Bundeswettbewerb Mathematik
Wissenschaftszentrum • Postfach 20 14 48 • 53144 Bonn
Fon: 0228 - 9 59 15-20 • Fax: 0228 - 9 59 15-29
e-mail: info@bundeswettbewerb-mathematik.de
www.bundeswettbewerb-mathematik.de

Korrekturkommission • Karl Fegert

Aufgaben und Lösungen

1. Runde 2007

Über Kommentare und Ergänzungen zu diesen Lösungsbeispielen freuen wir uns!

Anschrift oder Email–Adresse s.o.

Stand: Mai 2007

Aufgabe 1: Gegeben sei ein regelmäßiges 2007–Eck.

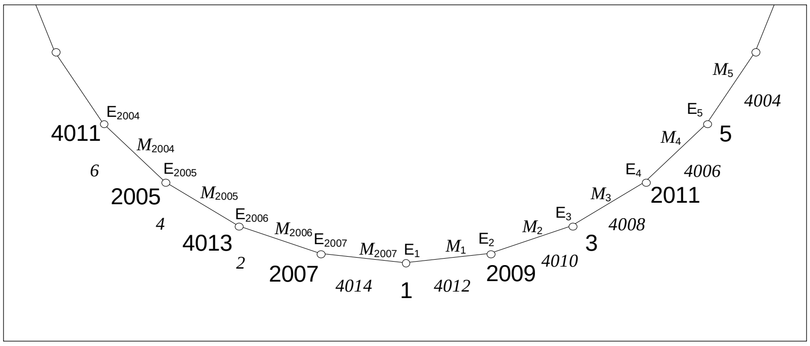
Die natürlichen Zahlen 1, 2, ..., 4014 sollen so auf seine Eckpunkte und Seitenmittelpunkte verteilt werden, dass für jede Seite die Summe der drei Zahlen, die an den Eckpunkten und am Mittelpunkt der Seite stehen, den gleichen Wert hat.

Man zeige, dass eine solche Verteilung möglich ist.

Gemeinsame Bezeichnungen: Die Ecken des 2007-Ecks seien fortlaufend gegen den Uhrzeigersinn mit E_1, E_2, ..., E_{2007} bezeichnet; die Mittelpunkte der Seiten beginnend bei E_1E_2 fortlaufend der Reihe nach gegen den Uhrzeigersinn mit M_1, M_2, ..., M_{2007}. Mit s_i bezeichnen wir die Summe der Zahlen, die an den Eckpunkten bei E_i, M_i und E_{i+1} (bzw. E_1 im Falle $i = 2007$) stehen.

1. Lösung (durch konkrete Angabe einer solchen Verteilung): Zuerst stellen wir fest, dass 2007 gerade und 2007 ungerade Zahlen zu verteilen sind.

Wir verteilen zuerst die 2007 ungeraden Zahlen 1, 3, ..., 4013 nach folgendem Schema auf die 2007 Ecken des 2007–Ecks: Wir beginnen bei der Ecke E_1, sie erhält die Zahl 1. Dann gehen wir zwei Ecken weiter, also zur Ecke E_3, sie erhält die nächste ungerade Zahl, also 3. Dies führen wir fort, bis wir zwei Mal das 2007–Eck umrundet haben. Weil 2007 eine ungerade Zahl ist, hat dann jede Ecke genau eine Zahl erhalten: Am Ende der ersten Umrundung hat jede Ecke mit ungerader Nummer eine Zahl erhalten, als letztes die Ecke E_{2007} die Zahl 2007. Im zweiten Umlauf erhält die Ecke E_2 die Zahl 2009, die Ecke E_4 die Zahl 2011 usw. bis zur Ecke E_{2006}, die die Zahl 4013 erhält, damit haben auch alle Ecken mit gerader Nummer eine Zahl erhalten.



Nun verteilen wir noch die 2007 geraden Zahlen auf die 2007 Seitenmittelpunkte:

Wir beginnen bei M_1, er erhält die Zahl 4012 (nicht die 4014!), danach erhält M_2 die Zahl 4010, dann M_3 die 4008 usw. bis zu M_{2006}, der die Zahl 2 erhält; zum Schluss bleibt für M_{2007} noch die Zahl 4014.

Damit sind alle Zahlen verteilt, und es muss noch untersucht werden, ob die Summe der drei Zahlen an einer Seite für jede Seite gleich ist. Es ist

$$\begin{array}{lcrcrcr}
s_1 & = & 1 & + & 4012 & + & 2009; \\
s_2 & = & 2009 & + & 4010 & + & 3; \\
s_3 & = & 3 & + & 4008 & + & 2011; \\
s_4 & = & 2011 & + & 4006 & + & 5; \\
s_5 & = & 5 & + & 4004 & + & 2013; \\
\vdots & & & & & & \\
\text{usw.} & & & & & & \\
\vdots & & & & & & \\
s_{2005} & = & 2005 & + & 4 & + & 4013; \\
s_{2006} & = & 4013 & + & 2 & + & 2007; \\
s_{2007} & = & 2007 & + & 4014 & + & 1.
\end{array}$$

Wir vergleichen die Summanden in s_i und in s_{i+1}, zunächst nur für $i = 1, 2, ..., 2005$: Ein ungerader Summand kommt in beiden Summen vor (nämlich die Zahl an der gemeinsamen Ecke), der andere ungerade Summand in s_{i+1} um 2 größer als in s_i, und der gerade Summand (d.h. die Zahl an der Seitenmitte) ist um in s_{i+1} um 2 kleiner als in s_i. Insgesamt bleibt also die Gesamtsumme gleich, damit ist $s_1 = s_2 = ... = s_{2006}$. Auch die Summen s_{2006} und s_{2007} sind gleich: Der ungerade Summand an der gemeinsamen Ecke ist in beiden Summen gleich, der andere ungerade Summand in s_{2007} um 4012 kleiner als der in s_{2006}, dafür ist der gerade Summand in s_{2007} um 4012 größer als der in s_{2006}.

Variante (abstrakte Formulierung des 1. Beweises): Für $i \in \{1, 2, ..., 2007\}$ bezeichnen wir mit $e(i)$ und $m(i)$ die Zahl, die der Ecke E_i bzw. der Seitenmitte M_i zugeteilt wird und setzen

$$e(i) := \begin{cases} i & \text{falls } i \text{ ungerade} \\ 2007+i & \text{falls } i \text{ gerade} \end{cases}$$

$$m(i) := \begin{cases} 4014-2i & \text{falls } i < 2007 \\ 4014 & \text{falls } i = 2007 \end{cases}$$

Damit sind alle ganzen Zahlen aus dem Intervall [1;4014] an genau eine Ecke oder Seitenmitte verteilt: an die 2007 Ecken die 2007 ungeraden Zahlen und an die 2007 Seitenmitten die 2007 geraden Zahlen.

Für die Summen $s(i)$ an den einzelnen Seiten gilt dann:

für $i = 2007$:
$$s(i) = s(2007) = e(2007) + m(2007) + e(1) = 2007 + 4014 + 1 = 6022;$$

für ungerade $i < 2007$ (dann ist $i + 1$ gerade und $i + 1 \le 2007$):
$$s(i) = e(i) + m(i) + e(i + 1) = i + (4014 - 2i) + (2007 + (i + 1)) = 6022;$$

für gerade i (dann ist $i < 2007$ und $i + 1$ ungerade und $i + 1 \le 2007$):
$$s(i) = e(i) + m(i) + e(i + 1) = (2007+ i) + (4014 - 2i) + (i + 1) = 6022;$$

man erhält also wie gefordert für alle i den gleichen Wert.

Bemerkungen: Dass der Wert jeder Seitensumme jeweils 6022 beträgt, ist für die Beweisführung unwichtig.

