Bundeswettbewerb Mathematik
Wissenschaftszentrum • Postfach 20 14 48 • 53144 Bonn
Fon: 0228 - 9 59 15-20 • Fax: 0228 - 9 59 15-29
e-mail: info@bundeswettbewerb-mathematik.de
www.bundeswettbewerb-mathematik.de

Korrekturkommission • Karl Fegert

Aufgaben und Lösungen

2. Runde 2007

Über Kommentare und Ergänzungen zu diesen Lösungsbeispielen freuen wir uns!

Anschrift oder Email–Adresse s.o.

Stand: Oktober 2007

Aufgabe 1: Für welche Zahlen n gibt es eine positive ganze Zahl k mit folgender Eigenschaft:

Die Zahl k hat die Quersumme n und die Zahl k^2 hat die Quersumme n^2?

Anmerkung: Die Richtigkeit des Resultates ist zu beweisen.

Antwort: Eine solche Zahl gibt es für jede positive ganze Zahl n.

Gemeinsame Bezeichnungen: Für eine nicht–negative ganze Zahl n sei mit $Q(n)$ die Quersumme ihrer Darstellung im Dezimalsystem bezeichnet. Gelegentlich wird in den Formulierungen nicht zwischen einer Zahl und ihrer Darstellung im Dezimalsystem unterschieden.

1. Beweis (durch konkrete Angabe einer solchen Zahl $k(n)$ für jedes n): Die Quersumme jeder positiven ganzen Zahl ist (als Summe ganzer Zahlen mit mindestens einem positiven Summanden) ebenfalls eine positive ganze Zahl. Für n kommen also nur positive ganze Zahlen in Betracht.

Für ganzzahlige $n \geq 1$ betrachten wir die Zahl $k(n) := \sum_{i=0}^{n-1} 1\cdot 10^{2^i-1} = 100...01.000.000.010.001.011.$

Aus der Konstruktion ist unmittelbar einsichtig, dass $Q(k(n)) = n$. Ferner ist

$$k(n)^2 = \left(\sum_{i=0}^{n-1}\left(1\cdot 10^{2^i-1}\right)\right)^2 = \sum_{0\le i,\, j\le n-1}\left(1\cdot 10^{2^i-1}\cdot 1\cdot 10^{2^j-1}\right)$$

$$= \sum_{0\le i=j\le n-1}\left(\left(1\cdot 10^{\left(2^i-1\right)}\right)^2\right) + 2\cdot \sum_{0\le i<j\le n-1}\left(1^2\cdot 10^{\left(2^i-1\right)+\left(2^j-1\right)}\right) = \sum_{i=0}^{n-1}\left(1\cdot 10^{2^{i+1}-2}\right) + \sum_{i<j}\left(2\cdot 10^{2^i+2^j-2}\right). \ (*)$$

In (*) besteht die erste Summe aus n Summanden, die zweite aus $\frac{n(n-1)}{2}$ Summanden. Jeder Summand ist das Produkt aus der Zahl 1 oder 2 mit einer Zehnerpotenz; dabei sind keine zwei der vorkommenden Zehnerpotenzen gleich: Wären in der rechten Summe zwei Zehnerpotenzen gleich, d.h. wäre $2^i + 2^j - 2 = 2^r + 2^s - 2$, also $2^{i-r} + 2^{j-r} = 1 + 2^{s-r}$, so hätten wir links vom Gleichheitszeichen eine gerade Zahl und rechts eine ungerade (man kann o.B.d.A. $r < i < j < s$ annehmen, die Exponenten sind dann alle positiv), also einen Widerspruch. Wären eine Zehnerpotenz in der ersten Summe und eine Zehnerpotenz der zweiten Summe gleich, d.h. wäre $2^{i+1}-2 = 2^r - 1 + 2^s - 1$ mit $r < s$, also $2^{i+1} = 2^r(1 + 2^{s-r})$, so hätten wir links vom Gleichheitszeichen eine reine Zweierpotenz, rechts nicht, also ebenfalls einen Widerspruch. In der linken Summe sind offensichtlich alle Zehnerpotenzen verschieden.

Damit entspricht die Darstellung (*) von $k(n)^2$ der Dezimaldarstellung dieser Zahl; sie enthält genau n Mal die Ziffer 1 und genau $\frac{n(n-1)}{2}$ Mal die Ziffer 2. Hieraus berechnen wir die Quersumme, es ist wie gefordert $Q(k(n)^2) = n\cdot 1 + \frac{n(n-1)}{2}\cdot 2 = n\cdot(1 + (n-1)) = n^2$.

Bemerkungen: Es ist übrigens $k(n)^2 = ...02.022.100.020.221.022.121$.

Es genügt der Nachweis, dass in der rechten Summe keine zwei Zehnerpotenzen gleich sind und dass in der linken Summe keine zwei Zehnerpotenzen gleich sind. Wäre eine Zehnerpotenz in der rechten Summe identisch mit einer Zehnerpotenz in der linken Summe, dann würden in der Zahl $k(n)$ eine Ziffer 1 und eine Ziffer 2 zu einer Ziffer 3 verschmelzen; die Quersumme bliebe dann gleich.

Mit der etwas einfacheren Definition

$$k(n) := \sum_{i=0}^{n-1} 1\cdot 10^{2^i} = 100...010.000.000.100.010.110$$

erhält man prinzipiell den gleichen Beweis, allerdings sind die verwendeten Zahlen dann größer.

Die so konstruierten Zahlen $k(n)$ behalten die verlangte Eigenschaft $Q(k(n)^2) = (Q(k(n)))^2$, wenn man beliebig viele der Ziffern 1 durch Ziffern 2 ersetzt: Dann tauchen in der Darstellung (*) als

Koeffizienten der Zehnerpotenzen in der ersten Summe nur die Zahlen 1^2 oder 2^2 auf, in der zweiten Summe tauchen nur die Zahlen $2\cdot1\cdot1$, $2\cdot1\cdot2$ oder $2\cdot2\cdot2$ auf; da diese alle kleiner als 10 sind, erhält man wieder eine Dezimaldarstellung von $k(n)^2$. Entsprechendes gilt, wenn man höchstens eine Ziffer 1 durch eine Ziffer 3 ersetzt.

Erfüllt eine Zahl $k(n)$ die Bedingungen der Aufgabe, dann auch die Zahl $k(n)^*$, die aus $k(n)$ durch Umkehrung der Reihenfolge der Ziffern entsteht; dies sieht man sofort, wenn man die dem Quadrieren entsprechende Multiplikation in schulüblicher Weise aufschreibt.

2. Beweis Wir definieren die Folge $k(n)$ rekursiv durch die beiden Gleichungen

$k(1) := 1,\quad k(n+1) = 10^{s(n)}\cdot k(n) + 1;$ dabei bezeichnen wir mit $s(n)$ die Anzahl der Ziffern in der Dezimaldarstellung von $k(n)$,

und zeigen mit vollständiger Induktion, dass die Glieder dieser Folge die Bedingung der Aufgabe für jedes positive ganze n erfüllen.

Zunächst stellen wir durch einfaches Nachrechnen fest, dass die Folge $k(i)$ mit 1, 11, 1101, 11010001, ... beginnt; dass die Dezimaldarstellung der Zahl $k(n+1)$ aus der Dezimaldarstellung von $k(n)$ durch Anhängen eines Zahlblocks entsteht, der i. A. mit einigen Nullen beginnt und an dessen Ende genau einmal die Zahl 1 steht. Insbesondere enthält für alle $n \geq 0$ die Dezimaldarstellung der Zahl $k(n)$ genau n Einsen und sonst nur Nullen; es ist also $Q(k(n)) = n$. Ferner hat die Dezimaldarstellung der Zahl $2k(n)$ gleich viele Ziffern wie die Dezimaldarstellung von $k(n)$, sie enthält nur Ziffern 0 und 2 und es ist $Q(2k(n)) = 2Q(k(n))$.

