre Aussage ist.

Über die Aufgabenstellung hinaus werden wir zeigen, dass die Dreiecke ΔACD und ΔAMN schon dann ähnlich sind, wenn die Punkte M und N die Strecken CE bzw. DF im gleichen Verhältnis teilen. Alle solche Punkte lassen sich beschreiben durch $m(\lambda) := \lambda c + (1-\lambda)e$ bzw. $n(\lambda) := \lambda d + (1-\lambda)f$ für ein geeignetes λ; für die speziellen Werte $\lambda = {}^1/_2$ und $\lambda = 0$ ergeben sich die in der Angabe genannten Punkte M und N bzw. E und F und damit die Aussage der Aufgabe.

Es genügt zu zeigen, dass M(λ) und N(λ) das Bild von C bzw. D unter der gleichen Drehstreckung mit Zentrum A ist; d.h. dass die Bedingungen $(m(\lambda) - a) = r\,(c - a)$ und $(n(\lambda) - a) = r\,(d - a)$ für die gleiche komplexe Zahlen r erfüllt sind. Wie oben können wir den Fall $c = a$ und auch $d = a$ ausschließen und damit die erste Bedingung äquivalent umformen zu

$$\lambda c + (1-\lambda)\,e - a = r\,(c - a) \quad\Leftrightarrow\quad r = \frac{\lambda c + (1-\lambda)e - (\lambda - \lambda + 1)a}{c - a} \quad\Leftrightarrow\quad r = \frac{\lambda(c-a) + (1-\lambda)(e-a)}{c-a}$$

$\Leftrightarrow$ $r = \lambda + (1-\lambda)\dfrac{e-a}{c-a}$; die zweite in analoger Schlussweise zu $r = \lambda + (1-\lambda)\dfrac{f-a}{d-a}$.

Diese beiden Bedingungen sind bei festem λ genau dann für das gleiche r erfüllbar, wenn $(e - a)(d - a) = (c - a)(f - a)$. Dies wurde bereits oben gezeigt.

Aufgabe 4: Es sei $A(n)$ die maximale Anzahl der Selbstüberschneidungen von geschlossenen Streckenzügen $P_1P_2 \dots P_nP_1$ ($n \geq 3$), bei denen keine drei der Eckpunkte auf einer Geraden liegen.

Man beweise: a) $A(n) = \frac{n(n-3)}{2}$, falls n ungerade und

b) $A(n) = \frac{n(n-4)}{2} + 1$, falls n gerade.

Erläuterung: Eine Selbstüberschneidung ist ein Schnitt zweier nicht benachbarter Strecken.

Vorbemerkungen und Bezeichnungen: Der Beweis besteht aus vier Teilen: In den Teilen (1a) und (1b) zeigen wir, dass es für kein ungerades bzw. kein gerades n einen Streckenzug mit n Strecken und mehr als $A(n)$ Selbstüberschneidungen geben kann, d.h. dass die oben angegebenen Terme obere Schranken für $A(n)$ sind; in den Teilen (2a) und (2b) zeigen wir, dass es zu jedem ungeraden bzw. geraden n einen Streckenzug mit n Strecken und $A(n)$ Selbstüberschneidungen gibt, d.h. dass die oben angegebenen Terme eine untere Schranke für $A(n)$ sind.

Um die Beschreibung der im Beweis verwendeten Operationen zu vereinfachen, werden wir wie allgemein üblich die Indices der Eckpunkte des Streckenzuges $\bmod n$ betrachten, d.h. die Punkte P_{i+n} und P_i sind identisch.

Beweis Teil (1a): ($A(n) \leq \frac{n(n-3)}{2}$ für ungerade n): Jede Strecke des Streckenzuges kann mit sich selbst und den beiden direkt benachbarten Strecken keine Selbstüberschneidung haben. Auf jeder der n Strecken kann es also höchstens $n-3$ Selbstüberschneidungen geben, dabei ist jede Selbstüberschneidung gemeinsamer Punkt von genau zwei Strecken. Mit einfacher Kombinatorik folgt unmittelbar $A(n) \leq \frac{n(n-3)}{2}$ für alle $n \geq 3$.