Man kann in jeder zulässigen Verteilung von Zahlen die Zahl i durch die Zahl $4015 - i$ ersetzen, ohne dass die Verteilung die Eigenschaft der Zulässigkeit verliert.

In obiger Verteilung kann man jede gerade Zahl $2i$ durch die ungerade Zahl $2i - 1$ ersetzen und umgekehrt, dabei bleibt die Verteilung der Zahlen zulässig. Wesentliche Voraussetzung dabei ist, dass in jeder Seitensumme die gleiche Anzahl von ungeraden Summanden (und damit auch die gleiche Anzahl von geraden Summanden) vorkommt.

Das verwendete Nummerierungsprinzip ist auf alle Vielecke mit ungerader Eckenzahl übertragbar.

Es gibt Vielecke mit gerader Eckenzahl, die ebenfalls so nummerierbar sind, dass die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind. Es ist jedoch unbekannt, ob alle Vielecke mit gerader Eckenzahl so nummerierbar sind.

2. Lösung (mit Verallgemeinerung für ungerades $n \ge 3$): Sei ein regelmäßiges n–Eck gegeben (n ungerade), bei dem die Zahlen 1, 2, ..., $2n$ gemäß der Aufgabenstellung auf die Ecken und Seitenmitten verteilt seien. Für eine solche Verteilung leiten wir zunächst **notwendige** Bedingungen her:

Wir betrachten zwei aufeinanderfolgende Seiten. Bei einer korrekten Verteilung gilt für die Summen der an ihr stehenden Zahlen

$$s(i) = e(i) + m(i) + e(i + 1) = s(i + 1) = e(i + 1) + m(i + 1) + e(i + 2) \quad (i = 1, 2, ..., n-2);$$

hieraus folgt sofort eine notwendige Bedingung für eine zulässige Verteilung der Zahlen:

$$e(i) - e(i + 2) = m(i + 1) - m(i) \quad (i = 1, 2, ..., n-2).$$

Wir setzen (unter erheblicher Einschränkung der Suche nach möglichen Verteilungen!) $m(i + 1) - m(i) = 1$ für alle i und setzen z.B. $m(1) := 1$, also $m(i) := i$ für alle $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Dann ist $e(i+2) = e(i) - 1$ $(i = 1, 2, ..., n-2)$. Für die Werte an der "Nahtstelle" gilt:

$$s(n-1) = e(n-1) + (n-1) + e(n) = s(n) = e(n) + n + e(1),$$

also $$e(1) = e(n-1) - 1,$$

sowie $s(n) = e(n) + n + e(1) = s(1) = e(1) + 1 + e(2)$,

also $e(2) - e(n) = n - 1$.

In der Menge $\{n + 1, \; n + 2, ..., 2n\}$ bilden die beiden Zahlen 2n und n+1 das einzige Paar, dessen Differenz den Wert $n-1$ hat. Da die $e(i)$ aus dieser Menge genommen werden müssen, folgt aus der letzten Gleichung sofort $e(2) = 2n$ und $e(n) = n+1$. Damit hat die Verteilung nach Vorgabe der m(i) notwendigerweise die Form

$$e(i) := \begin{cases} 2n+1-\dfrac{i}{2} & \text{falls } i \text{ gerade} \\ \dfrac{3n+2-i}{2} & \text{falls } i \text{ ungerade} \end{cases}$$

$m(i) := i$ für alle i $= 1, 2, ..., n$.

(Anschaulich formuliert: Nummeriere die Seitenmitten gegen den Uhrzeigersinn der Reihe nach mit 1, 2, 3, ..., n durch, danach – beginnend bei der Ecke zwischen den mit n und $n-1$ nummerierten Seitenmitten – im Uhrzeigersinn jede 2. Ecke mit $n+1$, $n+2$, ..., $2n$,

Es bleibt noch zu zeigen, dass diese – nach Vorgabe der $m(i)$ – notwendige Bedingung auch **hinreichend** ist, d.h. dass die $s(i)$ tatsächlich alle den gleichen Wert annehmen. Es ergibt sich

für gerade $i < n$ (d.h. $(i+1)$ ist ungerade und $(i+1) \leq n$)

$$s(i) = e(i) + m(i) + e(i+1) = 2n + 1 - \frac{i}{2} + i + \frac{3n+2-(i+1)}{2} = \frac{7n+3}{2};$$

für ungerade $i < n$ (d.h. $(i+1)$ ist gerade und $(i+1) \leq n$)

$$s(i) = e(i) + m(i) + e(i+1) = \frac{3n+2-i}{2} + i + 2n + 1 - \frac{i+1}{2} = \frac{7n+3}{2};$$

für $i = n$ (d.h. i ungerade) ergibt sich

$$s(n) = e(n) + m(n) + e(1) = \frac{3n+2-n}{2} + n + \frac{3n+2-1}{2} = \frac{7n+3}{2};$$

also immer der gleiche Wert.

Variante: Der Ansatz $m(i+1) - m(i) = -2$ führt ebenfalls zum Ziel, nämlich zur Nummerierung im ersten Beweis.

Bemerkungen: Aus einer Verteilung nach dem 1. und 2. Beweis kann man weitere erhalten, indem man ausgehend von E_1 immer k Ecken zu einer Gruppe zusammenfasst (k muss dabei ein Teiler der Gesamtzahl der Ecken sein) und dann die Nummerierungen an der mittleren Ecke spiegelt. Das geht, weil mit n auch k ungerade ist. Innerhalb jeder Gruppe ändert sich die Summe nicht; an den Rändern heben sich die Änderungen jeweils auf.

Häufige Fehler: Es genügt nicht, eine korrekte Nummerierung anzugeben, es muss auch nachgewiesen werden, dass die geforderte Eigenschaft (nämlich die Konstanz der Summen) vorliegt. Dies gilt insbesondere für die 'Nahtstelle'.

Aufgabe 2: Jede positive ganze Zahl soll entweder rot oder grün so gefärbt werden, dass folgende Eigenschaften bestehen:

- Die Summe dreier nicht notwendig verschiedener roter Zahlen ist eine rote Zahl.
- Die Summe dreier nicht notwendig verschiedener grüner Zahlen ist eine grüne Zahl.
- Es gibt sowohl rote als auch grüne Zahlen.

Man finde alle derartigen Färbungen.

Anmerkung: Die Richtigkeit des Resultates ist zu beweisen.

Antwort: Es gibt genau zwei mögliche Färbungen:

1. Alle ungeraden Zahlen sind rot, alle geraden Zahlen sind grün gefärbt,

   oder umgekehrt:

2. Alle ungeraden Zahlen sind grün, alle geraden Zahlen sind rot gefärbt.

1. Beweis: "$\Leftarrow$": Bekanntlich ist jede positive ganze Zahl entweder gerade oder ungerade, d.h. durch die Färbevorschrift ist tatsächlich jede positive ganze Zahl erfasst. Ferner ist die Summe von drei ungeraden Zahlen immer ungerade, und die Summe von drei geraden Zahlen ist immer gerade. Außerdem gibt es sowohl gerade als auch ungerade Zahlen. Damit erfüllen die beiden genannten Färbungen die Bedingungen der Aufgabe.

"$\Rightarrow$": Sei eine beliebige Färbung vorgegeben, die die Bedingung der Aufgabe erfüllt. Die Zahl 1 ist dann entweder grün oder rot gefärbt. Wir treffen deswegen die Fallunterscheidung:

Fall 1: Die Zahl 1 ist grün gefärbt.

Zunächst stellen wir fest, dass dann außer der 1 auch alle anderen ungeraden Zahlen ebenfalls grün gefärbt sind: Die kleinste ungerade Zahl nach der 1 ist die 3; und da $3 = 1 + 1 + 1$, ist 3 die Summe von drei grünen Zahlen und damit nach der ersten Bedingung ebenfalls grün. Mit analoger Argumentation folgt aus $5 = 3 + 1 + 1$, dass auch die nächste ungerade Zahl, nämlich 5, grün ist. Durch Wiederholen der Argumentation ($7 = 5 + 1 + 1$; $9 = 7 + 1 + 1$, usw.) folgt dies der Reihe nach für alle ungeraden Zahlen.