Induktionsanfang: Da $Q(k(1)) = Q(1) = 1$ und $Q(k(1)^2) = Q(1) = 1 = 1^2$, ist die Aussage richtig für $n = 1$.

Induktionsvoraussetzung: Die Aussage sei richtig für ein bestimmtes $n \geq 1$, d.h. es sei $Q(k(n)) = n$ und $Q(k(n)^2) = n^2$.

Induktionsschluss: Dann ist

$$k(n+1)^2 = (10^{s(n)}\cdot k(n) + 1)^2 = 10^{2s(n)}\cdot k(n)^2 + 2\cdot 10^{s(n)}\cdot k(n) + 1$$

$$\begin{aligned} = \quad & \underbrace{.....k(n)^2.....}_{2s(n)-1\text{ Stellen}}\underbrace{0000..............0000}_{2s(n)\text{ Stellen}} \\ + \quad & \qquad\qquad\qquad\quad \underbrace{.....2k(n)...}_{s(n)\text{ Stellen}}\underbrace{00.....00}_{s(n)\text{ Stellen}} \\ + \quad & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 1 \end{aligned}$$

Die Dezimaldarstellung des ersten Summanden beginnt mit einem Ziffernblock, der die Zahl $k(n)^2$ darstellt, gefolgt von $2s(n)$ Nullen. Seine Quersumme ist die Quersumme von $k(n)^2$, also nach Induktionsvoraussetzung n^2.

Die Dezimaldarstellung des zweiten Summanden beginnt mit einem Ziffernblock, der die Zahl $2k(n)$ darstellt, gefolgt von $s(n)$ Nullen; da $n \geq 1$, ist $s(n) \geq 1$. Seine Quersumme ist nach obiger Bemerkung die von $2k(n)$, also $2n$.

Die Dezimaldarstellung des zweiten Summanden hat also genau $2s(n)$ Stellen, d.h. genau so viele, wie der erste Summand Nullen am Ende hat. Die Dezimaldarstellung der Summe entsteht also dadurch, dass die letzten $2s(n)$ Nullen beim ersten Summanden durch die Dezimaldarstellung des zweiten Summanden ersetzt werden; die Addition der 1 entspricht einem Ersetzen der letzten 0 durch eine 1.

Insgesamt beträgt die Quersumme von $k(n+1)$ also $n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$; das war zu zeigen.

Bemerkungen: Gelegentlich wird gefordert, in einem Induktionsbeweis in der Induktionsvoraussetzung die Variable n_0 zu benützen, um sie von der Variablen n in der Aussage zu unterscheiden. Hierauf habe ich im Interesse der besseren Lesbarkeit verzichtet.

Dass die Zahl $k(n)^2$ genau $2s(n)-1$ Stellen hat, ist für den Beweis unerheblich.

3. Beweis: (ähnlich wie im 1. Beweis durch konkrete Angabe einer solchen Zahl $k(n)$ für jedes $n = 1, 2, 3, ...$;dabei werden aber kleinere Zahlen konstruiert als im 1. Beweis).

Für $n \geq 1$ betrachten wir zunächst die rekursiv definierte Zahlenfolge (a_i) mit $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{i+2} = a_i + a_{i+1} + 1$. Hieraus konstruieren wir die Zahl $k(n) := \sum_{i=0}^{n-1} 1 \cdot 10^{a_i}$.

(Hinweis: Es ist $k(n) = ...100000001000010010111$; in dieser Zahl ist die i–te Ziffer von rechts eine 1, wenn i eine der Fibonacci–Zahlen 1, 2, 3, 5, 8, ... ist, sonst eine 0.)

Zum Beweis rechnen wir nach: Es ist offensichtlich $Q(k(n)) = Q(\sum_{i=0}^{n-1} 1 \cdot 10^{a_i}) = n$.

Ferner ist
$$k(n)^2 = \left(\sum_{i=0}^{n-1} 1 \cdot 10^{a_i}\right)^2 = \sum_{0 \le i,\, j \le n-1} \left(1 \cdot 10^{a_i} \cdot 1 \cdot 10^{a_j}\right) = \sum_{0 \le i,\, j \le n-1} \left(1 \cdot 10^{a_i + a_j}\right)$$
$$= \sum_m \left(\sum_{0 \le i,\, j \le n-1 \mid a_i + a_j = m} \left(1 \cdot 10^{a_i + a_j}\right) \right) = \sum_m \left(10^m \cdot \sum_{0 \le i,\, j \le n-1 \mid a_i + a_j = m} 1 \right).$$

In dieser Umformung besteht die drittletzte Summe aus n^2 Summanden (da i und j jeweils n verschiedene Werte annehmen können), dabei ist jeder einzelne Summand das Produkt aus der Zahl 1 und einer Zehnerpotenz. Damit hat die Summe der Koeffizienten dieser Zehnerpotenzen $\sum_{0 \le i,\, j \le n-1} 1$ den Wert n^2; da wir bei der weiteren Umformung nur neu zusammenfassen, hat die Summe der Koeffizienten in der letzten Summe $\sum_m \left(\sum_{0 \le i,\, j \le n-1 \mid a_i + a_j = m} 1 \right)$ den Wert n^2.

Die letzte Summe der obigen Umformung ist genau dann die Dezimaldarstellung von $k(n)^2$, wenn für alle m (m = 0,1, 2, 3, ...) der Ausdruck $\sum_{0 \le i,\, j \le n-1 \mid a_i + a_j = m} 1$ eine im Dezimalsystem gültige Ziffer darstellt, d.h. den Wert 9 nicht übersteigt. In diesem Fall ist die Summe der Koeffizienten identisch mit der Quersumme; d.h. die Behauptung ist dann gezeigt.

Es bleibt also noch zu zeigen, dass $\sum_{0 \le i,\, j \le n-1 \mid a_i + a_j = m} 1 \le 9$ für alle m; d.h. dass zu jedem m die Gleichung $a_i + a_j = m$ höchstens 9 verschiedene Lösungspaare $(i|j)$ hat. Wenn es überhaupt ein Lösungspaar $(u|v)$ gibt, dann natürlich auch das (im Fall $u = v$ identische) Lösungspaar $(v|u)$. Falls es ein weiteres, von $(u|v)$ und $(v|u)$ verschiedenes Lösungspaar $(r|s)$ gibt, so folgt aus $r = u$ sofort $s = v$, wir können also o.B.d.A. annehmen, dass $r > u \geq v$. Da die Folge der a_i streng monoton wachsend ist und alle Glieder nicht–negativ sind, können wir folgende Ungleichungskette aufstellen:

$$a_r \le a_r + a_s = a_u + a_v \le a_u + a_u < a_{u+1} + a_u + 1 = a_{u+2};$$

hieraus folgt sofort $u + 2 > r > u$, also $r = u + 1$. Nach Vorgabe von r und der Gleichung $a_r + a_s = m$ gibt es genau einen möglichen Wert für a_s und – wegen der strengen Monotonie – damit auch höchstens einen möglichen Wert s.

Zusammenfassend gilt also: Wenn die Gleichung $a_i + a_j = m$ eine Lösung $(u|v)$ hat, dann insgesamt höchstens drei weitere: nämlich noch (v,u), $(u+1;s)$ und $(s, u+1)$; dabei ist s eindeutig bestimmt. Das war zu zeigen.