Bemerkung: Die Aussage gilt nicht nur für ungerade n, sondern für alle ganzzahligen $n \geq 3$.

Beweis Teil (1b) ($A(n) \leq \frac{n(n-4)}{2} + 1$ für gerade n): Es genügt zu zeigen, dass es bei geradem n höchstens 2 Strecken gibt, die $n-3$ Selbstüberschneidungen besitzen. Nach der auch für gerade n gültigen Argumentation aus Beweisteil (1a) haben dann nämlich alle anderen Strecken – dies sind mindestens $n-2$ Stück – höchstens $n-4$ Selbstüberschneidungen und es ist dann $A(n) \leq \frac{(n-2)(n-4)}{2} + 2\frac{n-3}{2} = \frac{n(n-4)}{2} + 1$.

Den Beweis hierfür führen wir durch Widerspruch, wir benötigen aber zuerst noch drei Eigenschaften von Strecken des Streckenzuges mit genau $n-3$ Selbstüberschneidungen:

E1: Jede Strecke mit $n-3$ Selbstüberschneidungen schneidet jede andere nicht–anliegende Strecke des Streckenzuges.

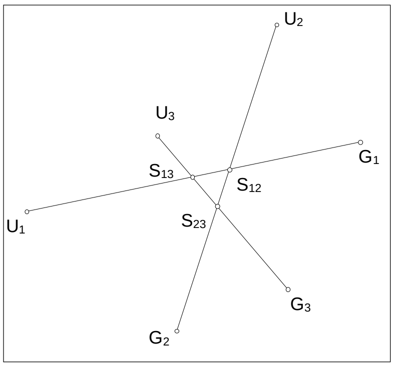
Dies folgt sofort aus der Argumentation in Beweisteil (1a).

E2: Hat bei geradem n eine Strecke genau $n-3$ Selbstüberschneidungen, so liegen alle Punkte P_s mit geradem Index s in der einen Halbebene bez. der Trägergeraden dieser Strecke, alle Punkte P_s mit ungeradem Index s in der anderen.

Begründung: Nach E1 sind die Selbstüberschneidungen der Strecke P_rP_{r+1} genau die gemeinsamen Punkte mit allen nicht–anliegenden Strecken, also den Strecken P_sP_{s+1} mit $s \notin \{r-1, r, r+1\}$. Da jede dieser Strecken die Gerade (P_rP_{r+1}) kreuzt, liegen die Punkte $P_{r+2}, P_{r+3}, \dots, P_n, P_1, \dots, P_{r-1}$ abwechselnd in verschiedenen Halbebenen bezüglich der Geraden (P_rP_{r+1}). Da nun n gerade ist, ist die Folge der Indices in dieser Reihe von Punkten abwechselnd gerade und ungerade, auch beim "Übergang über n hinweg".

E3: Bei geradem n haben zwei Strecken mit $n-3$ Selbstüberschneidungen keine gemeinsamen Endpunkte.

Begründung: Hat die Strecke P_rP_{r+1} genau n–3 Selbstüberschneidungen, so liegen nach E1 die Punkte P_{r-1} und P_{r+2} und damit auch die an P_rP_{r+1} anliegenden Strecken $P_{r-1}P_r$ und $P_{r+1}P_{r+2}$ in verschiedenen Halbebenen bez. der Geraden (P_rP_{r+1}); sie haben also keine gemeinsamen Punkte. Da sie außerdem mit sich selbst und den beiden angrenzenden Strecken ebenfalls keine Selbstüberschneidungen haben können, haben sie höchstens n–4 Selbstüberschneidungen.



