Bundeswettbewerb Mathematik
Wissenschaftszentrum • Postfach 20 14 48 • 53144 Bonn
Fon: 0228 - 9 59 15-20 • Fax: 0228 - 9 59 15-29
e-mail: info@bundeswettbewerb-mathematik.de
www.bundeswettbewerb-mathematik.de

Korrekturkommission • Karl Fegert

Aufgaben und Lösungen

1. Runde 2006

Über Kommentare und Ergänzungen zu diesen Lösungsbeispielen freuen wir uns!

Anschrift oder Email–Adresse s.o.

Stand: Mai 2006

Aufgabe 1: Man finde zwei aufeinander folgende positive ganze Zahlen, deren Quersummen beide durch 2006 teilbar sind.

Anmerkung: Die Richtigkeit des Resultates ist zu beweisen.

1. Lösung (einfache Angabe solcher Zahlen mit Verifikation): Die Zahlen

$n_1 \;:=\; \underbrace{111...11}_{\substack{2005\\ \text{Einsen}}}\underbrace{99...99}_{\substack{223\\ \text{Neunen}}}$ und deren Nachfolger

$n_2 \;:=\; \underbrace{111...1}_{\substack{2004\\ \text{Einsen}}}2\underbrace{00...00}_{\substack{223\\ \text{Nullen}}}$

erfüllen die Bedingungen der Aufgabe:

- Offensichtlich ist $n_1 + 1 = n_2$.
- Die Quersumme von n_1 ist $2005\cdot 1 + 223\cdot 9 = 2005 + 2007 = 2\cdot 2006$; diese Zahl ist offensichtlich durch 2006 teilbar.
- Die Quersumme von n_2 ist $2004\cdot 1 + 2 = 2006$; diese Zahl ist offensichtlich durch 2006 teilbar.

2. Lösung (Konstruktion eines solchen Zahlenpaares): Für ganzzahlige n sei mit $Q(n)$ die Quersumme von n bezeichnet, d.h. die Summe der Ziffern in der Dezimaldarstellung von n. Mit $k(n)$ sei die Position der ersten von 9 verschiedenen Ziffer von rechts in der Dezimaldarstellung von n bezeichnet (dies könnte auch eine führende 0 sein; z.B. ist $k(79299) = 3$, $k(999) = 4$ und $k(1234) = 1$).

Erhöht man nun eine Zahl um 1, so fallen in ihrer Quersumme die Neunen am Ende der Zahl weg und die erste von 9 verschiedene Ziffer von rechts erhöht sich um 1, es ist also

$Q(n+1) = Q(n) - (k(n) - 1)\cdot 9 + 1$. (*)

Für die beiden gesuchten Zahlen N und $N+1$ suchen wir nun notwendige Bedingungen:

Aus $2006|Q(N)$ und $2006|Q(N+1)$ folgt bekanntlich $2006|(Q(N) - Q(N+1))$, also $2006|((k(N) - 1)\cdot 9 - 1)$. Da der Ausdruck $(k(N) - 1)\cdot 9 - 1$ den Wert Null nicht annehmen kann, ist $(k(N) - 1)\cdot 9 - 1 \geq 2006$, also $k(N) - 1 \geq 223$. Damit hat die Zahl N mindestens 223 Neunen am Ende; ihr Nachfolger $N+1$ mindestens 223 Nullen.

Aus $Q(N+1) > 1$ und $2006|Q(N+1)$ folgt $Q(N+1) \geq 2006$. Da $2006 = 222\cdot 9 + 8$, ist die kleinste Zahl mit Quersumme 2006 und 223 Nullen am Ende die Zahl $8\underbrace{99...999}_{\substack{222\\ \text{Neunen}}}\underbrace{00...00}_{\substack{223\\ \text{Nullen}}}$.

Diese Zahl führt nämlich bereits zu einer Lösung:

$N \;:=\; 8\underbrace{99...99}_{\substack{221\\ \text{Neunen}}}8\underbrace{99...99}_{\substack{223\\ \text{Neunen}}}$ hat die Quersumme

$2\cdot 8 + (221+223)\cdot 9 = 4012 = 2\cdot 2006$; und

$N + 1 = 8\underbrace{99...999}_{\substack{222\\ \text{Neunen}}}\underbrace{00...00}_{\substack{223\\ \text{Nullen}}}$ hat die Quersumme $8 + 222\cdot 9 = 2006$;

beide Quersummen sind offensichtlich durch 2006 teilbar.

Variante: Da sich die Quersummen von aufeinander folgenden Zahlen nur dann nicht um genau 1 unterscheiden, wenn die kleinere der beiden Zahlen (wir bezeichnen sie mit N) mindestens eine Ziffer 9 am Ende hat, muss die größere Zahl (also $N + 1$) mindestens eine Endziffer 0 haben.