Bemerkungen: Tatsächlich gibt es nur höchstens 3 Lösungen, weil zwei der oben konstruierten Lösungen identisch sind: Aus $a_u + a_v = m = a_r + a_s$ mit $r > u > v > s$ folgt aus obigem Ergebnis $a_u + a_v = a_{u+1} + a_s$; zusammen mit der Rekursionsformel also $a_v = a_{u+1} + a_s - a_u = a_u + a_{u-1} + 1 + a_s - a_u = a_{u-1} + 1 + a_s$ (*). Nach Voraussetzung ist $s \le u - 2$. Mit $s = u - 2$ und hieraus folgend $v = u$ haben wir ein mögliches Lösungspaar $(s|v)$ von (*) gefunden; weitere Lösungspaare existieren nicht, weil die Annahme $s < u - 2$ zum Widerspruch $v < u$ führt. Damit sind die beiden im vorigen Abschnitt genannten Lösungen $(u|v)$ und $(v|u)$ der Gleichung $a_i + a_j = m$ identisch.

Weiter folgt übrigens, dass keine Ziffer in $k(n)$ größer als 3 ist.

Würde man wie in der Konstruktion zum 1. Beweis Ziffern 1 durch Ziffern 2 ersetzen, so erhielte man evtl. eine "Ziffer" $\sum_{i,j|a_i+a_j=m} 2\cdot 2 = 12$; d.h. die Eigenschaft von $k(n)$ bliebe nicht erhalten.

Eine explizite Darstellung der Folge der jeweils minimalen $k(n)$ ist mir nicht bekannt. Eine weitere "Verdichtung" der Einsen in $k(n)$, d.h. eine Angabe von $k(n)$ mit weniger Ziffern Null ist wohl möglich; vor allem kann man wohl bei den hohen Zehnerpotenzen weniger Nullen zwischen die Einsen setzen. Unbekannt ist mir auch, ob man dies auch mit den Ziffern Zwei machen kann.

Aufgabe 2: Am Anfang eines Spiels liegen r rote und g grüne Steine auf dem Tisch. Anja und Bernd ziehen abwechselnd nach folgenden Regeln, wobei Anja beginnt:

Wer am Zug ist, wählt eine Farbe und entfernt k Steine dieser Farbe. Dabei muss k ein Teiler der augenblicklichen Anzahl der Steine der anderen Farbe sein. Wer den letzten Stein wegnimmt, ist Gewinner.

Wer kann den Gewinn erzwingen?

Anmerkung: Die Richtigkeit des Resultates ist zu beweisen.

Antwort: Anja kann den Gewinn erzwingen, wenn die Zahlen r und g den Primfaktor 2 in verschiedener Vielfachheit enthalten, sonst kann Bernd den Gewinn erzwingen (hierbei sei vereinbart, dass die Zahl 0 den Primfaktor 2 "unendlich" oft enthält, und dass die Zahl "unendlich" von allen endlichen Vielfachheiten verschieden sei).

Variante 1: Anja kann den Gewinn erzwingen, wenn von den beiden Zahlen $\frac{r}{ggT(r,g)}$ und $\frac{g}{ggT(r,g)}$ genau eine ungerade ist, sonst (d.h. wenn beide ungerade sind) kann Bernd den Gewinn erzwingen.

Variante 2: Anja kann den Gewinn erzwingen, wenn $\frac{r+g}{ggT(r,g)}$ ungerade ist, sonst kann Bernd den Gewinn erzwingen.

1. Beweis: Mit r_i und g_i (i = 0, 1, 2, ...) seien im Folgenden die Anzahl der roten bzw. grünen Steine vor dem i–ten Zug bezeichnet. Weiter vereinbaren wir, dass die Zahl 0 den Primfaktor 2 unendlich oft enthalte und dass dies größer sei als jede ganze Zahl.

Ferner benützen wir folgenden bekannten Sachverhalt aus der Zahlentheorie: Wenn $r_i \neq 0$ und $g_i \neq 0$ ist, gibt es wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung eindeutig bestimmte Zahlen s_i, t_i, v_i und w_i mit der Eigenschaft

$r_i = 2^{s_i} \cdot t_i$ (t_i ungerade) sowie $g_i = 2^{v_i} \cdot w_i$ (w_i ungerade).

Nun unterscheiden wir zwei Fälle:

Fall 1: $s_i \neq v_i$; d.h. g_i und r_i enthalten den Faktor 2 in verschiedener Vielfachheit; o.B.d.A. sei $s_i < v_i$; hieraus folgt insbesondere $r_i \neq 0$.

Falls $g_i = 0$ und damit r_i Teiler von g_i ist, kann der Spieler am Zug r_i rote Steine vom Tisch nehmen; damit hat er den letzten Stein vom Tisch genommen und gewonnen.

Andernfalls ist $2^{s_i} \geq 1$ ein Teiler von r_i und der Spieler am Zug kann von den grünen Steinen 2^{s_i} Steine wegnehmen. Es ist dann

$r_{i+1} = r_i = 2^{s_i} \cdot t_i$, also $s_{i+1} = s_i$ sowie

$g_{i+1} = 2^{v_i} \cdot w_i - 2^{s_i} \cdot 1 = 2^{s_i} \cdot (2^{v_i - s_i} - 1)$.

Da $s_i < v_i$, ist die Klammer ($2^{v_i - s_i} - 1$) als Differenz einer geraden und einer ungeraden Zahl selbst ungerade; die Zahl g_{i+1} enthält also den Faktor 2 in gleicher Vielfachheit wie die Zahl r_{i+1}; ferner ist die Klammer von 0 verschieden und somit auch g_{i+1}.

Es gibt also in jedem Fall einen erlaubten Zug, nach dem entweder der Ziehende gewonnen hat oder nach dem $s_{i+1} = v_{i+1}$, d.h. die Zahlen r_i und g_i den Faktor 2 in gleicher Vielfachheit enthalten. Insbesondere kann man so ziehen, dass keine der beiden Zahlen r_i und g_i den Wert 0 annehmen. Da der Nachziehende nur von einem Haufen Steine entfernen kann, kann er mit seinem folgenden Zug nicht gewinnen.

Fall 2: $s_i = v_i$; d.h. g_i und r_i enthalten den Faktor 2 in gleicher Vielfachheit.

Insbesondere ist $r_i \neq 0$ und $g_i \neq 0$. Da man nur von einem Haufen Steine entnehmen kann, kann man mit dem folgenden Zug nicht gewinnen.

Die Zahl 1 ist Teiler jeder Zahl, also kann man immer eine Farbe wählen und einen Stein dieser Farbe entnehmen, es ist also immer ein Zug möglich.

O.B.d.A. werden im nächsten Zug k grüne Steine entnommen; dabei gibt es wieder eindeutig bestimmte Zahlen a und b so, dass $k = 2^a \cdot b$, b ungerade. Da k Teiler von r_i ist, ist zusätzlich $a \le s_i = v_i$ und b Teiler von t_i (was für unsere Betrachtung nebensächlich ist). Es ist dann

$r_{i+1} = r_i = 2^{s_i} \cdot t_i$, also $s_i = s_{i+1}$ sowie

$g_{i+1} = 2^{v_i} \cdot w_i - 2^a \cdot b = 2^a \cdot (2^{v_i - a} \cdot w_i - b)$.

Entweder ist nun $a = v_i$, also $v_i - a = 0$; damit ist die Klammer $(2^{v_i - a} \cdot w_i - b)$ als Differenz zweier ungerader Zahlen selbst gerade; die Zahl g_{i+1} enthält also den Faktor 2 in höherer Vielfachheit als $a = v_i$;

oder es ist $a < v_i$, also $v_i - a > 0$; damit ist die Klammer $(2^{v_i - a} \cdot w_i - b)$ als Differenz einer geraden und einer ungeraden Zahl selbst ungerade; die Zahl g_{i+1} enthält also den Faktor 2 in der Vielfachheit $a < v_i$.