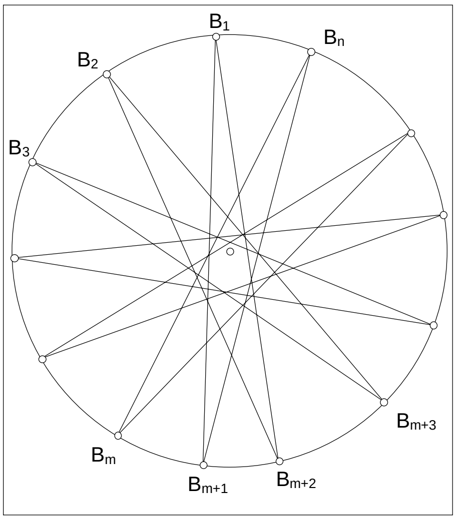
Wir nehmen nun an, dass der Streckenzug mindestens drei Teilstrecken s_i (i =1, 2, 3) enthielte, die jeweils genau n–3 Selbstüberschneidungen haben. Die Endpunkte jeder dieser Strecken sind Punkte mit aufeinanderfolgenden Indices, d.h. einer ist gerade, der andere ungerade. Entsprechend bezeichnen wir die Endpunkte der Strecken s_i mit geradem Index mit G_i, die mit ungeradem Index mit U_i. Nach E2 sind die U_i und die G_i paarweise verschieden.

Nach E1 hat jedes Paar von Strecken einen Schnittpunkt; diese bezeichnen wir entsprechend der Indices der beteiligten Punkte mit S_{ij} (i,j = 1, 2, 3; $i<j$).

Nun betrachten wir die beiden Strecken U_1G_1 und U_2G_2 mit ihrem Schnittpunkt S_{12}. Nach E3 liegt U_3 in der gleichen Halbebene bez. der Geraden (U_2G_2) wie U_1, aber auch in der gleichen Halbebene bez. (U_1G_1) wie U_2. Also liegt U_3 im Sektor, der von den Halbgeraden ($S_{12}U_1$ und ($S_{12}U_2$ aufgespannt wird; mit analoger Argumentation zeigt man, dass G_3 im bez. S_{12} punktsymmetrisch liegenden Sektor liegt.

Die Gerade (U_3G_3) schneidet demnach den Streckenzug $U_1S_{12}U_2$ in genau einem Punkt (dies ist S_{13} oder S_{23}). Damit liegen aber U_1 und U_2 in verschiedenen Halbebenen bezüglich der Geraden U_3G_3. Dies steht aber im Widerspruch zu E2.

Beweis Teil (2a) ($A(n) \geq \frac{n(n-3)}{2}$ für ungerade n): Sei n ungerade, d.h. es ist $n = 2m+1$ für eine geeignete ganze Zahl $m \geq 1$. Wir betrachten n (nicht notwendigerweise gleichabständig) auf einer Kreislinie verteilte Punkte; wir bezeichnen sie fortlaufend gegen den Uhrzeigersinn mit $B_1, B_2, \ldots, B_n$ (vgl. Figur). Dann bilden die n Strecken B_iB_{i+m+1} ($i = 1, 2, \ldots, n$) den Streckenzug $B_1B_{m+2}B_{2m+3}B_{3m+4}\ldots B_{(n-1)m+n}B_{nm+n+1}$. Da die Indices $\mathrm{mod}\ n$ betrachtet werden, können wir dies umschreiben zu $B_1B_{m+2}B_2B_{m+3}B_3B_{m+4}\ldots B_nB_{m+1}B_1$. Damit ist offensichtlich, dass jeder Punkt genau einmal vorkommt, d.h. dass es sich um einen geschlossenen Streckenzug mit n Strecken handelt; da alle Endpunkte auf der Kreislinie liegen, sind zudem keine 3 Eckpunkte auf einer Geraden.



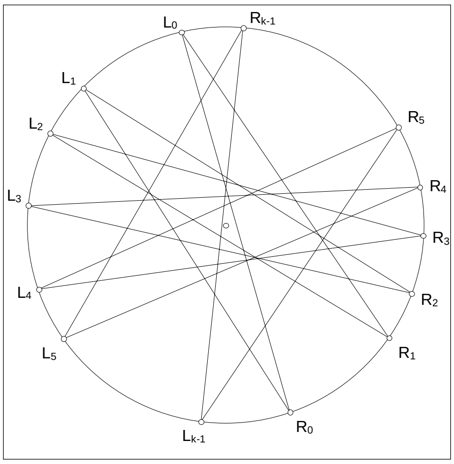
Die Trägergerade der Strecke B_1B_{m+2} teilt die Ebene in zwei offene Halbebenen auf; in der einen liegen nach Konstruktion alle Punkte Bj mit Indices $2 \leq j \leq m+1$, in der anderen die Punkte mit Indices $m+3 \leq j \leq n$.