Wir betrachten also Zahlen $N + 1$, die mindestens eine Null am Ende haben und deren Quersumme durch 2006 teilbar ist. Offensichtlich erfüllt jede Zahl der Form $\underbrace{111...11}_{\substack{2006\\ \text{Einsen}}}\underbrace{00...00}_{\substack{k\\ \text{Nullen}}}$ $(k > 0)$ diese Bedingung.

Die Zahl N ist dann von der Form $\underbrace{111...11}_{\substack{2005\\ \text{Einsen}}}0\,\underbrace{99...99}_{\substack{k\\ \text{Neunen}}}$. Die Quersumme von N ist dann $2005 + k\cdot 9$; diese Zahl soll laut Aufgabenstellung durch 2006 teilbar sein. Das ist dann der Fall, wenn es ein Paar $(t \mid k)$ ganzer positiver Zahlen gibt, für das $t\cdot 2006 - k\cdot 9 = 2005$ oder äquivalent $t\cdot 2006 - 2005 = k\cdot 9$ gilt. Da bei Division durch 9 die Zahl 2005 den Rest 7 lässt, muss auch $t\cdot 2006$ diesen Rest lassen, mit einfachem Probieren erhält man z.B. $t = 2$, $k = 223$.

Bemerkungen: Wesentliche Voraussetzung für die Existenz einer Lösung ist die Tatsache, dass $\mathrm{ggT}(2006,9) = 1$.

Die Aufgabenstellung bezieht sich auf die Darstellung der Zahlen im Zehnersystem. Eine Verallgemeinerung auf andere Stellenwertsystem mit Grundzahl p ist möglich. Es gibt nur eine Lösung, wenn $\mathrm{ggT}(2006, p - 1) = 1$.

Aufgabe 2: Man beweise, dass es keine ganzen Zahlen x und y gibt, für die die Gleichung $x^3 + y^3 = 4(x^2y + xy^2 + 1)$ gilt.

1. Beweis (durch Widerspruch): Wir nehmen an, es gäbe ganze Zahlen x und y, die die Gleichung erfüllen. Insbesondere ist dann auch xy eine ganze Zahl. Wir formen die gegebene Gleichung äquivalent um:

$$\begin{array}{lrcll} & x^3 + y^3 & = & 4(x^2y + xy^2 + 1) & \mid + 3(x^2y + xy^2) \\ \Leftrightarrow & x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 & = & 7(x^2y + xy^2) + 4 & \\ \Leftrightarrow & (x+y)^3 & = & 7xy(x+y) + 4 & \mid - 7xy(x+y) \\ \Leftrightarrow & (x+y) \cdot [(x+y)^2 - 7xy] & = & 4 & \end{array}$$

Da x und y ganze Zahlen sind, sind auch die beiden Faktoren auf der linken Seite ganze Zahlen und somit ganzzahlige Teiler der Zahl 4. Insbesondere ist also $(x + y) \in T_4 := \{-1, 1, -2, 2, -4, 4\}$.

Nun setzen wir diese 6 möglichen Werte in die Gleichung ein und erhalten

$$\text{für } (x+y) = \pm 1: \quad \pm 1 \cdot [1^2 - 7xy] = 4 \quad \Rightarrow \mp 7xy = \mp 1 + 4 \quad \Rightarrow xy = \frac{1 \mp 4}{7},$$

$$\text{für } (x+y) = \pm 2: \quad \pm 2 \cdot [2^2 - 7xy] = 4 \quad \Rightarrow xy = \frac{4 \mp 2}{7},$$

$$\text{für } (x+y) = \pm 4: \quad \pm 4 \cdot [4^2 - 7xy] = 4 \quad \Rightarrow xy = \frac{16 \mp 1}{7},$$

in jedem Fall einen Widerspruch zur Ganzzahligkeit von xy.

Variante: Die gegebene Gleichung ist äquivalent zu

$$\begin{array}{lrcl} & x^3 + y^3 & = & 4(x^2y + xy^2 + 1) \\ \Leftrightarrow & (x+y)(x^2 - xy + y^2) & = & 4xy(x+y) + 4 \\ \Leftrightarrow & (x+y)(x^2 - 5xy + y^2) & = & 4 \end{array}$$

Da x und y ganze Zahlen sind, sind auch die beiden Faktoren auf der linken Seite ganze Zahlen; da rechts die Zahl 4 steht, sind nur folgende Fälle möglich:

$$\begin{array}{lllll} & (x+y) = \pm 1 & \text{und} & (x^2 - 5xy + y^2) = \pm 4 & \text{(Fall 1)} \\ \text{oder} & (x+y) = \pm 2 & \text{und} & (x^2 - 5xy + y^2) = \pm 2 & \text{(Fall 2)} \\ \text{oder} & (x+y) = \pm 4 & \text{und} & (x^2 - 5xy + y^2) = \pm 1. & \text{(Fall 3)} \end{array}$$

Im Fall 1 folgern wir aus der ersten Gleichung $x = -y \pm 1$, setzen dies in die zweite Gleichung ein und erhalten die quadratische Gleichung $(-y \pm 1)^2 - 5(-y \pm 1)y + y^2 = \pm 4$ oder äquivalent

$$7y^2 \mp 7y + 1 \mp 4 = 0. \quad (1^*).$$

Die Diskriminante dieser quadratischen Gleichung hat den Wert $7^2 + 4 \cdot 7 \cdot 3 = 133$ bzw. $7^2 - 4 \cdot 7 \cdot 5 = -91$, also in beiden Vorzeichenfällen keine Quadratzahl. Eine Lösung y von (1*) kann also nicht ganzzahlig sein im Widerspruch zur Annahme.