Wäre nun 2 ebenfalls grün, müssten – um die Bedingung der Aufgabe zu erfüllen – alle geraden Zahlen ebenfalls grün gefärbt sein: Es wäre dann nämlich $4 = 2 + 1 + 1$ Summe von drei grünen Zahlen und damit ebenfalls grün. Mit analoger Argumentation wäre dann $6 = 4 + 1 + 1$, als Summe dreier grüner Zahlen wieder grün, ebenso – durch Wiederholen der Argumentation – der Reihe nach alle geraden Zahlen. Da es außer geraden und ungeraden Zahlen keine weiteren positiven ganzen Zahlen gibt, gäbe es überhaupt keine rot gefärbten Zahlen, was nach der Annahme aber nicht zulässig ist.

Also ist die Zahl 2 rot gefärbt; mit ihr auch die Zahlen $6 = 2 + 2 + 2$, $10 = 6 + 2 + 2$, $14 = 10 + 2 + 2$ usw.; also jede gerade Zahl, die nicht durch 4 teilbar ist.

Die kleinste Zahl, für die wir bisher noch keine Aussage über die Farbe gemacht haben, ist die Zahl 4. Sie kann nicht grün gefärbt sein, da sonst die Zahl $6 = 4 + 1 + 1 = 2 + 2 + 2$ sowohl die Summe von drei grün gefärbten als auch die Summe von drei rot gefärbten Zahlen wäre.

Also ist die Zahl 4 ebenfalls rot gefärbt; mit ihr auch die Zahlen $8 = 4 + 2 + 2$, $12 = 8 + 2 + 2$, $16 = 10 + 2 + 2$ usw.; also jede gerade Zahl, die durch 4 teilbar ist. Insgesamt sind damit alle geraden Zahlen rot gefärbt.

Es sind also alle ungeraden Zahlen grün und alle geraden Zahlen rot gefärbt.

Fall 2: Die Zahl 1 ist rot gefärbt.

In obiger Argumentation vertauschen wir einfach die Bezeichnungen "rot" und "grün". Alle Folgerungen bleiben dann richtig; damit sind alle ungeraden Zahlen rot und alle geraden Zahlen grün gefärbt.

In jedem Fall liegt also eine der beiden genannten Färbungen vor.

2. Beweis (vollst. Induktion und Extremalprinzip): Die Aufgabenstellung ist symmetrisch bez. der Farben rot und grün. Zu jeder zulässigen Färbung gibt es also eine komplementäre Färbung, bei der die beiden Farben vertauscht sind. Außerdem können wir die erste und zweite Bedingung zusammenfassen zu "Die Summe von drei gleich gefärbten Zahlen hat die gleiche Farbe wie die einzelnen Summanden."

Zunächst beweisen wir mit vollständiger Induktion folgende Hilfssätze:

HS 1: Bei jeder zulässigen Färbung haben für jede Zahl a alle ungeraden Vielfachen von a, also Zahlen der Form $n = (2k–1)\cdot a$ mit $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, die gleiche Farbe wie die Zahl a.

Beweis: Die Aussage ist richtig für $k = 1$, also für alle Zahlen der Form $n = (2k–1)\cdot a$ mit $k \in \{1\}$, weil in einer einelementigen Menge offensichtlich alle Zahlen die gleiche Farbe haben (Induktionsanfang); und wenn sie richtig ist für alle Zahlen der Form $n = (2k–1)\cdot a$ mit $k \in \{1, 2, ..., k_0\}$ (Induktionsannahme), dann ist die Zahl $(2(k_0+1) – 1)\cdot a = (2k_0–1)\cdot a + a + a$ die Summe dreier Zahlen, die nach Induktionsannahme gleichgefärbt sind, hat also nach der Bedingung der Aufgabe wieder die gleiche Farbe. Damit haben alle Zahlen der Form $n = (2k–1)\cdot a$ mit $k \in \{1, 2, ..., k_0 , k_0+1\}$ die gleiche Farbe (Induktionsschluss).

HS 2: Bei jeder zulässigen Färbung gilt: Hat eine Zahl a die gleiche Farbe wie die Zahl 1, so haben alle Zahlen der Form $n = a + 2k$ mit $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ die gleiche Farbe wie die Zahl a.

Beweis: Die Aussage ist richtig für $k = 1$, also für alle Zahlen der Form $a + 2k$ mit $k \in \{1\}$, weil $a + 2k = a + 1 + 1$ die Summe von 3 gleich gefärbten Zahlen ist, also die gleiche Farbe wie die Zahlen a und 1 hat (Induktionsanfang); und wenn sie richtig ist für alle Zahlen der Form $a + 2k$ mit $k \in \{1, 2, ..., k_0\}$ (Induktionsannahme), dann ist die Zahl $a + 2(k_0+1) = (a + 2k_0) + 1 + 1$ die Summe dreier Zahlen, die nach Induktionsannahme gleich gefärbt sind, hat also nach der Bedingung der Aufgabe wieder die gleiche Farbe. Damit haben alle Zahlen der Form $n = a + 2k$ mit $k \in \{1, 2, ..., k_0, k_0+1\}$ die gleiche Farbe (Induktionsschluss).

Mit $a = 1$ folgt nun nach HS 1, dass bei jeder zulässigen Färbung alle ungeraden Zahlen gleich gefärbt sind.

Mit Widerspruchsbeweis zeigen wir nun, dass bei jeder zulässigen Färbung alle geraden Zahlen anders gefärbt sind als die Zahl 1: Wir nehmen an, dass es eine gerade Zahl g gibt, die die gleiche Farbe hat wie die ungeraden Zahlen, also wie die Zahl 1. Mit HS 2 folgt, dass dann die Zahlen $g + 2\cdot 1$, $g + 2\cdot 2$, $g + 2\cdot 3$, ..., also alle auf g folgenden geraden Zahlen ebenfalls diese Farbe haben. Damit haben alle auf g folgenden Zahlen diese Farbe und es gibt nur endlich viele Zahlen der anderen Farbe. Unter diesen gibt es eine größte; wir nennen sie m. Dann ist $3m > m$, also sind nach den Folgerungen der Annahme die Zahlen $3m$ und m von verschiedener Farbe. Andererseits ist $3m = m + m + m$ die Summe von drei gleichgefärbten Zahlen, also haben $3m$ und m gleiche Farbe. Damit ist der gewünschte Widerspruch gefunden.

Notwendig für eine korrekte Färbung ist also, dass die ungeraden Zahlen mit der einen, die geraden Zahlen mit der anderen Farbe gefärbt sind.

Diese Bedingung ist auch **hinreichend**: Da es nur gerade und ungerade positive ganze Zahlen gibt, ist durch die Färbung jede positive ganze Zahl erfasst; da es sowohl ungerade als auch gerade Zahlen gibt, gibt es sowohl rote als auch grüne Zahlen; und da die Summe von drei Zahlen gleicher Parität wieder eine Zahl dieser Parität ist, ist auch die Summe dreier gleichfarbiger Zahlen wieder eine Zahl dieser Farbe. Die angegebenen Färbungen erfüllen also die geforderten Bedingungen.

Häufige Fehler: Der Nachweis, dass die notwendige Bedingung auch hinreichend ist, darf – auch wenn dieser einfach ist – nicht fehlen. Dieser Nachweis sollte zu jeder der drei geforderten Eigenschaften geführt werden.