Nach Konstruktion sind alle Punkte B_k mit Indices $m+3 \leq k \leq 2m+1 = n$ Endpunkte von jeweils genau 2 Strecken B_jB_k mit $j = k + (m+1) \equiv k - m \bmod (2m-1)$ bzw. $j = k - (m+1)$. Dies sind $2(m-1)$ paarweise verschiedene Strecken, dabei nehmen die j die Werte 3, 4, ..., m jeweils genau 2 mal, die Werte 2 und m+1 jeweils genau 1 mal an. Damit liegen alle Punkte B_j und B_k in verschiedenen Halbebenen bez. der Geraden B_1B_{1+m}; da zusätzlich alle beteiligten Punkte auf dem gleichen Kreis liegen, sind alle diese Strecken Sehnen, schneiden also die Sehne B_1B_{m+2}. Auf dieser Strecke B_1B_{m+2} gibt es also $2(m-1) = n-3$ Selbstüberschneidungen. Aus Symmetriegründen (man dreht die ganze Figur um den Mittelpunkt des Kreises) gilt dies für jede der n Strecken des Streckenzuges.

Jede Selbstüberschneidung wird hierbei bei beiden beteiligten Strecken je genau einmal gezählt. Nach bekannter kombinatorischer Formel hat der soeben konstruierte geschlossene Streckenzug mit n Strecken genau $\frac{n(n-3)}{2}$ Selbstüberschneidungen; es ist also $A(n) \geq \frac{n(n-3)}{2}$ für ungerade n.

Alternative für Beweis Teil (2a): Vgl. Bemerkung im Anschluss an Alternative zum Beweis Teil (2b).

Beweis Teil (2b) (($A(n) \geq \frac{n(n-4)}{2}+1$ für gerade n): Es genügt zu zeigen, dass es zu jedem geraden $n \geq 4$ einen geschlossenen Streckenzug mit n Teilstrecken gibt, dessen Ecken zusätzlich auf einer Kreislinie liegen und der $\frac{n(n-4)}{2}+1$ Selbstüberschneidungen besitzt.



Sei $n \geq 4$ geradzahlig, also $n = 2k$ für ein geeignetes $k \geq 2$. Wir verteilen n Punkte (nicht notwendigerweise gleichabständig) auf einer Kreislinie und benennen diese fortlaufend gegen den Uhrzeigersinn mit $L_0, L_1, ..., L_{k-1}, R_0, R_1, ..., R_{k-1}$.

Den Streckenzug konstruieren wir folgendermaßen: Wir beginnen mit der Strecke R_0L_0. Nun verbinden wir R_0 der Reihe nach mit L_1, R_2, L_3, R_4, ... usw.; L_0 verbinden wir mit R_1, L_2, R_3, L_4 usw. bis alle Punkte in diesem Streckenzug genau einmal vorkommen; schließlich verbinden wir noch die beiden letzten Punkte L_{k-1} und R_{k-1}. Es entsteht also der Streckenzug (offensichtlich ist jeder Punkt genau einmal enthalten)

$L_{k-1}R_{k-2}...R_4L_3R_2L_1R_0L_0R_1L_2R_3L_4 \quad R_{k-1}L_{k-1}$ oder $R_{k-1}L_{k-2}...R_4L_3R_2L_1R_0L_0R_1L_2R_3L_4 \quad L_{k-1}R_{k-1}$,

je nachdem k gerade oder ungerade ist.