Im Fall 2 führt $x = -y \pm 2$ zur Gleichung $(-y \pm 2)^2 - 5(-y \pm 2)y + y^2 = \pm 2$ bzw. äquivalent zu $7y^2 \mp 14y + (4 \mp 2) = 0$ mit der Diskriminante $14^2 - 4 \cdot 7 \cdot 2 = 140$ bzw. $14^2 - 4 \cdot 7 \cdot 6 = 28$; im Fall 3 führt $x = -y \pm 4$ zur Gleichung $(-y \pm 4)^2 - 5(-y \pm 4)y + y^2 = \pm 1$ bzw. $7y^2 \mp 28y + (16 \mp 1) = 0$ mit der Diskriminante $28^2 - 4 \cdot 7 \cdot 15 = 364$ bzw. $28^2 - 4 \cdot 7 \cdot 17 = 308$. In jedem Fall ist die Diskriminante ganzzahlig, aber keine Quadratzahl, also ist die Wurzel daraus irrational; dies steht im Widerspruch zur Ganzzahligkeit von y.

2. Beweis (Betrachtung mod 7, eigtl. eine Variante des 1. Beweises): Wir nehmen an, es gäbe ganzen Zahlen x und y, die die Gleichung erfüllen, und formen die gegebene Gleichung äquivalent um:

$$
\begin{aligned}
& & x^3 + y^3 &= 4(x^2y + xy^2 + 1) \qquad \mid + 3(x^2y + xy^2) \\
&\Leftrightarrow & x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 &= 7(x^2y + xy^2) + 4 \\
&\Leftrightarrow & (x + y)^3 &= 7xy(x + y) + 4.
\end{aligned}
$$

Also ist $(x + y)^3 \equiv 4 \bmod 7$. Die Zahl $(x + y)$ gehört einer der Restklassen 0, ± 1, ± 2, $\pm 3 \bmod 7$ an. Keine dieser Restklassen erfüllt aber diese Bedingung: Es ist $0^3 \equiv 0 \bmod 7$, $(\pm 1)^3 \equiv (\pm 2)^3 \equiv \pm 1 \bmod 7$ und $(\pm 3)^3 \equiv \mp 1 \bmod 7$. Damit haben wir den gewünschten Widerspruch erhalten.

3. Beweis (durch Widerspruch): Wir nehmen an, es gäbe ganze Zahlen x und y, die die Gleichung $x^3 + y^3 = 4(x^2y + xy^2 + 1)$ erfüllen.

Zunächst stellen wir fest, dass die rechte Seite ganzzahliges Vielfaches von 4 ist, damit ist $x^3 + y^3$ gerade. Hieraus folgt, dass x und y entweder beide gerade oder beide ungerade sind; ihr arithmetisches Mittel $m := \frac{x+y}{2}$ ist damit ganzzahlig. Übrigens ist $m \neq 0$, sonst wäre $x = -y$ und die Gleichung äquivalent zu $0 = 4$.

Zu einer Lösung (x,y) gibt es also ganze Zahlen m und h, für die $x = m + h$ und $x = m - h$. Dies setzen wir ein und erhalten

$$
\begin{aligned}
& & x^3 + y^3 &= 4(x^2y + xy^2 + 1) \\
&\Leftrightarrow & (m + h)^3 + (m - h)^3 &= 4(m + h)^2 \cdot (m - h) + 4(m - h)^2 \cdot (m + h)^2 + 4 \\
&\Leftrightarrow & 2m^3 + 6mh^2 &= 8m^3 - 8mh^2 + 4 \\
&\Leftrightarrow & 14mh^2 &= 6m^3 + 4 \\
&\Leftrightarrow & 7h^2 &= 3m^3 + \frac{2}{m} \qquad \text{(es ist ja } m \neq 0 \text{ !).}
\end{aligned}
$$

Die linke Seite ist für jede ganzzahlige Lösung (x,y) ganzzahlig und ein Vielfaches von 7. Die rechte Seite ist das aber nie: sie ist nur für $m \in \{1, -1, 2, -2\}$ ganzzahlig, sie nimmt dabei einen Wert aus $\{13, 11, 5, 1\}$ an; keiner dieser Werte ist Vielfaches von 7. Damit ist der Widerspruch hergeleitet.

Aufgabe 3: Für die Seitenlängen a, b und c eines Dreiecks gelte die Beziehung $a^2 + b^2 > 5c^2$.