Aufgabe 3: Im Inneren der Seiten AC und BC eines Dreiecks ABC liegen die Punkte E und F so, dass die Strecken AE und BF gleich lang sind und sich die Kreise durch A, C und F bzw. durch B, C und E außer in C in einem weiteren Punkt D schneiden.

Man beweise, dass die Gerade CD den Winkel $\angle ACB$ halbiert.

Gemeinsame Bezeichnungen: Die Kreislinie durch A, F und C sei mit K_{AFC} bezeichnet, ihr Mittelpunkt mit M_A, die Kreislinie durch B, E und C mit K_{BEC} und ihr Mittelpunkt mit M_B.

Vorbemerkung (Diskussion der Lagebeziehungen): Die Punkte A und D sind verschieden, da sonst der Kreis K_{BEC} die drei kollinearen und sicher verschiedenen Punkte D = A, E und C enthalten würde. Analog sind auch B und D verschieden.

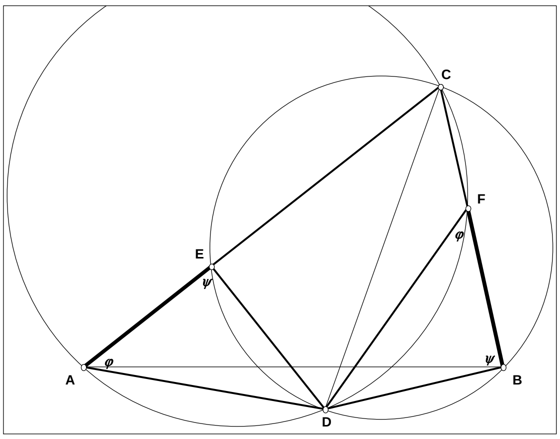
AC ist Sehne in K_{AFC} und liegt daher vollständig innerhalb dieses Kreises; insbesondere auch der Punkt E. Entsprechend liegt F im Innern von K_{BEC}. Da CF Sehne von K_{AFC} und F innerer Punkt von CB ist, liegt B außerhalb von K_{AFC}; entsprechend liegt A außerhalb von K_{BEC}.

Nach Konstruktion haben die Dreiecke ΔACF, ΔECB den gleichen Umlaufsinn wie ΔACB, o.B.d.A. seien diese im UZS orientiert. Die Punkte A, C und F liegen also in dieser Reihenfolge im UZS auf K_{AFC}, die Punkte E, C und B in dieser Reihenfolge im UZS auf K_{BEC}.

CD ist gemeinsame Sehne der beiden Kreise. Also liegt einer der beiden Bögen CD des Kreises K_{BEC} vollständig innerhalb des Kreises K_{AFC}, der andere vollständig außerhalb, d.h. der eine enthält den innerhalb K_{AFC} liegenden Punkt E, der andere den außerhalb von K_{AFC} liegenden Punkt B. Damit können die Punkte E, C, B, D nur in dieser Reihenfolge auf K_{BEC} liegen; nach der Bemerkung des vorigen Abschnittes sind sie in dieser Reihenfolge im UZS orientiert. Analog schließen wir, dass die Punkte A, C, F und D in dieser Reihenfolge im UZS orientiert auf K_{AFC} liegen. Insbesondere sind die beiden Vierecke ACFD und ECBD nicht–überschlagene Sehnenvierecke.

Die Strecke AE hat nach Konstruktion mit der Geraden (CD) keinen Punkt gemeinsam, also liegen A und E in der gleichen Halbebene bez. (CD), ebenso B und F. Andererseits liegen nach den Ausführungen des vorigen Abschnittes A und F ebenso wie B und E in verschiedenen Halbebenen bez. (CD). Also liegen stets A und E in der einen, B und F in der anderen Halbebene bez. (CD). Mit anderen Worten: die Gerade (CD) liegt im Winkelfeld des Winkels $\angle ACB$.

1. Beweis (Umfangswinkelsatz und Sehnenviereck): Nach Konstruktion bilden die Punkte A, C, F und D in dieser Reihenfolge ein nicht–überschlagenes Sehnenviereck, ebenso die Punkte E, C, B und D (vgl. Vorbemerkung). Bekanntlich ergänzen sich in einem Sehnenviereck zwei gegenüberliegende Winkel zu 180°; damit ist jeder Innenwinkel so groß wie der gegenüberliegende Außenwinkel. Dies wenden wir an im Sehnenviereck



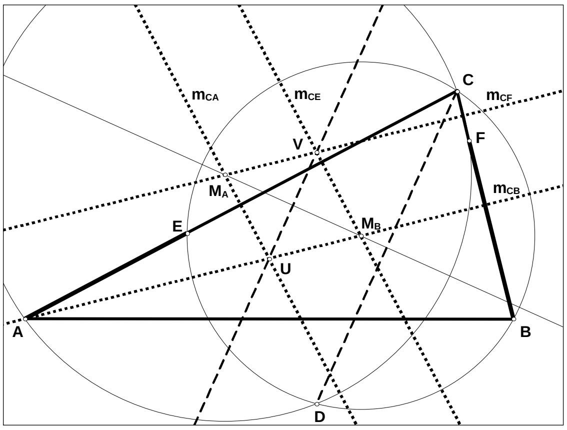
- ADFC: $\angle DAE = \angle DAC = \angle DFB$;
- BDEC: $\angle FBD = \angle CBD = \angle AED$.

Ist nun zusätzlich $\overline{AE} = \overline{BF}$, so sind nach Kongruenzsatz *wsw* die Dreiecke ΔEAD und ΔBFD kongruent; insbesondere ist $\overline{ED} = \overline{BD}$. Da diese beiden Strecken Sehnen am gleichen Kreis sind, schließen sie bei C gleiche Winkel ein. Das war zu zeigen.

Bemerkung: Die Seite AB des Dreiecks ABC spielt bei dieser Überlegung keine Rolle.

2. Beweis (Verwendung der Eigenschaften einer Raute): Wir betrachten die Mittelsenkrechten auf den Strecken CA, CE, CB und CF; sie seien mit m_{CA}, m_{CE}, m_{CB} bzw. m_{CF} bezeichnet. Es ist $m_{CA} \| m_{CE}$ mit Abstand $\frac{1}{2}\overline{AE}$, da beide senkrecht zu AC sind; entsprechend ist $m_{CB} \| m_{CF}$ mit Abstand $\frac{1}{2}\overline{BF}$.

m_{CA} und m_{CF} stehen senkrecht auf den Schenkeln des Winkels $\angle ACB$, sie schließen also einen Winkel der Weite γ (bzw. 180° – γ) ein. Insbesondere sind sie nicht parallel und haben daher einen Schnittpunkt. Dieser Schnittpunkt ist offensichtlich der Mittelpunkt des Kreises K_{AFC}, also M_A; entsprechend ist der Schnittpunkt der beiden anderen Mittelsenkrechten der Mittelpunkt des Kreises K_{BEC}, also M_B.

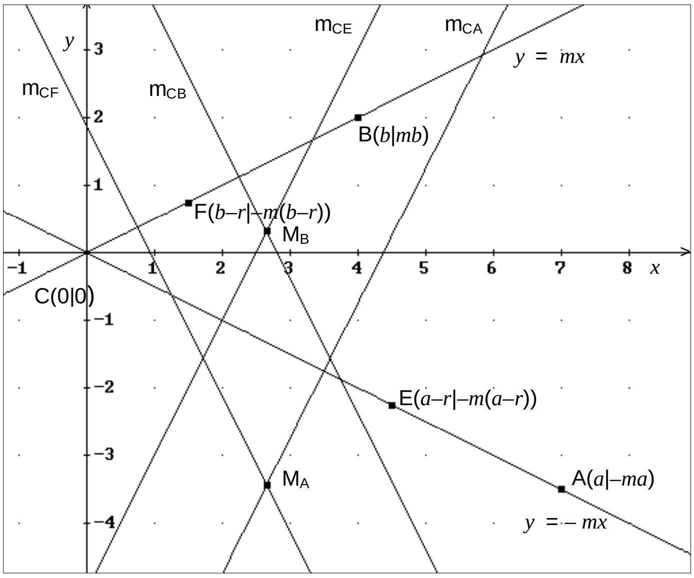


Die genannten Mittelsenkrechten sind zwei Parallelenpaare, sie bestimmen also ein Parallelogramm. Da M_A auf den beiden Mittelsenkrechten liegt, auf denen M_B nicht liegt, ist die Strecke M_AM_B eine der beiden Diagonalen des Parallelogramms. Die beiden anderen Ecken des Parallelogramms nennen wir U (Schnittpunkt von m_{CB} mit m_{CA} , also der Umkreismittelpunkt von ΔABC) sowie V (Schnittpunkt von m_{CF} mit m_{CE}, also der Umkreismittelpunkt von ΔEFC).