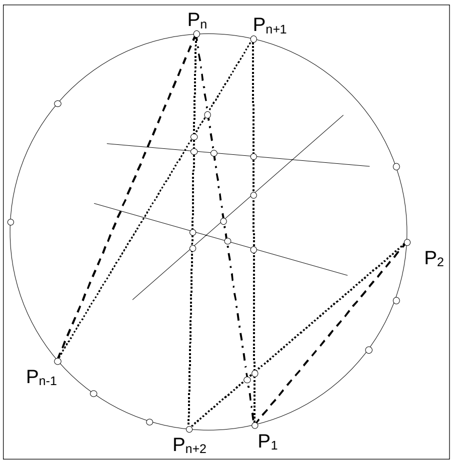
Nun zählen wir die Überschneidungen: Wir betrachten zunächst eine der Strecken R_iL_{i+1} oder L_iR_{i+1} für ein $i = 0, 1, ..., k-2$. Sie teilt die Kreislinie in zwei Teile auf; wobei in einem Teil je k, im anderen je $k-2 = \frac{(n-4)}{2}$ Punkte liegen (nämlich die Punkte $L_{i+2}, L_{i+3}, ... R_{i-2}, R_{i-1}$ bzw. $R_{i+2}, R_{i+3}, ... L_{i-2}, L_{i-1}$). Von jedem dieser Punkte gehen zwei Strecken aus, deren Endpunkt jeweils in dem anderen Teil der Kreislinie liegt; die beiden Strecken schneiden also die betrachtete Strecke. Insgesamt werden so auf jeder der Strecken R_iL_{i+1} oder L_iR_{i+1} (es gibt $n-2$ solche Strecken) genau $n-4$ Selbstüberschneidungen erzeugt.

Nun betrachten wir noch die beiden Strecken R_0L_0 und $R_{k-1}L_{k-1}$. Sie schneiden jede andere Strecke mit Ausnahme von sich selbst und derjenigen beiden, die einen Endpunkt R_0, L_0, R_{k-1} oder L_{k-1} haben. Dies erzeugt nochmals $n-3$ Selbstüberschneidungen auf jeder der beiden Strecken.

Mit einfacher kombinatorischer Überlegung (jede der Selbstüberschneidungen wird doppelt gezählt) hat der Streckenzug demnach $\frac{(n-2)(n-4)}{2}+2\frac{n-3}{2} = \frac{(n-4)}{2}+1$ Selbstüberschneidungen.

Alternative zum Teil 2b) (Wir konstruieren einen solchen Streckenzug mit vollständiger Induktion nach n, n gerade, $n\geq4$):

Induktionsanfang: Für $n = 4$ ist das überschlagene Quadrat ein geschlossener Streckenzug, dessen Eckpunkte alle auf einem Kreis liegen und der genau $1 = \frac{n(n-4)}{2}+1$ Selbstüberschneidungen besitzt; d.h. für $n = 4$ ist $A(n) \geq \frac{n(n-4)}{2}+1$.



Induktionsannahme: Wir nehmen an, dass es für ein bestimmtes gerades $n \geq 4$ einen solchen Streckenzug gibt.

Induktionsschluss: Hieraus konstruieren wir nun einen solchen Streckenzug mit n+2 Strecken, der $\frac{(n+2)((n+2)-4)}{2}+1$ Selbstüberschneidungen besitzt.

Hierzu suchen wir uns zunächst bei einem bestehenden geschlossenen Streckenzug der Länge n eine Strecke, die mit genau $n-3$ anderen Teilstrecken Selbstüberschneidungen besitzt, o.B.d.A. sei dies die Strecke P_n P_1 (vgl. Skizze). Eine solche Strecke existiert: Keine Strecke kann mehr als $n-3$

Selbstüberschneidungen haben (vgl. Argumentation in Teil (1a)); hätte jede Strecke weniger als $n-3$, also höchstens $n-4$ Selbstüberschneidungen, dann hätte der Streckenzug insgesamt höchstens $\frac{n(n-4)}{2} < \frac{n(n-4)}{2}+1$ Selbstüberschneidungen, was im Widerspruch zur Induktionsannahme steht.

Nun wählen wir auf der Kreislinie einen Punkt P_{n+1} so, dass P_{n+1} und P_{n-1} in verschiedenen Halbebenen bez. der Geraden (P_nP_1), liegen und dass einer der beiden Kreisbögen zwischen P_n und P_{n+1} keinen weiteren Eckpunkt des Streckenzuges enthält; entsprechend wählen wir einen Punkt P_{n+2} so, dass P_2 und P_{n+2} in verschiedenen Halbebenen liegen und einer der beiden Kreisbögen zwischen P_1 und P_{n+2} keinen weiteren Eckpunkt des Streckenzuges enthält.