Man beweise, dass dann c die Länge der kürzesten Seite ist.

Vorbemerkung: Die Variablen a, b und c stehen für Längen von Strecken. Gelegentlich werden wir aber auch die Strecken selbst mit den Buchstaben a, b und c bezeichnen.

1. Beweis: Da a, b und c die Längen der Seiten eines Dreiecks sind, gilt die Dreiecksungleichung, also insbesondere $b + c > a$. Hieraus folgt durch Quadrieren beider (positiven!) Seiten $b^2 + 2bc + c^2 > a^2$. Addition von b^2 auf beiden Seiten ergibt dann zusammen mit der Voraussetzung $2b^2 + 2bc + c^2 > a^2 + b^2 > 5c^2$; hieraus folgt sofort $b^2 + bc - 2c^2 > 0$ oder $(b - c)\cdot(b + 2c) > 0$. Links steht also ein positives Produkt, dessen zweiter Faktor stets positiv ist, also muss auch der erste Faktor positiv sein. Hieraus folgt sofort $b > c$.

Analog (man vertausche im Beweis die Variablen a und b) ergibt sich $a > c$.

2. Beweis (durch Widerspruch): Wir nehmen an, dass c nicht die Länge der kürzesten Seite wäre, also dass o.B.d.A. $b \le c$ (falls $a \le c$ vertausche man im folgenden Beweis die Bezeichnungen a und b). Dann wäre nach Dreiecksungleichung $a < b + c < 2c$, also $a^2 + b^2 < 4c^2 + c^2 = 5c^2$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Ebenso führt man $c \ge a$ zum Widerspruch.

Variante: Wir nehmen an, dass c nicht die Länge der kürzesten Seite wäre, sondern o.B.d.A. a (falls dies b wäre, vertausche man im folgenden Beweis die Bezeichnungen a und b). Es genügt zu zeigen, dass die Annahmen $a \le b \le c$ und $a \le c \le b$ beide zum Widerspruch führen.

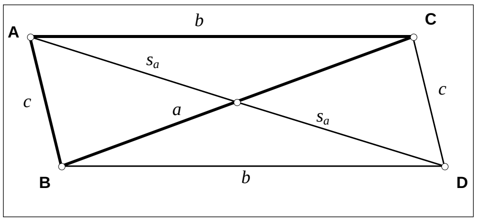
> Die Annahme $a \le b \le c$ führt nach Quadrieren – alle beteiligten Variablen sind positiv belegt – zu $a^2 \le b^2 \le c^2$. Aus dem rechten Teil dieser Ungleichung folgt nach Addition von a^2 die Ungleichung $b^2 + a^2 \le c^2 + a^2$ und hieraus mit der Voraussetzung $5c^2 < c^2 + a^2$ oder äquivalent $4c^2 < a^2$, also $2c < a$; insbesondere ist dann $c < a$ im Widerspruch zur Voraussetzung.
>
> Die Annahme $a \le c \le b$ führt nach Quadrieren zu $a^2 \le b^2 \le c^2$; hieraus folgt nach Addition von b^2 die Ungleichung $a^2 + b^2 \le c^2 + b^2$, also $5c^2 < c^2 + b^2$, hieraus $4c^2 < b^2$ und schließlich $2c < b$. Zusammen mit $a \le c$ erhält man über $a + c \le 2c < b$ einen Widerspruch zur Dreiecksungleichung.

3. Beweis (mit cos–Satz): Die Aufgabenstellung ist symmetrisch bezüglich a und b, also können wir o.B.d.A annehmen, dass $a \le b$. Es genügt dann zu zeigen, dass die Fälle $a \le b \le c$ und $a \le c \le b$ beide zu einem Widerspruch führen.

Aus der Voraussetzung $a^2 + b^2 > 5c^2$ folgt durch einfaches Umformen zusammen mit dem Cosinus-Satz $a^2 + b^2 - 4c^2 > c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$, also $4c^2 < 2ab\cos(\gamma)$ oder $\cos(\gamma) > \frac{2c^2}{ab}$.

> Die Annahme $a \le b \le c$ führt wegen $\cos(\gamma) > \frac{2c^2}{ab} \ge \frac{2c^2}{c \cdot c} = 2$ sofort zum Widerspruch zu $\cos(\gamma) \le 1$ für alle Winkel γ.
>
> Die Annahme $a \le c \le b$ führt über $1 \ge \cos(\gamma) > \frac{2c^2}{ab} \ge \frac{2c^2}{cb} = \frac{2c}{b}$ zur Ungleichung $2c < b$. Diese führt zusammen mit $a \le c \le b$ zur Ungleichung $a + c \le 2c < b$ und damit ebenfalls zu einem Widerspruch, hier zur Dreiecksungleichung.