M_AM_B ist die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte der Kreise K_{AFC} und K_{BEC}; die Strecke CD ist die gemeinsame Sehne dieser beiden Kreise. Also ist $CD \perp M_AM_B$.

Falls nun $\overline{AE} = \overline{BF}$, haben beide Parallelenpaare den gleichen Abstand, dann ist das Parallelogramm UM_AVM_B eine Raute. Bekanntlich sind die Diagonalen einer Raute gleichzeitig Winkelhalbierende. Damit halbiert die Strecke M_AM_B den Winkel, den die Mittelsenkrechten m_{CF} und m_{CA} bilden.

Es gibt eine Drehung um 90°, die den Punkt M_A in den Punkt C überführt (Drehpunkt ist dabei die Spitze eines über M_AC errichteten gleichschenklig–rechtwinkligen Dreiecks). Da $M_A \in m_{CA}$ und $m_{CA} \perp AC$, führt diese Drehung gleichzeitig m_{CA} in die Gerade (AC) über; entsprechend auch m_{CF} in (CB) und (M_AM_B) in (CD). Da M_AM_B den Winkel der beiden Mittelsenkrechten halbiert, gilt entsprechendes für die Bilder: Die Gerade (CD) halbiert den Winkel, der durch die Geraden (AC) und (BC) gebildet wird, also entweder den Innen- oder Außenwinkel des Dreiecks ΔABC bei C. Da D im Innern des Winkelfeldes von γ liegt (vgl. Vorbemerkung), halbiert CD den Innenwinkel γ.



3. Beweisskizze (ähnliches Motiv wie im 2. Beweis, mit Koordinaten; verkürzt dargestellt): Wir legen das Achsenkreuz so über das Dreieck, dass der Ursprung auf die Ecke C, die positive x–Achse auf die Winkelhalbierende w_γ und der Punkt B in den ersten Quadranten zu liegen kommen. Es genügt dann zu zeigen, dass M_AM_B senkrecht zur x–Achse steht: Dann liegt nämlich der Punkt D – als zweiter Schnittpunkt der beiden Kreise spiegelbildlich zu C bez. der gemeinsamen Zentrale (M_AM_B) liegend – auf der x–Achse, also der Winkelhalbierenden w_γ. Das bedeutet, dass die Gerade (CD) auf die Winkelhalbierende fällt.

Dies kann man mit einfacher Rechnung mit linearen Funktionen nachzuweisen. Mit geeigneten positiven Zahlen m, a, b und r $(0 < r < a)$ lässt sich jede mögliche Ausgangssituation beschreiben (vgl. Skizze):

Die Geraden (CA) und (CB) durch die Gleichungen	$y = -mx$	bzw.	$y = mx$,
die Punkte A und B als Punkte auf diesen Geraden durch	$(a \mid -ma)$	bzw.	$(b \mid mb)$,
den Punkt E und F mit den Koordinaten	$(a-r \mid -m(a-r))$	bzw.	$(b-r \mid -m(b-r))$

(für beide Punkte kann die gleiche Variable r verwendet werden, weil $\overline{AE} = \overline{BF}$ ist und die Steigungen der Geraden (CA) und (CB) den gleichen Betrag haben),

die Mittelsenkrechte m_{CA} durch $y = \frac{1}{m}(x - \frac{1}{2}a) + \frac{1}{2}ma$ oder vereinfacht

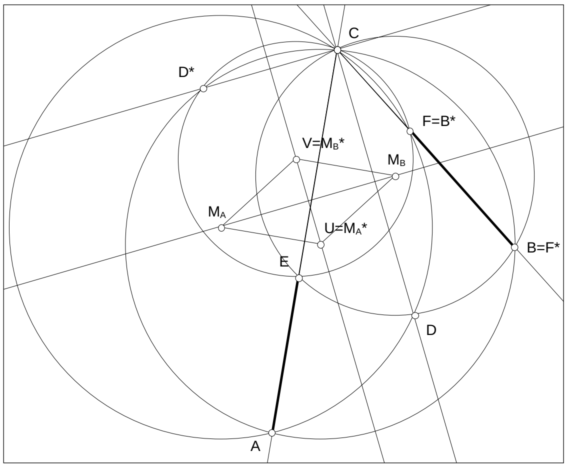
$$y = \frac{1}{m}x - \frac{1}{2}aT \quad \text{mit} \quad T := m + \frac{1}{m},$$

analog m_{CF} durch $y = -\frac{1}{m}x + \frac{1}{2}(b-r)T$.

M_A ist Schnittpunkt der Mittelsenkrechten m_{CA} und m_{CF}. Dessen x–Koordinate x_{MA} ist Lösung der Gleichung $\frac{1}{m}x - \frac{1}{2}aT = -\frac{1}{m}x + \frac{1}{2}(b-r)T$; es ist somit $x_{MA} = \frac{1}{4}m(a+b-r)T$.

M_B ist Schnittpunkt von m_{CE} mit m_{CB}, seine x–Koordinate x_{MB} erhält man mit analoger Rechnung. Dabei ist lediglich a durch b und umgekehrt zu ersetzen. Da in x_{MA} die Variablen a und b symmetrisch vorkommen, ist $x_{MA} = x_{MB}$, also steht M_AM_B senkrecht auf der x–Achse. Das war zu zeigen.

Bemerkungen: Im 2. Beweis wird erst in der letzten Zeile benützt, dass die beiden Strecken AE und BF von A bzw. B in die gleiche Richtung wie C angetragen werden. Tragen wir von A und B die Strecken AE bzw. BF in verschiedene Richtungen bez. C ab, so halbiert CD den Nebenwinkel von γ.



Nebenstehende Skizze verdeutlicht beide Situationen: Auf zwei von C ausgehenden Geraden sind zwei gleich lange Strecken AE und BF angetragen, man betrachtet nun die Lage der Umkreise um die 4 dadurch bestimmten Dreiecke ΔABC, ΔAFC, ΔBEC und ΔEFC.

Es gilt dann folgender verallgemeinerter Satz: Die 4 Mittelpunkte bestimmen eine Raute, deren Diagonalen parallel zu den beiden Winkelhalbierenden der beiden Geraden sind; die beiden Winkelhalbierenden gehen durch die von A, B, C, E und F verschiedenen Schnittpunkte dieser Umkreise.