Es gibt also in jedem Fall einen möglichen Zug und nach jedem möglichen Zug ist $s_{i+1} \neq v_{i+1}$, d.h. der Primfaktor 2 kommt in r_{i+1} und g_{i+1} in verschiedener Vielfachheit vor. Der Fall, dass entweder $r_{i+1} = 0$ oder $g_{i+1} = 0$ ist, ist hierin eingeschlossen.

Damit sind wir fertig: Wenn Anja zu Beginn die Situation "r und g enthalten den Primfaktor 2 in verschiedener Vielfachheit" vorfindet, entspricht dies dem Fall 1. Sie kann also so ziehen, dass sie gewinnt (nämlich wenn in einem Haufen keine Steine mehr sind) oder so, dass Bernd im folgenden Zug nicht gewinnen kann und Fall 2 vorfindet. Mit seinem (immer möglichen!) Zug stellt Bernd aber zwangsweise in jedem Fall wieder die Situation des Falles 1 her. Dies wiederholt sich nun; da mit jedem Zug Steine vom Tisch genommen werden, beträgt die Gesamtzahl der Steine irgendwann 0 und Anja hat gewonnen.

Wenn Anja allerdings die Situation "r und g enthalten den Primfaktor 2 in gleicher Vielfachheit" vorfindet, dann muss sie mit dem ersten Zug für Bernd eine Situation herstellen, die dem Fall 1 entspricht. Die Rollen sind dann vertauscht und Bernd kann den Gewinn erzwingen.

Bemerkung: Nach der formalen Definition ist die Zahl Null ein Teiler von Null; es ist also nicht von vorneherein klar, dass bei jedem Zug Steine vom Tisch genommen werden und das Spiel nach endlich vielen Zügen beendet ist.

Aufgabe 3: Für eine Menge E von Punkten des dreidimensionalen Raumes sei L(E) die Menge aller Punkte, die auf Geraden durch zwei verschiedene Punkte aus E liegen.

Es sei T die Menge der Eckpunkte eines regulären Tetraeders. Aus welchen Punkten besteht L(L(T))?

Gemeinsame Bezeichnungen: Die vier Eckpunkte des Tetraeders seien mit A, B, C und D bezeichnet. Zu zwei Punkten $X \neq Y$ bezeichne (XY) die durch X und Y bestimmte Gerade, zu (XY) und $P \notin (XY)$ bezeichne $E_{P,XY}$ die durch P und (XY) eindeutig bestimmte Ebene.

Gelegentlich werden wir die Bezeichnungen für ein geometrisches Objekt (z.B. (AB)) mit der Bezeichnung für die Menge von Punkten, aus denen dieses Objekt besteht, identifizieren. So kann z.B. $(AB)\cup(CD)$ die Menge aller Punkte auf (AB) oder (CD) bezeichnen. Mit dieser Konvention ist z.B. $L((AB)\cup(CD))$ sinnvoll definiert.

Ergebnis Variante 1: Wir legen durch jede Kante des Tetraeders eine Ebene, die parallel zu der jeweils gegenüberliegenden Kante ist. Auf diese Art wird über jeder Fläche des Tetraeders eine Pyramide nach außen errichtet; die vier Punkte an den Spitzen dieser Pyramiden seien mit S_{ABC}, S_{ABD}, S_{ACD}, S_{BCD} bezeichnet.

Dann besteht L(L(T)) aus der Menge der Punkte des Raumes, aus der diese vier Punkte S_{ABC}, S_{ABD}, S_{ACD} und S_{BCD} entfernt worden sind.

Bemerkung: Die Punkte S_{ABC}, S_{ABD}, S_{ACD} und S_{BCD} können auch als Bilder der Punkte D, C, B bzw. A bei der Punktspiegelung am Schwerpunkt des Tetraeders ABCD beschrieben werden.

Ergebnis Variante 2: Bekanntlich lässt sich um ein reguläres Tetraeder so ein Würfel legen, dass die 4 Ecken des Tetraeders gleichzeitig Ecken des Würfels sind (oder: ...dass die Kanten des Tetraeders mit den Diagonalen von 4 der Seitenflächen des Würfels zusammenfallen). L(L(T)) besteht dann aus allen Punkten des dreidimensionalen Raumes mit Ausnahme derjenigen vier Eckpunkte des Würfels, die nicht Ecken des Tetraeders sind (vgl. Figur im Beweis 2).

Ergebnis Variante 3: Wir legen ein Achsenkreuz so über das Tetraeder, dass die vier Eckpunkte die Koordinaten A(0|0|0), B(1|1|0), C(1|0|1), D(0|1|1) haben.

Dann ist $L(L(T)) = \mathbb{R}^3 \setminus \{ (1|0|0), (0|1|0), (0|0|1), (1|1|1) \}$.

Ergebnis Variante 3*: Wir legen ein Achsenkreuz so über das Tetraeder, dass die vier Eckpunkte die Koordinaten A(1|0|0), B(0|1|0), C(0|0|1), D(1|1|1) haben.

Dann ist $L(L(T)) = \mathbb{R}^3 \setminus \{ (0|0|0), (1|1|0), (1|0|1), (0|1|1) \}$.

Ergebnis Variante 4: Wir legen ein Achsenkreuz so über das Tetraeder, dass das Tetraeder einen dreidimensionalen Simplex bildet, d.h. dass der Ursprung mit der Ecke D zusammenfällt und die Punkte A, B und C die Koordinaten (1|0|0), (0|1|0) bzw. (0|0|1) haben (vgl. Figur im Beweis 3).

Dann ist $L(L(T)) = \mathbb{R}^3 \setminus \{ (\frac{1}{2}|\frac{1}{2}|\frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}|\frac{1}{2}|\frac{1}{2}), (\frac{1}{2}|-\frac{1}{2}|\frac{1}{2}), (\frac{1}{2}|\frac{1}{2}|-\frac{1}{2}) \}$.

1. Beweis (mit Bezug zur Variante 1 der Ergebnisformulierung): Zunächst stellen wir fest, dass die Trägergeraden der Kanten AB und CD windschief sind, ebenso die von AC und BD, ebenso die von AD und BC.

Offensichtlich besteht L(T) aus den sechs Trägergeraden der Tetraederkanten.

Sei nun P ein Punkt des dreidimensionalen Raumes. Um nachzuweisen, dass $P \in L(L(T))$, genügt es, eine Gerade (RS) zu finden mit $P \in (RS)$, $R \neq S$ und $R, S \in L(T)$; um nachzuweisen, dass $P \notin L(L(T))$, genügt es zu zeigen, dass es keine zwei solchen Punkte gibt. Wir unterscheiden drei Fälle:

Fall 1: P liegt in der Trägerebene einer Ebene, die durch eine Tetraederfläche bestimmt ist.
Dann ist $P \in L(L(T))$:

Nachweis: O.B.d.A. sei diese Fläche das Dreieck ΔABC. Wir betrachten eine beliebige Gerade, die P und einen inneren Punkt des Dreiecks ΔABC enthält (eine solche existiert immer). Diese Gerade enthält innere und äußere Punkte des Dreiecks ΔABC, also auch zwei verschiedene Punkte R und S auf den Dreiecksseiten. Es ist also $P \in (RS)$, $R \neq S$ und $R, S \in L(T)$; mithin $P \in L(L(T))$.

Fall 2: P liegt auf keiner der Trägerebenen einer Seitenflächen.