4. Beweis (mit einem Satz für Parallelogramme): Wir betrachten ein Dreieck ΔABC mit den üblichen Bezeichnungen; die Länge der von A ausgehenden Seitenhalbierenden bezeichnen wir mit s_a. Schließlich ergänzen wir das Dreieck ABC durch einen Punkt D zum Parallelogramm ABDC; dessen Seiten haben dann die Längen c bzw. b, die Diagonalen die Längen $2s_a$ bzw. a.



Nach Diagonalensatz im Parallelogramm gilt $(2s_a)^2 + a^2 = 2b^2 + 2c^2$; Addition von $(b^2 - 5c^2)$ auf beiden Seiten führt zu $(2s_a)^2 + a^2 + b^2 - 5c^2 = 3b^2 - 3c^2$.

Gilt nun die Voraussetzung, also $a^2 + b^2 - 5c^2 > 0$, so folgt $0 < (2s_a)^2 < 3(b^2 - 3c^2)$ und hieraus sofort $b > c$.

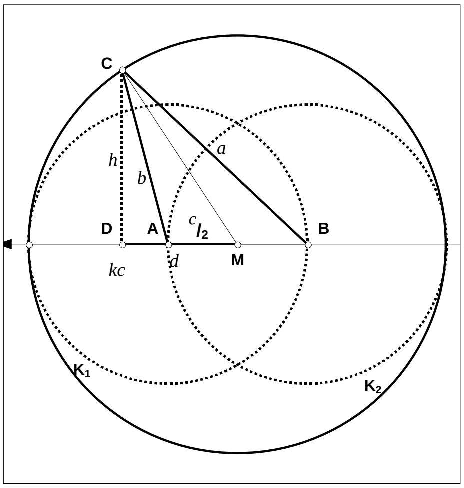
Analog zeigt man $a > c$.

5. Beweis (mit Hilfe der Beschreibung der Punktmenge {C | $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 > 5\overline{AB}^2$}:

Hilfssatz (kann als Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras oder Anwendung des Parallelogramm-Satzes angesehen werden):

In einem Dreieck ΔABC sei M der Mittelpunkt der Seite AB. Dann liegt C genau dann auf dem Kreis um M mit Radius kc, wenn $a^2 + b^2 = (2k^2 + \frac{1}{2})c^2$; zusätzlich liegt C außerhalb bzw. innerhalb, wenn das "=" Zeichen durch ein ">" bzw. ein "<" ersetzt wird.

(Für $k = \frac{1}{2}$ erhält man in Verbindung mit dem Satz von Thales so den Satz des Pythagoras; für $k = \frac{3}{2}$ erhalten wir $a^2 + b^2 = 5c^2$. Man kann die Aussage auch als eine Umformulierung des Parallelogramm-Satzes deuten.)



Beweis: Die Länge der Höhe von C sei mit h bezeichnet, der Fußpunkt mit D, schließlich sei d die Länge der Strecke AM. Anwendung des Satzes von Pythagoras in den rechtwinkligen Dreiecken ΔCDB, ΔCDA sowie des Höhensatzes im rechtwinkligen Dreieck mit Höhe h über dem Durchmesser des Kreises um M ergibt:

$$h^2 = a^2 - \left(d + \frac{c}{2}\right)^2, \quad h^2 = b^2 - \left(d - \frac{c}{2}\right)^2,$$
$$h^2 = (kc - d)\cdot(kc + d).$$

Wir multiplizieren beide Seiten der letzten Gleichung mit 2 und setzen dann die beiden ersten ein und erhalten so

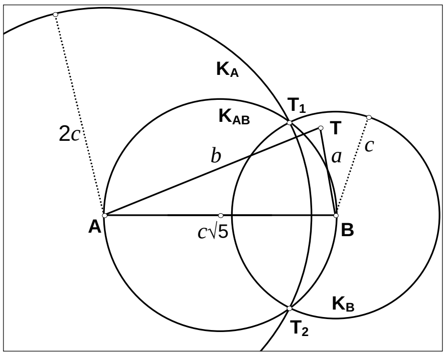
$$2(k^2c^2 - d^2) = 2h^2 = a^2 - \left(d + \frac{c}{2}\right)^2 + b^2 - \left(d - \frac{c}{2}\right)^2 = a^2 + b^2 - 2d^2 - \frac{c^2}{2};$$

Addition von $2d^2 + \frac{c^2}{2}$ auf beiden Seiten ergibt sofort die Behauptung $(2k^2 + \frac{1}{2})c^2 = a^2 + b^2$.

Wenn C innerhalb des Kreises um M liegt, ist $h^2 < (kc - d)\cdot(kc + d)$ und das "<"–Zeichen bleibt bei der Umformung erhalten; wenn C außerhalb des Kreises liegt, gilt Entsprechendes mit dem ">"–Zeichen.

Es liegt also C nicht auf der abgeschlossenen Kreisscheibe des Kreises um M mit Radius $1{,}5c$. Andererseits sind die Kreisscheiben der Kreise um A und B mit Radius c Teilmengen dieser Kreise; d.h. C kann nicht auf diesen Kreisscheiben liegen. Letzteres ist aber gleichbedeutend mit $b > c$ bzw. $a > c$, und das war zu zeigen.