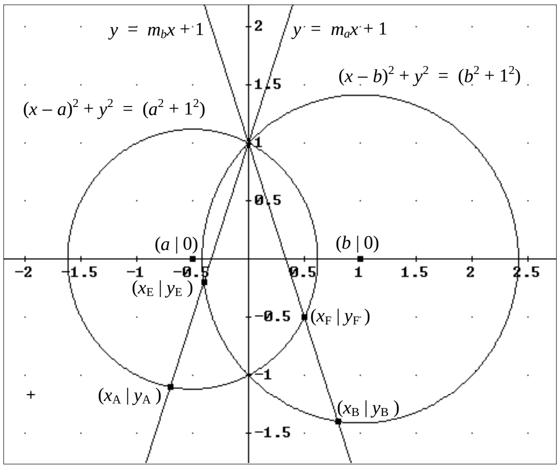
Beim 3. Beweis ist die Untersuchung der Lagebeziehung in der Annahme versteckt, dass die Punkte E und F die x–Koordinaten $a–r$ bzw. $b–r$ für das gleiche r haben (die aus der Aufgabenstellung resultierende zusätzliche Voraussetzung $0 < r < a$ könnte man weglassen und dadurch auch Lagen von E bzw. F außerhalb der Dreiecksseiten zulassen). Wenn nur $\overline{AE} = \overline{BF}$ verlangt wird, kann F auch die Koordinaten $b + r$ haben, entsprechend ändert sich die Rechnung. Sie führt dann zum Ergebnis, dass M_A und M_B den gleichen y–Wert habe, d.h. dass die Gerade (CD) den Außenwinkel bei C halbiert.

4. Beweis (mit Koordinaten, spezielle Lage der Schnittpunkte der Kreise): Wir legen ein rechtwinkliges Koordinatensystem so über die Figur, dass die y–Achse auf die Strecke CD zu liegen kommt, die x–Achse auf die Mittelsenkrechte der Strecke CD und wählen den Maßstab so, dass C die Koordinaten (0|1) und D die Koordinaten (0|–1) hat.

Die Trägergeraden der Strecken AC und BC sind zwei Geraden durch (0|1), von denen keine parallel zur y–Achse ist (andernfalls enthielte K_{AFC} die drei verschiedenen kollinearen Punkte A, C und D oder K_{BEC} die drei kollinearen Punkte B, C und D). Sie haben also die Gleichungen

(AC) $y = m_a x + 1$ und

(BC) $y = m_b x + 1$ für geeignete reelle m_a, m_b. ($m_a \neq m_b$, da A, B und C nicht kollinear.)



Die Kreise K_{AFC} und K_{BEC} enthalten beide die Punkte C(0|1) und D(0|–1), ihre Mittelpunkte liegen also auf der Mittelsenkrechten von CD. Dies ist aber die x–Achse; die beiden Kreisgleichungen lauten also

$$K_{(AFC)} \qquad (x-a)^2 + y^2 = (a^2 + 1^2)$$

$$K_{(BEC)} \qquad (x-b)^2 + y^2 = (b^2 + 1^2)$$

für geeignete reelle Zahlen $a \neq b$.

Die Punkte A, B, E und F sind dann die Schnittpunkte der beiden Geraden mit den beiden Kreisen; ihre Koordinaten kann man in Abhängigkeit von a, b, m_a und m_b angeben. So ergibt sich z.B. für $A(x_A|y_A)$ mit bekannten Mitteln (Einsetzen und Auflösen):

$$(x_A - a)^2 + (m_a x_A + 1)^2 = (a^2 + 1^2) \quad \Leftrightarrow \quad x_A^2 - 2a x_A + a^2 + m_a^2 x_A^2 + 2m_a x_A + 1 - a^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x_A\,(x_A\,(1 + m_a^2) - 2(a - m_a)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x_A = 2\frac{a - m_a}{1 + m_a^2}, \text{ weil } x_A = 0 \text{ ausscheidet.}$$

Aus der Geradengleichung erhält man dann

$$y_A = m_a \cdot 2\frac{a - m_a}{1 + m_a^2} + 1 = \frac{2am_a - 2m_a^2 + 1 + m_a^2}{1 + m_a^2} = \frac{2am_a - m_a^2 + 1}{1 + m_a^2}$$

Die Koordinaten von $B(x_B|y_B)$, $E(x_E|y_E)$ und $F(x_F|y_F)$ erhalten wir auf analoge Weise; im Ergebnis genügt es dabei jeweils, a durch b oder/und m_a durch m_b zu ersetzen. So erhalten wir

$$\overline{AE} = \overline{BF} \quad \Leftrightarrow \quad (x_A - x_E)^2 + (y_A - y_E)^2 = (x_B - x_F)^2 + (y_B - y_F)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(2\frac{a - m_a}{1 + m_a^2} - 2\frac{b - m_a}{1 + m_a^2}\right)^2 + \left(\frac{2am_a - m_a^2 + 1}{1 + m_a^2} - \frac{2bm_a - m_a^2 + 1}{1 + m_a^2}\right)^2$$

$$= \left(2\frac{b - m_b}{1 + m_b^2} - 2\frac{a - m_b}{1 + m_b^2}\right)^2 + \left(\frac{2bm_b - m_b^2 + 1}{1 + m_b^2} - \frac{2am_b - m_b^2 + 1}{1 + m_b^2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(2\frac{a - b}{1 + m_a^2}\right)^2 + \left(\frac{2m_a(a - b)}{1 + m_a^2}\right)^2 = \left(2\frac{b - a}{1 + m_b^2}\right)^2 + \left(\frac{2m_b(b - a)}{1 + m_b^2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(2\frac{a - b}{1 + m_a^2}\right)^2 (1 + m_a^2) = \left(2\frac{b - a}{1 + m_a^2}\right)^2 (1 + m_b^2)$$

$\Leftrightarrow \quad a = b$ (was aber vorher ausgeschlossen wurde) oder

$0 = 1 + m_a^2 = 1 + m_b^2$ (was aber in den reellen Zahlen nicht erfüllbar ist) oder

$m_a = m_b$ (was aber vorher ausgeschlossen wurde) oder

$m_a = -m_b$.

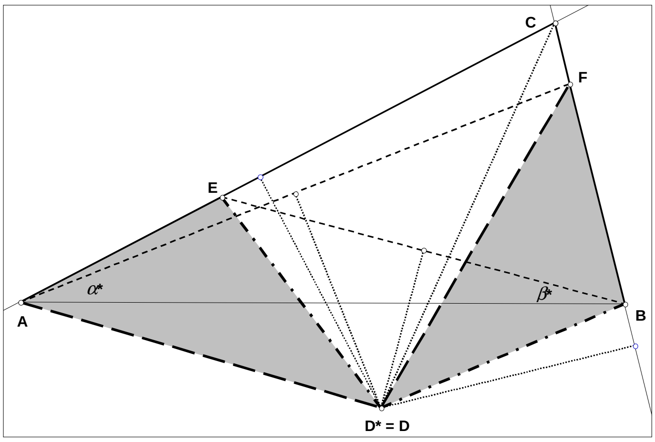
Letzteres ist aber gleichbedeutend damit, dass die beiden Geraden (AC) und (BC) achsensymmetrisch bez. der y–Achse liegen; da CD durch das Innere des Dreiecks geht (vgl. Vorbemerkung), halbiert also (CD) den Innenwinkel bei C.

Bemerkungen: Ohne die Schlussbemerkung zeigt auch dieser Beweis nur, dass CD entweder den Innenwinkel oder den Außenwinkel bei C halbiert. Mit diesem Beweis ist leicht zu sehen, dass die Aussage gültig bleibt, wenn man die Lage der Punkte E und F nicht auf das Innere der Strecken AC und BC beschränkt.

Ebenso einfach sieht man hier, dass auch die Umkehrung gilt: Gegeben seien zwei Kreise mit gemeinsamer Sehne CD und zwei bezüglich dieser Sehne symmetrisch liegende Geraden durch C. Dann schneiden diejenigen Schnittpunkte der Kreise mit den Geraden, die verschieden von C sind, gleichlange Strecken aus den Geraden.

5. Beweis: Wir betrachten zunächst nur die durch die Punkte A, B, C, E und F gegebene Figur. Mit D* sei der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten auf AF und BE bezeichnet. Es genügt zu zeigen, dass D* auf der Winkelhalbierenden liegt und mit dem Punkt D identisch ist.