Schließlich ersetzen wir die Strecke $P_{n-1}P_n$ durch den Streckenzug $P_{n-1}P_{n+1}P_1$ und die Strecke P_1P_2 durch den Streckenzug $P_nP_{n+2}P_2$. (Anders formuliert: Wir ersetzen den aus drei Strecken bestehenden Streckenzug $P_{n-1}P_nP_1P_2$ durch den aus 5 Strecken bestehenden Streckenzug $P_{n-1}P_{n+1}P_1P_nP_{n+2}P_2$.)

Der neu entstandene Streckenzug hat nun die geforderten Eigenschaften:

Er hat $n+2$ Ecken, alle Punkte liegen auf einer Kreislinie.

Er hat mindestens $\frac{(n+2)((n+2)-4)}{2}+1$ Selbstüberschneidungen:

Nach E2 (Beweisteil (1b)) liegen alle Punkte P_s ($s = 2, 3, ..., n-1$) mit geradem Index s in der einen Halbebene bez. (P_nP_1), alle Punkte mit ungeradem Index s in der anderen. Nach Konstruktion (das durch die Strecken P_nP_{n+2} und $P_{n+1}P_1$ aus dem Kreis geschnittene Gebiet enthält keine weiteren Endpunkte) gilt dies auch bezüglich der Geraden (P_nP_{n+2}) und $(P_{n+1}P_1)$. Alle Teilstrecken des Streckenzuges, die die Sehne P_nP_1 schneiden, haben Endpunkte mit aufeinanderfolgenden Indices, also einem geraden und einem ungeraden; damit schneiden diese Strecken auch die beiden neuen Sehnen $P_{n+1}P_1$ und P_nP_{n+2}. Die $n-3$ Selbstüberschneidungen der Strecke P_nP_1 bleiben also erhalten, und es kommen noch einmal $2(n-3)$ Selbstüberschneidungen auf den Strecken Pb_nP_{n+2} und $P_{n+1}P_1$ dazu.

Mit analoger Begründung schneidet jede Sehne, die die "gestrichene" Strecke $P_{n-1}P_n$ schneidet, auch die "Ersatz-"Sehne $P_{n-1}P_{n+1}$. Die Selbstüberschneidungen der gestrichenen Strecke $P_{n-1}P_n$ bleiben also als Selbstüberschneidungen auf der Strecke $P_{n-1}P_{n+1}$ erhalten, dazu kommen noch 2 Selbstüberschneidungen der Strecke $P_{n-1}P_{n+1}$ mit der Sehne P_nP_{n+2} und P_nP_1.

Entsprechend bleiben die Selbstüberschneidungen der gestrichenen Strecke P_1P_2 als Selbstüberschneidungen auf der Strecke $P_{n+2}P_2$ erhalten, dazu kommen noch 2 Selbstüberschneidungen mit der Sehne $P_{n+1}P_1$ und P_nP_1.

Zu den Selbstüberschneidungen des ursprünglichen Streckenzuges mit n Strecken kommen also durch die Erweiterung um 2 Strecken noch weitere $2(n-3)+2+2 = 2n-2$ Selbstüberschneidungen hinzu, damit hat der neue Streckenzug mindestens $\frac{n(n-4)}{2}+1+2n-2 = \frac{n^2-4n+4n-4}{2}+1 = \frac{(n+2)((n+2)-4)}{2}+1$ Selbstüberschneidungen.

Bemerkung: Die induktive Konstruktion kann auch für ungerade n benützt werden: Man beginnt für $n = 3$ mit einem gleichseitigen Dreieck, das tatsächlich $\frac{n(n-3)}{2} = 0$ Selbstüberschneidungen hat. Nach gleicher Vorschrift ergänzt man zwei Punkte P_{n+1} und P_{n+2} und erweitert wie oben den bestehenden Streckenzug um zwei Strecken. Die Argumentation für die Anzahl von Selbstüberschneidungen kann man direkt übernehmen, allerdings liegen bei ungeradem n dann die beiden neuen Punkte in der gleichen Halbebene bez. P_nP_1; damit überschneiden sich auch noch die Strecken P_nP_{n+2} und $P_{n+1}P_1$ und die Zunahme an Selbstüberschneidungen beträgt dann $2n-1$. Tatsächlich ist dann $\frac{n(n-3)}{2}+2n-1$ $= \frac{(n+2)((n+2)-3)}{2}$.