6.. Beweis (~skizze, mit Satz des Pythagoras): Da a, b und c die Seitenlängen eines Dreiecks sind, gilt die Dreiecksungleichung $|a-b| < c < a+b$. Aus der Voraussetzung folgern wir zusätzlich $5c^2 < a^2+b^2 < a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2$, also $c\sqrt{5} < a+b$. Wegen $\sqrt{5} > 1$ können wir dies zusammensetzen zu $|a-b| < c < c\sqrt{5} < a+b$. Dies bedeutet aber, dass auch die Werte a, b und $c\sqrt{5}$ die Dreiecksungleichung erfüllen, d.h. dass es ein Dreieck mit diesen Seitenlängen gibt.



Wir betrachten ein solches Dreieck und bezeichnen die Ecken so mit A, B und T, dass AB die Länge $c\sqrt{5}$, AT die Länge b und BT die Länge a hat; zusätzlich betrachten wir die folgenden drei Kreise: Kreis um A mit Radius $2c$, Kreis um B mit Radius c und den Thaleskreis über AB; die zugehörigen abgeschlossenen Kreisscheiben bezeichnen wir mit K_A, K_B bzw. K_{AB}, die Schnittpunkte der Ränder von K_A und K_B mit T_1 und T_2. (T_1 und T_2 existieren, weil B ein Punkt von K_{AB} ist und der Radius von K_B (nämlich c) kleiner als der Durchmesser von K_{AB} (nämlich $c\sqrt{5}$) ist.)

Es ist $(2c)^2 + c^2 = (c\sqrt{5})^2$, also erfüllen die Seitenlängen der Dreiecke ΔABT_1 und ΔABT_2 die Pythagorasgleichung, somit liegen T_1 und T_2 auch auf dem Thaleskreis über AB.

"Man sieht" (ein ausführlicher Beweis hierfür ist am Ende der Aufgabe angehängt):

$K_A \cap K_B \subset K_{AB}$ (*); insbesondere gilt: $T \notin K_{AB} \wedge T \in K_B \Rightarrow T \notin K_A$ (**).

Die Annahme $c \geq a$ führt dann zu folgendem Widerspruch: Mit Pythagoras ist die Voraussetzung $a^2+b^2 > 5c^2 = (c\sqrt{5})^2$ äquivalent zu $T \notin K_{AB}$; aus $c \geq a$ folgt $T \in K_B$. Nach (**) ist also $T \notin K_A$, also $b > 2c$. Dann ist aber $b - a \geq 2c - c = c$ im Widerspruch zur Dreiecksungleichung.

Analog führt man $c \geq b$ zum Widerspruch.

Beweis für (*): Die Strecke T_1T_2 ist Sehne in allen drei Kreisen, alle ihre inneren Punkte sind also alle auch innere Punkte von jeder der drei Kreisscheiben. Insbesondere liegt T_1T_2 vollständig in $K_A \cap K_B$, d.h. es gibt also im Innern von K_{AB} gemeinsame innere Punkte von K_A und K_B; einen beliebigen davon nennen wir P_i.

Gäbe es nun auch einen Punkt P_a im Innern von $K_A \cap K_B$, der aber nicht in K_{AB} liegt, dann müsste P_iP_a die Kreislinie von K_{AB} schneiden, d.h. Teile der Kreislinie von K_{AB} müssten im Inneren von $K_A \cap K_B$ liegen.

Dies ist jedoch nicht der Fall: Die Punkte T_1T_2 zerlegen die Kreislinie von K_{AB} in zwei Bögen. Der eine von den beiden enthält den Punkt B; da $\overline{AB} = c\sqrt{5} > 2c$, liegt B nicht in K_A und damit auch (mit Ausnahme der Endpunkte) der ganze Bogen nicht. Der andere Bogen enthält den Punkt A; da $\overline{AB} = c\sqrt{5} > c$, liegt A nicht in K_B und damit auch (mit Ausnahme der Endpunkte) der ganze Bogen.

7. Beweis (Abschätzung ohne Dreiecksungleichung): Wir betrachten ein Dreieck ΔABC, in dem – mit den üblichen Bezeichnungen – die Ungleichung $a^2+b^2 > 5c^2$ gilt. Bekanntlich teilen die Berührpunkte seines Inkreises die Seiten in Abschnitte auf, von denen je zwei gleichlang sind; wir können deren Längen so mit x, y, z bezeichnen, dass $c = x+y$, $a = y+z$ und $b = z+x$. Die Voraussetzung können wir damit äquivalent umformen zu

$$\begin{aligned}
& a^2+b^2 &&> 5c^2\\
\Leftrightarrow\quad & (y+z)^2 + (z+x)^2 &&> 5(x+y)^2\\
\Leftrightarrow\quad & 2z^2 &&> 4x^2+4y^2+10xy-2xz-2yz\\
\Leftrightarrow\quad & 3z^2 &&> x^2+y^2+z^2+2xy-2xz-2yz + 3x^2+3y^2+6xy + 2xy\\
\Leftrightarrow\quad & 3z^2 &&> (x+y-z)^2 + 3(x+y)^2 + 2xy
\end{aligned}$$