Wenn P auf keiner Trägerebene einer Seitenflächen liegt, dann auch auf keiner der Trägergeraden der Kanten, insbesondere ist $P \notin g$ für alle $g \in$ {(AB), (AC), (AD), ..., (CD)}. Zu jedem P und zu jedem g gibt also genau eine Ebene, die P und g enthält; sie sei mit $E_{P,g}$ bezeichnet. Wir unterscheiden 2 Fälle:

Fall 2.1. Es gibt ein Paar Trägergeraden von windschiefen Kanten g und h so, dass $E_{P,g}$ nicht parallel zu h und $E_{P,h}$ nicht parallel zu g ist.
Dann ist $P \in L(L(T))$:

Nachweis: O.B.d.A. sei g = (AB) und h = (CD). Nach der Voraussetzung der Fallunterscheidung ist die Ebene $E_{P,(AB)}$ nicht parallel zu (CD), ferner sind (AB) und (CD) windschief; also haben (CD) und $E_{P,(AB)}$ genau einen Punkt gemeinsam, diesen nennen wir S. Es ist $S \in$ (CD), $P \notin$ (CD), also $P \neq S$, damit ist die Gerade (PS) eindeutig definiert. Sie liegt in $E_{P,(CD)}$; ferner sind (PS) und (AB) nicht parallel, weil andernfalls auch $E_{P;(CD)} \| (AB)$ im Widerspruch zur Fallvoraussetzung wäre. Also haben (PS) und (AB) einen Schnittpunkt, diesen nennen wir R. Es ist also $P \in$ (RS), $R \neq S$ und $R, S \in L(T)$; mithin $P \in L(L(T))$.

Fall 2.2. Für jedes Paar windschiefer Kanten g und h ist $E_{P,g} \| (h)$ oder $E_{P,h} \| (g)$ (und zur Erinnerung: gleichzeitig liegt P in keiner Trägerebene einer Seite).
Dann gibt es kein Paar verschiedener Punkte (R;S) und kein Paar verschiedener Trägergeraden von Kanten (g,h) mit $R \in g$ und $S \in h$ und $P \in$ (RS), mithin ist also $P \notin L(L(T))$:

Nachweis: Da P nicht in einer Trägerebene einer Seite liegt, gibt es kein Paar von sich schneidenden Trägergeraden (g,h) mit der verlangten Eigenschaft.

Für windschiefe Paare (g,h) führen wir den Nachweis zunächst nur für g = (AB) und h = (CD); für die anderen Paare von windschiefen Kanten läuft er analog: Da $P \notin$ (AB), liegt jede Gerade (PR) mit $R \in$ (AB) vollständig in $E_{P,AB}$, ferner haben (AB) und (CD) keine gemeinsamen Punkte. Ist nun $E_{P,AB} \| (CD)$, so haben $E_{P,AB}$ und (CD) keine gemeinsamen Punkte. Insbesondere hat für kein $R \in (AB) \subset E_{P,AB}$ die Gerade (PR) mit (CD) einen gemeinsamen Punkt. Mit analoger Begründung folgt aus $E_{P,CD} \| (AB)$, dass keine der Geraden (PS) mit $S \in$ (CD) mit der Gerade (AB) einen gemeinsamen Punkt besitzt.

Damit sind alle Punkte des Raumes mit Ausnahme derer, die die Bedingung des Falles 2.2 erfüllen, in L(L(T)). Um diese Punktemenge einfacher zu beschreiben, beschreiben wir zunächst die Ebene $E_{P,g}$ mit $E_{P,g} \| h$: Es ist ein Ebene, die die Kante g enthält und parallel zur gegenüberliegenden Kante h ist; diese ist übrigens parallel zur Ebene $E_{P,h}$ mit $E_{P,h} \| g$. Wenn wir dies mit allen Paaren von windschiefen Kanten durchführen, erhalten wir 3 Paare von untereinander parallelen Ebenen.

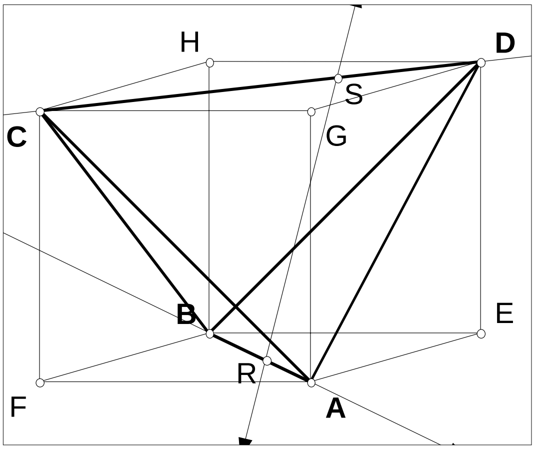
Punkte, die die Bedingung "$E_{P,g} \| (h)$ oder $E_{P,h} \| (g)$ für alle Paare windschiefer Kanten g und h" erfüllen, erhalten wir, indem wir aus jedem Ebenenpaar eine Ebene auswählen und diese drei gewählten Ebenen zum Schnitt bringen. Diese Auswahl können wir auf $2^3 = 8$ Arten durchführen; die Schnittmenge besteht aus 8 Punkten: den 4 Ecken des Tetraeders (diese erfüllen nicht die Bedingung, dass sie nicht auf den Trägerebenen der Seiten liegen dürfen) sowie den 4 in der Antwort beschriebenen Punkten S_{ABC}, S_{ABD}, S_{ACD} und S_{BCD}.

2. Beweis (mit Bezug zur Variante 2 der Ergebnisformulierung): Für unsere Betrachtung legen wir um das Tetraeder so einen Würfel, dass die Kanten des Tetraeders mit den Diagonalen von 4 der Seitenflächen des Würfels zusammenfallen; die Ecken des Würfels seien so bezeichnet, dass AB Diagonale der Grundfläche AEBF und CD Diagonale der Deckfläche GDHC ist (vgl. Figur).

Mit $g_{S,AB}$ sei die Gerade bezeichnet, die S enthält und die parallel zu (AB) ist;
mit $g^*_{S,AB}$ sei die Punktmenge bezeichnet, die entsteht, wenn man aus $g_{S,AB}$ den Punkt S entfernt.
Mit $E^*_{S,AB}$ sei die Punktmenge bezeichnet, die entsteht, wenn man aus der Ebene $E_{S,AB}$ die Menge der Punkte von $g^*_{S,AB}$ entfernt. (Man beachte, dass $S \in E^*_{S,AB}$!) Mit $E_{AB,CD}$ bezeichnen wir diejenige Ebene, die (AB) enthält und parallel zu (CD) ist; es sei noch bemerkt, dass für windschiefe Geraden (AB) und (CD) diese Definition eindeutig ist.

Schließlich sei mit $E^*_{AB,CD}$ die Punktmenge bezeichnet, die entsteht, wenn man aus $E_{AB,CD}$ die Menge der Punkte von (AB) entfernt.
Zur späteren Verwendung stellen wir fest, dass $E^*_{AB,CD}$ identisch ist mit der Trägerebene der Würfelgrundfläche AEBF, aus der die Gerade (AB) entfernt wurde.

In einer Vorbetrachtung untersuchen wir die Menge von Punkten, die auf einer Geraden (RS) mit R∈(AB) und S∈(CD) liegen. Hierzu wählen wir einen beliebigen, zunächst festgehaltenen Punkt S∈(CD) und bewegen einen weiteren Punkt R∈(AB).



Wenn R alle möglichen Lagen auf (AB) einnimmt, nimmt jede Gerade (RS) eine Lage in der Ebene $E_{S,AB}$ ein. Aber nicht jeder Punkt dieser Ebene wird dabei erreicht: Zu jedem von S verschiedenen Punkt P in der Ebene $E_{S,AB}$ gibt es genau eine Gerade in $E_{S,AB}$, die P und S enthält. P liegt genau dann nicht auf einer Geraden (RS) in $E_{S,AB}$, wenn (PS) parallel zu (AB) ist. Bei vorgegebenem S∈(CD) besteht also die Menge aller Punkte auf Geraden (RS) mit R∈(AB) aus $E^*_{S,AB}$.