Diskussion der Lagebeziehungen: Da die Punkte E und F im Innern der Strecken AC bzw. BC liegen, entsteht die Gerade (AF) aus der Geraden (AB) durch Drehung um einen Winkel α^* gegen den UZS, die Gerade (BE) aus (BA) durch Drehung um einen Winkel β^*, dabei ist $0° < \alpha^*+\beta^* < \alpha+\beta < 180°$. Hieraus folgt, dass AF und BE nicht parallel sind, also auch die beiden Mittelsenkrechten nicht. Damit ist D* stets eindeutig bestimmt; auch liegt D* stets im Winkelfeld von γ. Außerdem ist D* ≠ C: Andernfalls wäre nämlich $C \in m_{AF}$ und $C \in m_{BE}$, also die Dreiecke ΔAFC und ΔBEC beide gleichschenklig mit Spitze C = D*, dies ergäbe den Widerspruch $\overline{AC} > \overline{EC} = \overline{BC} > \overline{FC} = \overline{AC}$.



Zum eigentlichen Beweis: Da D* auf m_{AF} liegt, ist $\overline{AD^*} = \overline{FD^*}$; da D* auf m_{BE} liegt, ist auch $\overline{BD^*} = \overline{ED^*}$. Nach Voraussetzung ist auch $\overline{AE} = \overline{FB}$; damit sind die Dreiecke ΔAD*E und ΔFD*B kongruent. Insbesondere sind die Lote von D* auf AC und BC gleich lang; damit liegt D* auf der Winkelhalbierenden von ∠ACB.

Es genügt also, noch zu zeigen, dass die Punkte D* und D identisch sind: Aus der Kongruenz der Dreiecke folgt auch ∠D*AE = ∠D*FB, also

∠D*AE + ∠CFD*
= ∠D*AE + (180°– ∠D*FB) (weil F zwischen C und B und E zwischen A und C!)
= ∠D*AE + (180°– ∠D*AE)
= 180°.

Damit ist im Viereck AD*FC die Summe zweier gegenüberliegender Winkel 180°; das Viereck AD*FC ist also ein Sehnenviereck, d.h. der Punkt D* liegt auf dem Kreis durch die Punkte A, F und C. Mit analoger Argumentation folgt, dass D* auch ein Punkt des Kreises durch B, E und C ist. Zwei Kreise haben aber höchstens 2 Schnittpunkte, damit gilt entweder D* = C (was nach der Vorbemerkung ausscheidet) oder D* = D.

Variante (nur skizziert): Man definiert D* auch als Schnittpunkt der Winkelhalbierenden w_γ mit dem Umkreis des Dreiecks ΔBCE und zeigt dann, dass D* = D: Nach Umfangswinkelsatz ist $\overline{BD^*} = \overline{ED^*}$, es gibt also eine Drehung um D*, die B auf E abbildet. Weil gleichzeitig BCED* ein Sehnenviereck ist, ist ∠D*EC = 180° – ∠CBD*; d.h. der Punkt F geht bei dieser Drehung in einen Punkt F* auf (AC) über. Mit der Bedingung $\overline{AE} = \overline{FB}$ und einer zusätzlichen Lagebetrachtung (z.B. einer Betrachtung der Drehsinne der beteiligten Dreiecke) erhält man F* = A; mit ∠D*AE + ∠CFD* = ∠D*FB + ∠CFD* = 180° schließlich, dass CAD*F ein Sehnenviereck ist. Damit geht der Umkreis von ΔAFC durch D*; es ist also D* = D. (Einige Sonderlagen, z.B. wenn das Dreieck ABC gleichschenklig ist, müssten gesondert untersucht werden.)

Häufige Fehler: Wenn eine Diskussion der Lagebeziehungen fehlt, ist letztlich jeder Beweis unvollständig. Ob dies einen großen oder einen kleinen Mangel darstellt, muss vor dem Hintergrund des gewählten Ansatzes entschieden werden. Im 2. Beweis z.B. ist eine solche Lücke erheblich größer als im 3. Beweis, obwohl hinter beiden Beweisen die gleiche Lösungsidee steckt.

Aufgabe 4: Es sei a eine positive ganze Zahl.

Wie viele nicht–negative ganzzahlige Lösungen x hat die Gleichung $\left[\frac{x}{a}\right]=\left[\frac{x}{a+1}\right]$?

Erläuterung: Für jede reelle Zahl z wird mit $[z]$ die größte ganze Zahl bezeichnet, die nicht größer als z ist.
Anmerkung: Die Richtigkeit des Resultates ist zu beweisen.

Antwort: Die Anzahl der nicht–negativen ganzzahligen Lösungen beträgt $\frac{a(a+1)}{2}$.

1. Beweis: Wir überlegen zunächst, wie viele nicht–negative ganzzahlige Lösungen x das Gleichungssystem $\left[\frac{x}{a}\right] = n$ und $\left[\frac{x}{a+1}\right] = n$

für ein vorgegebenes nicht–negatives ganzzahliges n hat. Es ist

$$\left[\frac{x}{a}\right] = n \quad\Leftrightarrow\quad \text{es gibt eine Zahl } \delta\in [0;1[\text{ mit } \frac{x}{a} = n+\delta \quad\Leftrightarrow\quad n\cdot a \le x < (n+1)\cdot a.$$

$$\left[\frac{x}{a+1}\right] = n \quad\Leftrightarrow\quad n\cdot(a+1) \le x < (n+1)(a+1).$$

Beide Gleichungen sind also genau dann erfüllt, wenn x in der Schnittmenge der beiden durch die Ungleichungsketten bestimmten Intervalle liegt. Es gilt also:

$$\left[\frac{x}{a}\right] = \left[\frac{x}{a+1}\right] = n \quad\Leftrightarrow\quad \max\{ n\cdot a , n\cdot(a+1)\} \le x < \min\{ (n+1)\cdot a , (n+1)(a+1)\}.$$

$$\Leftrightarrow\quad n\cdot(a+1) \le x < (n+1)\cdot a \quad\Leftrightarrow\quad n\cdot a+n \le x < n\cdot a+a .$$

Da x nicht–negativ und ganzzahlig sowie a positiv und ganzzahlig ist, kann x

- genau $a-n$ verschiedene Werte annehmen, wenn $n < a$;
- keinen Wert annehmen, wenn $n \ge a$.

Zu verschiedenen n gehören auch stets verschiedene Lösungen x: Sei o.B.d.A. $n_1 < n_2$ sowie x_1 und x_2 eine zu n_1 bzw. n_2 gehörende Lösung. Dann gilt nach obiger Bedingung für die Lösungen $x_1 < n_1\cdot a + a = (n_1+1)\cdot a < n_2\cdot a + n_2 \le x_2$, also insbesondere $x_1 \ne x_2$. Zur Beantwortung der Frage müssen wir also nur noch über alle möglichen $n = 0, 1, 2, ..., a$ addieren. Es ergibt sich mit bekannter Formel für die arithmetische Reihe:

$$\text{Anzahl der Lösungen} = \sum_{n=0}^{a-1}(a-n) = \sum_{n=1}^{a} n = \frac{a(a+1)}{2}.$$

Variante: Bekanntlich gibt es zu jedem Paar ganzer Zahlen (x,a) genau ein Paar ganzer Zahlen (k,r) mit $x = ka + r$ und $0 \le r < a$ ("Division mit Rest"). Mit dieser Darstellung ist dann

$$\left[\frac{x}{a}\right] = \left[\frac{x}{a+1}\right] \quad\Leftrightarrow\quad \left[\frac{ka+r}{a}\right] = \left[\frac{ka+r\quad +k-k}{a+1}\right] \quad\Leftrightarrow\quad \left[k+\frac{r}{a}\right] = \left[k+\frac{r-k}{a+1}\right]$$

$$\Leftrightarrow\quad k+0 = k+\left[\frac{r-k}{a+1}\right] \quad\Leftrightarrow\quad \left[\frac{r-k}{a+1}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow\quad 0 \le r-k < a+1.$$

Umgekehrt erhält man bei vorgegebenem a zu jedem Paar (k,r) mit $0 \le r < a$ genau ein ganzzahliges $x = ka + r$; dabei gehören zu verschiedenen Paaren (k,r) auch verschiedene x. Bei vorgegebenem a ist also die Anzahl von Paaren (k,r), die obige Bedingung erfüllen, genau so groß wie die Anzahl der Zahlen der Form $x = ka + r$ und damit der Anzahl der Lösungen der gegebenen Gleichung.