Weil alle Variablen positiv sind, ist $(x + y - z)^2 \geq 0$ und $2xy > 0$, hieraus folgt $3z^2 > 3(x + y)^2$, also $z > x$ und $z > y$. Addition von y bzw. x auf beiden Seiten führt über $z + y > x + y$ zu $a > c$ und über $z + x > y + x$ zu $b > c$; dies war zu zeigen.

Bemerkungen: Wie das Beispiel des Dreiecks ΔABT_1 aus dem 6. Beweis zeigt, wird die Aussage falsch, wenn man in der Voraussetzung den Faktor 5 durch eine kleinere Zahl ersetzt.

Die Aussage ist nicht umkehrbar: Es gibt Dreiecke, in denen c die kürzeste Seite ist und gleichzeitig $a^2 + b^2 \leq 5c^2$. Dies ist veranschaulicht in der Figur zum 5. Beweis: "c ist kürzeste Seite" ist gleichbedeutende mit "C liegt außerhalb der beiden kleinen Kreise"; und "$a^2 + b^2 > 5c^2$" ist gleichbedeutend mit "C liegt außerhalb des großen Kreises". Wenn C also in der "Sichel" liegt, erfüllt das Dreieck die erste, aber nicht die zweite Bedingung.

Aufgabe 4: Ein quadratisches Blatt Papier liegt auf dem Tisch. Es wird schrittweise in mehrere Teile zerschnitten: Bei jedem Schritt wird ein Teil vom Tisch genommen und durch einen geraden Schnitt in zwei Teile zerlegt; diese beiden Teile werden auf den Tisch zurückgelegt.

Man bestimme die kleinste Anzahl an Schritten, mit denen man erreichen kann, dass sich auf dem Tisch unter den Teilen wenigstens 100 Zwanzigecke befinden.

Anmerkung: Die Richtigkeit des Resultates ist zu beweisen.

Antwort: Die kleinste Anzahl ist 1699.

1. Beweis: Offensichtlich genügt es, folgendes zu zeigen:

a) In 1699 Schritten kann man die 100 Zwanzigecke erzeugen.

b) Um 100 Zwanzigecke zu erzeugen, benötigt man mindestens 1699 Schritte.

zu a): Zunächst zerschneiden wir das Quadrat – es habe die Kantenlänge 1 – in 10 Streifen mit Länge 1 und Breite 0,1; anschließend zerschneiden wir jeden Streifen in 10 kleine Quadrate mit Kantenlänge 0,1. Wir erhalten also 100 kleine Quadrate mit $9 + 10 \cdot 9 = 99$ Schnitten.

Nun erzeugen wir aus jedem kleinen Quadrat ein Zwanzigeck, indem wir je 16 Mal einen Schnitt z.B. durch die Mittelpunkte zweier beliebiger benachbarten Kanten legen, dieser Schnitt ist immer möglich. Mit dem ersten Schnitt wird aus dem Quadrat eine Fünfeck, mit dem zweiten Schnitt ein Sechseck usw., mit dem 16. Schnitt hat man ein Zwanzigeck.

Insgesamt haben wir so nach $99 + 100 \cdot 16 = 1699$ Schritten die geforderten 100 Zwanzigecke.

Variante 1: Zunächst schneiden wir von dem Quadrat durch einen geraden Schnitt (z.B. durch die Mitten zweier benachbarter Seiten) eine Ecke ab; es entsteht ein Fünfeck und ein Dreieck. Vom Fünfeck schneiden wir wieder eine Ecke ab, erhalten so ein Sechseck und ein weiteres Dreieck usw. Nach insgesamt 16 solchen Schritten haben wir das erste Zwanzigeck und 16 Dreiecke auf dem Tisch.

Nun nehmen wir eines der 16 Dreiecke und schneiden wie oben in 17 aufeinander folgenden Schritten je eine Ecke ab: es entsteht das zweite Zwanzigeck und 17 weitere Dreiecke. Offensichtlich erhalten wir mit jedem solchen Schritt ein weiteres Dreieck, sodass wir diese Vorgehensweise bei weiteren 98 Dreiecken wiederholen können.

Insgesamt erhalten wir auf diese Weise 100 Zwanzigecke; dabei beträgt die Gesamtzahl an Schritten $16 + 99 \cdot 17 = 16 + 1683 = 1699$.