Nun nehme S alle möglichen Lagen auf (CD) ein. Dann nimmt jedes $E^*_{S,AB}$ eine Lage im dreidimensionalen Raum ein. Nicht jeder Punkt des Raumes wird dabei erreicht: Zu jedem nicht auf (AB) liegenden Punkt P im Raum gibt es genau eine Ebene E im Raum, die P und (AB) enthält.

P liegt genau dann nicht in einem $E^*_{S,AB}$, wenn

entweder diese Ebene E keinen Punkt mit (CD) gemeinsam hat, dies ist genau dann der Fall, wenn P in $E^*_{AB,CD}$ liegt,

oder wenn $P \in g^*_{S,AB}$ (übrigens ist bei vorgegebenem $P \notin E_{AB,CD}$ der Punkt S eindeutig bestimmt); dies ist genau dann der Fall, wenn $P \in E^*_{CD,AB}$.

Zwischenergebnis aus dieser Vorbetrachtung: Die Menge aller Punkte auf allen Geraden (RS) mit R∈(AB) und S∈(CD) ist identisch mit der Menge aller Punkten, die nicht in $E^*_{AB,CD}$ und nicht in $E^*_{CD,AB}$ liegen.

Nun bestimmen wir L(L(T)): Zunächst stellen wir fest, dass L(T) offensichtlich aus den Trägergeraden der Kanten besteht. Zur Konstruktion von L(L(T)) wählen wir alle möglichen Paare (R|S) von verschiedenen Punkten aus L(T) und bestimmen deren Verbindungsgeraden. Hierbei unterscheiden wir drei Fälle:

Fall1: R, S liegen auf der gleichen Trägergeraden g (dies ist möglich, da jede Trägergerade mindestens zwei Punkte enthält):

Für jede Wahl von R und S ist (RS) identisch mit g. Damit ist die Trägergerade jeder Kante in L(L(T)) enthalten, und es gibt keine weiteren Punkte in L(L(T)), die auf einer Verbindungsgeraden zweier Punkte auf der gleichen Trägergeraden liegen.

Fall 2: R, S liegen auf verschiedenen Trägergeraden g und h, die einen Schnittpunkt haben:

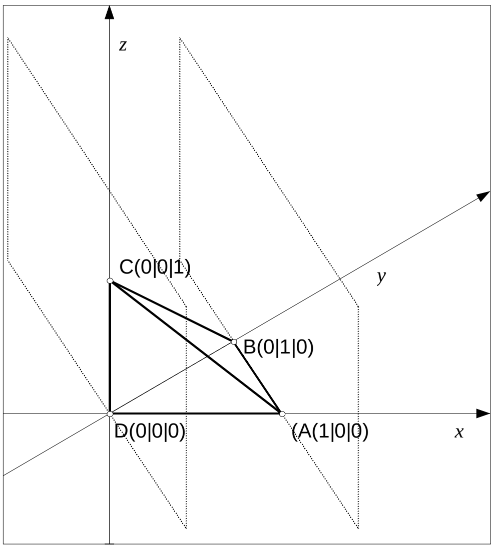
Die Verbindungsgerade zweier Punkte liegt dann immer vollständig in der durch g und h aufgespannten Ebene; dies ist in jedem Fall die Trägerebene einer Tetraederseite. Es können also nur Punkte dieser Ebene erreicht werden. Andererseits liegt jeder Punkt P in dieser Ebene auf einer Verbindungsgeraden zweier verschiedener Punkte $R \in g$ und $S \in h$: Entweder liegt P auf einer der beiden Geraden, z.B. auf g, dann wählt man als S den Schnittpunkt von g und h und als R einen beliebigen anderen Punkt von g; oder P liegt auf keiner der beiden Geraden: dann schneidet eine (sicher existierende) Gerade durch P, die weder zu g noch zu h parallel ist und nicht durch den Schnittpunkt von g und h geht, die beiden Geraden in verschiedenen Punkten $R \in g$ und $S \in h$. Die Trägerebene jeder Seite ist also in L(L(T)), und es gibt keine weiteren Punkte in L(L(T)), die auf einer Verbindungsgeraden zweier Punkte von sich schneidenden Trägergeraden liegen.

Fall 3: R, S liegen auf verschiedenen Trägergeraden g und h, die zueinander windschief sind:

Nach dem Ergebnis unserer Voruntersuchung liegt ein Punkt P genau dann auf einer Verbindungsgeraden zweier verschiedener Punkte auf g und h, wenn er in keiner der Mengen $E^*_{g,h}$ und $E^*_{h,g}$ liegt. Da es drei Paare von windschiefen Trägergeraden gibt, liegt P also genau dann auf einer Verbindungsgeraden zweier verschiedener Punkte auf zwei windschiefen Trägergeraden, wenn er auf einer der Trägergeraden der Tetraederkanten oder nicht gleichzeitig auf 3 Trägerebenen der Würfelseiten liegt. Dies ist gleichbedeutend damit, dass P nicht auf einer der Ecken des Würfels liegt, die nicht gleichzeitig Ecke des Tetraeders ist.

Diese 4 Punkte sind nicht in den Fällen 1 oder 2 erfasst, somit sind diese 4 Punkte tatsächlich nicht in L(L(T)), und es sind die einzigen Punkte mit dieser Eigenschaft.

3. Beweis(skizze, mit Koordinatenrechnung, mit Bezug auf die Variante 4 der Ergebnisformulierung): Wir legen ein affines Achsenkreuz so über das Tetraeder, dass das Tetraeder einen dreidimensionalen Simplex bildet, d.h. dass der Ursprung mit der Ecke D zusammenfällt und die Punkte A, B und C die Koordinaten (1|0|0) bzw. (0|1|0) bzw. (0|0|1) haben (vgl. Figur).



Wir beschreiben den geometrischen Sachverhalt in schulüblicher Weise mittels Vektorrechnung; wir identifizieren dabei Punkte mit ihren Ortsvektoren. Bekanntlich lässt sich die Menge der Punkte auf der Gerade (XY) dabei als Menge der (Orts-)Vektoren $\{\lambda X + (1-\lambda)Y \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ beschreiben; damit ist L(T) = L({A;B;C;D}) identisch mit der Menge aller $(x|y|z) \in \mathbb{R}^3$, die in mindestens einer der 6 Formen

$rA + (1-r)D$, $sB + (1-s)D$, $tC + (1-t)D$,
$uA + (1-u)B$, $vB + (1-v)C$ oder $wC + (1-w)D$
geschrieben werden können, oder kürzer: in mindestens einer der 6 Formen

$(r|0|0)$, $(0|s|0)$, $(0|0|t)$,
$(u|1-u|0)$, $(0|v|1-v)$ oder $(1-w|0|w)$
für irgend ein $r,s,t,u,v,w \in \mathbb{R}$.

L(L(T)) besteht dann aus genau denjenigen Punkten $(x|y|z)$ des Raumes, für die die Gleichung

$$\lambda X + (1-\lambda)Y = (x|y|z)$$

mindestens eine Lösung (λ,X,Y) hat mit $\lambda \in \mathbb{R}$, $X,Y \in L(T)$, $X \neq Y$.

Wir zeigen, dass die in den folgenden Fällen angegebenen $(x|y|z)$ in L(L(T)) liegen (dabei benützen wir, dass die Koordinaten der Punkte aus L(T) symmetrisch in den Variablen x, y, z sind):

Fall1: Mindestens zwei der Koordinaten von $(x|y|z)$ haben den Wert 0;
d.h. o.B.d.A. sei $y = z = 0$.