Wegen $r < a$ und $k \geq 0$ ist die rechte Ungleichung stets erfüllt; die linke genau für die $r + 1$ verschiedenen Werte $k = 0, 1, ... r$. Da r seinerseits die Werte $0, 1, ..., a$ annehmen kann, erhalten wir die Anzahl der Lösungen als die Summe $\sum_{r=0}^{a-1}(r+1) = \sum_{r=1}^{a} r = \frac{a(a+1)}{2}$.

2. Beweis: Es sei stets x eine nicht–negative ganze Zahl, a stets eine positive ganze Zahl.

Wir betrachten die Funktion $\varphi(x) := \left[\frac{x}{a}\right] - \left[\frac{x}{a+1}\right]$. Offensichtlich ist x genau dann Lösung der gegebenen Gleichung, wenn $\varphi(x) = 0$ ist. Es genügt also, die Anzahl der Elemente in $\{ x \mid \varphi(x) = 0 \}$ zu bestimmen. Hierzu leiten wir folgende Eigenschaften der Funktion φ her:

(A) $\varphi(x) = 0 \Rightarrow x < a(a+1)$,

(B) $0 \leq x < a(a+1) \Rightarrow \varphi(x) = 0$ oder $\varphi(x) = 1$.

Beweis: Wir subtrahieren die beiden aus der Definition der Gauß–Klammer resultierenden Ungleichungsketten

$$\frac{x}{a} - 1 < \left[\frac{x}{a}\right] \leq \frac{x}{a}$$

$$\frac{x}{a+1} \geq \left[\frac{x}{a+1}\right] > \frac{x}{a+1} - 1$$

und erhalten $$\frac{x}{a(a+1)} - 1 < \varphi(x) < \frac{x}{a(a+1)} + 1.$$

Ist nun $\varphi(x) = 0$, folgt (A) aus der linken Ungleichung; und wenn $0 \leq x < a(a+1)$, dann folgt $-1 < \varphi(x) < 2$ und zusammen mit der Ganzzahligkeit von x sofort $0 \leq \varphi(x) \leq 1$, also (B).

Aus (A) folgt nun, dass als Lösungen der Gleichung nur Zahlen $x \in D := [0 \leq x < a(a+1)[$ in Betracht kommen.

Mit L_0 und L_1 sei die Anzahl derjenigen $x \in D$ bezeichnet, für die $\varphi(x) = 0$ bzw. $\varphi(x) = 1$; L_0 ist also die gesuchte Anzahl der Lösungen. Aus (B) folgt sofort $L_0 + L_1 = a(a+1)$.

Nun können wir verschieden argumentieren:

Variante 1: Zunächst zeigen wir, dass für nicht–negative ganzzahlige x und positive ganzzahlige a die Identität $\left[-\frac{x+1}{a}\right] = -(\left[\frac{x}{a}\right] + 1)$ gilt: Wenn nämlich $0 < \frac{x+1}{a} \notin \mathbb{N}$, dann haben $\frac{x+1}{a}$ und $\frac{x}{a}$ den gleichen Vorkomma–Anteil, und die Identität folgt, weil die Anwendung der Gauß–Klammer auf negative Zahlen einem Aufrunden des Betrages auf die nächst größere ganze Zahl entspricht; und wenn $0 < \frac{x+1}{a} \in \mathbb{N}$, ist der Vorkomma–Anteil von $\frac{x+1}{a}$ um 1 größer als der von $\frac{x}{a}$, die Identität folgt dann mit $\left[-\frac{x+1}{a}\right] = -\frac{x+1}{a} = -(\left[\frac{x}{a}\right] + 1)$.

Damit können wie eine weitere Eigenschaft der Funktion φ herleiten:

(C) Für $x \in D$ gilt: $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi(a(a+1) - 1 - x) = 1$

Beweis: Es ist $$\varphi(a(a+1) - 1 - x) = \left[\frac{a(a+1)-1-x}{a}\right] - \left[\frac{a(a+1)-1-x}{a+1}\right]$$

$$= \left[a+1-\frac{x+1}{a}\right] - \left[a-\frac{x+1}{a+1}\right] = (a+1+\left[-\frac{x+1}{a}\right]) - (a+\left[-\frac{x+1}{a+1}\right])$$

$$= a+1-(\left[\frac{x}{a}\right]+1) - (a-(\left[\frac{x}{a+1}\right]+1)) = 1-\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \varphi(x) = 0 \\ 0 & \text{falls } \varphi(x) = 1 \end{cases}.$$

Durchläuft nun x alle Zahlen aus D = {0, 1, ..., $a(a+1)-1$} je genau ein Mal, so durchläuft $a(a+1)-1-x$ die Zahlen $a(a+1)-1$, $a(a+1)-2$, ..., 2, 1, 0 je genau ein Mal, also ebenfalls die Zahlen aus D. Damit gibt es in D gleich viele Zahlen x mit $\varphi(x) = 0$ und $\varphi(x) = 1$.

Also ist $L_0 = L_1$; zusammen mit $L_0 + L_1 = a(a+1)$ folgt sofort $L_0 = \frac{a(a+1)}{2}$.

Variante 2: Aus $L_0 + L_1 = a(a+1)$ und (B) folgt $L_1 = \sum\limits_{x|\varphi(x)=1} 1 = \sum\limits_{x=0}^{a(a+1)-1} \varphi(x)$.

Hieraus kann man nun L_0 berechnen: Eine erste Umformung ergibt

$$L_0 = a(a+1) - L_1 = a(a+1) - \sum_{x=0}^{a(a+1)-1} \varphi(x) = a(a+1) - \left(\sum_{x=0}^{a(a+1)-1} \left[\frac{x}{a}\right] - \sum_{x=0}^{a(a+1)-1} \left[\frac{x}{a+1}\right] \right).$$

Die Summanden $\left[\frac{x}{a}\right]$ nehmen für $x \in$ D der Reihe nach jeweils a Mal die Werte 0, 1, 2, ..., a an; die Summanden $\left[\frac{x}{a+1}\right]$ für $x \in$ D der Reihe nach jeweils $(a+1)$ Mal die Werte 0, 1, 2, ..., $a-1$. Damit kann man bei der Berechnung von L_0 weiter umformen:

$$\begin{aligned} L_0 &= \ldots = a(a+1) - a\sum_{i=0}^{a} i + (a+1)\sum_{i=0}^{a-1} i = a(a+1) - a\,\frac{a(a+1)}{2} + (a+1)\,\frac{(a-1)a}{2} \\ &= a\,\frac{(2a+2)-(a^2+a)+(a^2-1)}{2} \\ &= \frac{a(a+1)}{2}. \end{aligned}$$

Häufige Fehler: Eine Tabelle für einige a zu erstellen und aufgrund der Ergebnisse oder der Gestalt der Tabelle eine Formel für die Anzahl der Lösungen zu vermuten, stellt nur einen ersten Schritt bei der Bearbeitung der Aufgabe dar. Der eigentliche Nachweis ist für allgemeines a zu führen.