Variante 2: Wir schneiden von dem Quadrat 1600 Mal durch einen geraden Schnitt (z.B. durch die Mitten zweier benachbarter Seiten) eine Ecke ab. So erhalten wir 1600 Dreiecke (die nicht weiter gebraucht werden) und ein 1604-Eck. Von diesem 1604-Eck schneiden wir in 99 Mal ein Zwanzig-Eck ab; dies geschieht durch einen Schnitt durch die Mitten von Seiten, die durch 18 Ecken voneinander getrennt sind. Bei jedem solchen Schnitt verringert sich die Zahl der Ecken beim übrigen Teil um 16, damit hat das Reststück nach dem 99. Schritt $1604 - 99 \cdot 16 = 20$ Ecken, ist also selbst wie gefordert ein Zwanzig-Eck.

zu b) (Abschätzung der Anzahl Schritte über die Anzahl der entstehenden Ecken): Seien nun 100 Zwanzigecke erzeugt worden. Da man nur mit geraden Schnitten zerschneiden darf und das Ausgangsstück ein Quadrat und damit ein konvexes Vieleck ist, sind nach jedem Schnitt nur konvexe Vielecke auf dem Tisch. Die Anzahl der hierzu nötigen Schritte nennen wir s, die Gesamtzahl der Ecken aller Papierstücke auf dem Tisch e, die Anzahl der über die 100 Zwanzigecke hinaus erzeugten Papierstücke p.

Sofort einsichtig ist, dass bei jedem Schnitt sich die Anzahl der Teile auf dem Tisch um 1 erhöht; es gilt also $s + 1 = 100 + p$ oder äquivalent

$$s - p = 99. \quad (1)$$

Weiter erhöht sich bei jedem Schritt die Gesamtzahl der Ecken aller auf dem Tisch liegenden Vielecke höchstens um 4: Dies ist dann der Fall, wenn der Schnitt durch keine Ecke geht; wenn der Schnitt durch eine bzw. zwei Ecken geht, dann erhöht sich die Anzahl der Ecken um 3 bzw. um 2; hiermit sind alle Schnittmöglichkeiten beschrieben.

Man kann also abschätzen (das Zeichen "=" gilt dann, wenn kein Schnitt durch eine Ecke geht):

$$e \leq 4 + 4s. \quad (2)$$

Jedes der erzeugten Papierstücke hat mindestens 3 Ecken, sodass man weiter abschätzen kann (das Zeichen "=" gilt dann, wenn alle übrigen Stücke Dreiecke sind):

$$e \geq 100 \cdot 20 + p \cdot 3\ . \quad (3)$$

Die Ungleichungen (2) und (3) setzen wir zusammen zu $100 \cdot 20 + p \cdot 3 \leq 4 + 4s$ oder äquivalent

$$1996 \leq s + 3(s - p). \quad (4).$$

Hierin setzen wir (1) ein und erhalten so $1996 \leq s + 3 \cdot 99 = s + 297$ und hieraus sofort $s \geq 1699$; dies war zu zeigen.

Variante: Mit *Wertigkeit eines Papierstücks* bezeichnen wir die um 3 verminderte Eckenzahl dieses Papierstückes; mit *Wertigkeit des Tisches* bezeichnen wir die Summe der Wertigkeiten aller auf dem Tisch liegender Papierstücke.

Mit jedem Schnitt erhöht sich die Zahl der auf dem Tisch liegenden Papierstücke um genau 1, jedes dieser Papierstücke ist ein Vieleck. Die Gesamtzahl der Ecken aller auf dem Tisch liegenden Vielecke erhöht sich bei jedem Schritt um höchstens 4. Dies ist dann der Fall, wenn der Schnitt durch keine Ecke geht; wenn der Schnitt durch eine bzw. zwei Ecken geht, dann erhöht sich die Anzahl der Ecken um 3 bzw. um 2. Damit erhöht sich die Wertigkeit des Tisches bei jedem Schritt um höchstens 1.

Zu Beginn liegt ein einziges Viereck auf dem Tisch, die Wertigkeit des Tisches ist also $4 - 3 = 1$. Wenn nun 100 Zwanzigecke erzeugt worden sind, ist die Wertigkeit des Tisches mindestens $100 \cdot (20 - 3) = 1700$; da bei jedem Schritt sich die Wertigkeit um höchstens 1 erhöht, sind hierzu mindestens $1700 - 1 = 1699$ Schritte nötig.

Bemerkungen: Da bei jedem Vieleck die Anzahl der Kanten identisch mit der Zahl der Ecken ist, kann man in obigem Beweis den Begriff "Ecke" durch den Begriff "Kante" ersetzen.

Die Beweisführung zeigt gleichzeitig, dass bei einer Erzeugung von 100 Zwanzigecken mit einer minimalen Schrittzahl kein Schnitt durch eine Ecke geht und dass die übrigen Papierstückchen alle die Form eines Dreiecks haben. Weil 1699 Schritte durchgeführt wurden, gibt es also $1699 + 1 - 100 = 1600$ solche Dreiecke. Die Angabe einer erzeugenden minimalen Schrittfolge, die diese Bedingung nicht erfüllt, ist also fehlerhaft.