Fall 2: Genau eine der Koordinaten von $(x|y|z)$ hat den Wert 0;
d.h. o.B.d.A. sei $z = 0$.

Fall 3: Keine der Koordinaten von $(x|y|z)$ hat den Wert 0 und für mindestens ein Paar von Koordinaten hat deren Summe weder den Wert 0 noch den Wert 1;
d.h. o.B.d.A. sei $x + y \neq 1$ und $x + y = 0$.

Zu Fall 1: Einfaches Nachrechnen zeigt, dass (λ,X,Y) mit $\lambda = x$, $X = (r|0|0)$ mit $r = 1$, $Y = (0|s|0))$ mit $s = 0$ eine Lösung von $\lambda X + (1-\lambda)Y = (x|0|0)$ ist; wie auch in den folgenden Fällen ist offensichtlich $X,Y \in L(T)$ und $X \neq Y$.

zu Fall 2: Falls $x \neq 1$, ist (λ,X,Y) mit $\lambda = x$, X = (r|0|0) mit $r = 1$, Y = (0|s|0)) mit $s = \frac{y}{1-\lambda}$ (wegen $\lambda = x \neq 1$ ist $(1-\lambda) \neq 0$) eine Lösung von λX + (1–λ)Y = (x|y|0).

falls $x = 1$, ist $\lambda = 2x$, X = (r|0|0) mit $r = 0{,}5$) und Y = (0|s|0)) mit $s = \frac{y}{1-\lambda}$ eineLösung.

zu Fall 3: Einfaches Nachrechnen im Kopf bestätigt, dass (λ,X,Y) mit $\lambda = x + y$, X = (u|1–u|0) mit $u = \frac{x}{x+y}$, Y = (0|0|t)) mit $t = \frac{z}{1-(x+y)}$ (nach Voraussetzung sind die Nenner von Null verschieden!) eine Lösung von λX + (1–λ)Y = (x|y|z) ist.

Damit sind alle in den Fällen 1 bis 3 betrachteten Punkte in L(L(T)). Wir werden zeigen, dass damit nur die Punkte ($\frac{1}{2}$|$\frac{1}{2}$|$\frac{1}{2}$), (–$\frac{1}{2}$|$\frac{1}{2}$|$\frac{1}{2}$), ($\frac{1}{2}$|–$\frac{1}{2}$|$\frac{1}{2}$) und ($\frac{1}{2}$|$\frac{1}{2}$|–$\frac{1}{2}$) noch nicht betrachtet worden sind und dass diese nicht in L(L(T)) liegen (im Weiteren wird die Lösung nur noch skizziert):

Noch zu betrachten sind also die (x|y|z), deren Koordinaten alle von 0 verschieden sind und für die das folgende Gleichungssystem erfüllt ist:

	[(Ia)	$x + y = 0$	oder	(Ib)	$x + y = 1$]
und	[(IIa)	$y + z = 0$	oder	(IIb)	$y + z = 1$]
und	[(IIIa)	$x + z = 0$	oder	(IIIb)	$x + z = 1$]

Lösungen erhält man, indem man z.B. (I)+(II)–(III) bildet; dann bleibt auf der linken Seiten $2y$ übrig, auf der rechten je nach Auswahl von (a) bzw. (b) eine Zahl aus {–1, 0, 1, 2}.

Das System bestehend aus drei (a)–Gleichungen führt zu (x|y|z) = (0|0|0), dies scheidet aber bei Berücksichtigung der weiteren Bedingungen aus.

Das System bestehend aus zwei (a)–Gleichungen und eine (b)–Gleichung führt zu (x|y|z) = (–$\frac{1}{2}$|$\frac{1}{2}$|$\frac{1}{2}$) oder (x|y|z) = ($\frac{1}{2}$|–$\frac{1}{2}$|$\frac{1}{2}$) oder (x|y|z) = ($\frac{1}{2}$|$\frac{1}{2}$|–$\frac{1}{2}$).

Das System bestehend aus einer (a)–Gleichung und zwei (b)–Gleichungen führt zu (x|y|z) = (1|0|0) oder (x|y|z) = (0|1|0) oder (x|y|z) = (0|0|1), diese scheiden ebenfalls aus.

Schließlich führt das System bestehend aus drei (b)–Gleichungen zu (x|y|z) = ($\frac{1}{2}$|$\frac{1}{2}$|$\frac{1}{2}$).

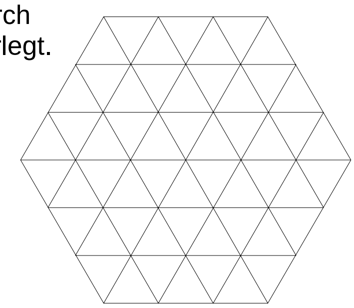
Nun ist zu zeigen, dass es für alle möglichen Kombinationen von Darstellungsweisen der Punkten X und Y keine Lösung der entsprechenden Gleichung gibt. Es gibt 21 mögliche Kombinationen, unter Ausnutzung von Symmetrien kann man diese Zahl reduzieren. Wir stellen wir hier nur die Untersuchung des schwierigsten Falles X von der Form (u|1–u|0), Y von der Form (0|0|t) vor:

λX + (1–λ)Y = (x|y|z) = λ(u|1–u|0) + (1–λ)(0|0|t) bzw.

(I) $\lambda u = x$
(II) $\lambda(1-u) = y$
(III) $(1-\lambda)t = z$.

Addition von (I) und (II) ergibt die für die Existenz einer Lösung notwendige Bedingung $\lambda = x + y$. Ist nun $x + y = \lambda = 0$, so folgt aus (I), (II) und (III)), dass (λ,u,t) nur dann Lösung sein kann, wenn zusätzlich $x = 0$, $y = 0$ und $t = z$ ist; ist nun $x + y = \lambda = 1$, so folgt aus (III), dass (x|y|z) nur dann Lösung sein kann, wenn zusätzlich $z = 0$ ist. Insbesondere gibt es keine Lösung zu (x|y|z) = (±$\frac{1}{2}$|±$\frac{1}{2}$|±$\frac{1}{2}$).

Aufgabe 4: Ein regelmäßiges Sechseck sei, wie im Bild dargestellt, durch Parallelen zu seinen Seiten in 54 kongruente gleichseitige Dreiecke zerlegt. In der entstehenden Figur gibt es dann genau 37 Punkte, die Ecken wenigstens eines der Dreiecke sind. Diese Punkte werden irgendwie von 1 bis 37 nummeriert.



Ein Dreieck heiße *uhrig*, wenn man von der Ecke mit der kleinsten Nummer im Uhrzeigersinn laufend zuerst zu der Ecke mit der mittleren Nummer und dann zu der Ecke mit der höchsten Nummer gelangt.

Man beweise, dass mindestens 19 der 54 Dreiecke uhrig sind.

1. Beweis: Einfaches Nachzählen ergibt, dass die Anzahl der Dreiecksseiten in der ganzen Figur $3\cdot(3+4+5+6+5+4+3) = 90$ beträgt; davon liegen 18 Seiten (wir nennen sie *äußere* Seiten) auf den Seiten des Sechsecks, diese sind Seiten in genau einem Dreieck; die restlichen 72 Seiten (wir nennen sie *innere* Seiten) sind Seiten von genau zwei Dreiecken.

Wir betrachten alle Paare (D,k), wobei D eines dieser 54 Dreiecke und k eine der 3 Seiten dieses Dreiecks D bezeichnet. Jedes Dreieck D kommt in genau drei Paaren (D,k_i) vor; jede innere Seite k kommt in genau zwei Paaren (D_i,k) vor, jede äußere Seite k kommt in genau einem Paar (D,k) vor. (Insgesamt gibt es $54\cdot 3 = 72\cdot 2 + 18 = 162$ solcher Paare.)

Jedem Paar (D,k) weisen wir nun genau eine der Eigenschaften *drehrichtig* oder *drehfalsch* nach folgender Prozedur zu: Ein Läufer bewegt sich auf der Seite k des Dreiecks D von der Ecke mit der niederen Nummer zu der Ecke mit der höheren Nummer (da die Nummern an allen Ecken verschieden sind, ist die Laufrichtung eindeutig festgelegt); das Paar (D,k) habe dann die Eigenschaft drehrichtig, wenn sich ein Beobachter im Innern des Dreiecks D dabei im Uhrzeigersinn bewegt, sonst habe es die Eigenschaft drehfalsch.

Ein Dreieck ist offensichtlich genau dann uhrig, wenn es in zwei drehrichtigen Paaren vorkommt.

Nun leiten wir einige Aussagen über die Anzahl von drehrichtigen Paaren her:

(A) Jede der 72 inneren Seiten ist Seite in genau 2 Paaren (D_1,k) und (D_2,k). Offensichtlich ist (D_1,k) genau dann drehrichtig, wenn (D_2,k) drehfalsch ist, und umgekehrt. Von den 144 Paaren mit inneren Seiten sind also genau 72 drehrichtig.

(B) Nun betrachten wir von den 18 äußeren Seiten diejenigen beiden, die von der Ecke (ebenfalls auf dem Umfang des Sechsecks) mit der niedrigsten Nummer ausgehen. Ein Beobachter im Innern des Sechsecks dreht sich dann – unabhängig von seiner Position innerhalb des Sechsecks – beim Beobachten der oben beschriebenen Läufer bei der einen Seite im Uhrzeigersinn, beim der anderen gegen den Uhrzeigersinn. Dies gilt insbesondere, wenn er sich in einem der Dreiecke aufhält, die mit der betrachteten Kante ein Paar bilden. Also ist von den 18 Paaren, die eine äußere Seite enthalten, mindestens eines drehrichtig (und da mindestens eines drehfalsch, sind höchstens 17 drehrichtig).

(C) Es gibt also mindestens $72 + 1 = 73$ (und höchstens $72 + 17 = 89$) drehrichtige Paare.

Nun betrachten wir in einem Dreieck D die beiden Seiten k_1 und k_2, die von der Ecke mit der niedrigsten Nummer ausgehen. Mit ähnlicher Argumentation wie oben schließen wir, dass von den beiden Paaren (D,k_1) und (D,k_2) genau eines drehrichtig und genau eines drehfalsch ist. Jedes der 54 Dreiecke kommt also in mindestens einem drehrichtigen Paar und in mindestens einem drehfalschen Paar vor; hieraus folgt, dass jedes Dreieck in mindestens einem, evtl. in einem zweiten, aber niemals in drei drehrichtigen Paaren vorkommen.

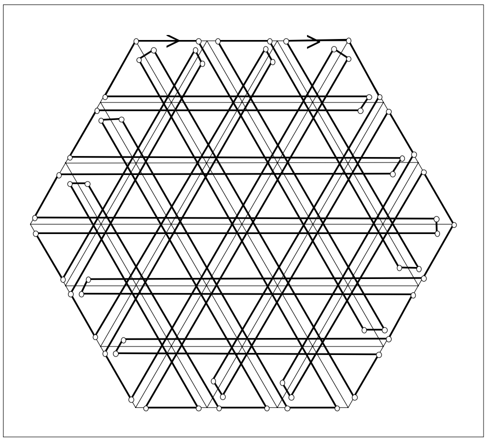
Sei u die Anzahl von uhrigen Dreiecken, also die Anzahl von Dreiecken, die in genau zwei drehrichtigen Paaren vorkommen. Nach oben Gesagtem gilt:

Anzahl der drehrichtigen Paare $= 54 + u \geq 73$; hieraus folgt sofort $u \geq 19$; das war zu zeigen.

2. Beweis: Mit u sei die Anzahl der uhrigen Dreiecke, mit n die Anzahl der nicht–uhrigen Dreiecke bezeichnet; es ist dann $u + n = 54$. Die 18 Dreiecksseiten auf dem Rand des Sechsecks nennen wir *äußere* Seiten, die restlichen Dreiecksseiten im Innern des Sechsecks nennen wir *innere* Seiten.

Auf diesen Seiten gibt es einen Weg (vgl. Figur) mit folgenden Eigenschaften:

- Anfangs– und Endpunkt ist der gleiche Eckpunkt.
- Jede äußere Seite wird genau einmal durchlaufen, und zwar – vom Inneren des Sechsecks und auch der anliegenden Dreiecke aus gesehen – immer im Uhrzeigersinn.
- Jede innere Seite wird genau zwei Mal durchlaufen, und zwar in jede Richtung genau ein Mal.



Kristin läuft diesen Weg ab. Da jede innere Seite zu genau zwei Dreiecken gehört und jede äußere Seite zu genau einem Dreieck, können wir die von Kristin gewanderten Teilstrecken auf den Seiten so eindeutig den Dreiecken zuordnen, dass jede Dreieckseite – vom Innern des betr. Dreiecks gesehen – genau einmal im Uhrzeigersinn durchwandert worden ist.

Ihre Laune kann sie durch eine ganze Zahl ausdrücken: Zu Beginn hat sie die Laune 0; jedes Mal, wenn Sie von einer Ecke mit einer niedrigeren Nummer zu einer Ecke mit höherer Nummer kommt, nimmt ihre Laune um 1 zu, im umgekehrten Fall nimmt ihre Laune um 1 ab.

Beim Umrunden eines Dreiecks nimmt nach dem Passieren der Ecke mit der niedrigsten Nummer die Laune um 1 zu, bei Erreichen dieser Ecke nimmt sie wieder um 1 ab; damit ändert sich die Laune bei der Umrundung eines Dreiecks insgesamt um genau 1. Offensichtlich ist ein Dreieck genau dann uhrig, wenn Kristins Laune beim Umrunden dieses Dreiecks im Uhrzeigersinn um 1 zunimmt; andernfalls nimmt ihre Laune um genau 1 ab.

Da sie am Ende der Wanderung jedes Dreieck insgesamt genau einmal im Uhrzeigersinn umrundet hat, hat ihre Laune am Ende der Wanderung den Wert der Differenz $u - n$. Dabei ist es unerheblich, dass diese Dreiecksumrundung nicht in aufeinander folgenden Teilstrecken erfolgt.

Andererseits hat sie jede innere Seite in beide Richtungen je genau einmal durchwandert, so dass die Summe aller Launeänderungen auf inneren Seiten den Wert 0 hat. Um ihre Laune am Schluss zu berechnen, genügt es also, die Launeänderungen beim Wandern auf den äußeren Seiten zu bestimmen: Da es 18 äußere Seiten gibt, nach dem Passieren der Ecke mit der niedrigsten Nummer die Laune um eins zunimmt, beim Erreichen dieser Ecke wieder um 1 abnimmt, gilt:

$$-16 = 1 - 17\cdot(-1) \leq \text{Laune am Schluss} = u - n \leq 17\cdot 1 - 1 = 16.$$

In diese Ungleichung setzen wir die Bedingung $u + n = 54$, also $n = 54 - u$ ein und erhalten so

$-16 \leq u - (54 - u) \leq 16$, also $38 \leq 2u \leq 70$ oder $19 \leq u$; dies war zu zeigen.

Bemerkungen: Die Abschätzung ist scharf, d.h. es gibt Nummerierungen, die genau 19 uhrige Dreiecke erzeugen.