Bundeswettbewerb Mathematik
Wissenschaftszentrum • Postfach 20 14 48 • 53144 Bonn
Fon: 0228 - 9 59 15-20 • Fax: 0228 - 9 59 15-29
e-mail: info@bundeswettbewerb-mathematik.de
www.bundeswettbewerb-mathematik.de

Korrekturkommission • Karl Fegert

Aufgaben und Lösungen

1. Runde 2008

Über Kommentare und Ergänzungen zu diesen Lösungsbeispielen freuen wir uns!

Anschrift oder Email–Adresse s.o.

Stand: Mai 2008

Aufgabe 1: Fritz hat mit Streichhölzern gleicher Länge die Seiten eines Parallelogramms gelegt, dessen Ecken nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Er stellt fest, dass in die Diagonalen genau 7 bzw. 9 Streichhölzer passen.

Wie viele Streichhölzer bilden den Umfang des Parallelogramms?

Anmerkung: Die Richtigkeit des Resultates ist zu beweisen.

Antwort: In jedem Fall bilden 22 Streichhölzer den Umfang des Parallelogramms.

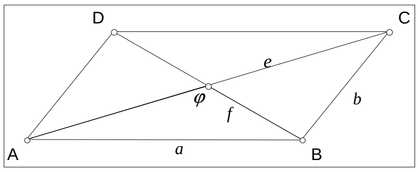
Gemeinsame Bezeichnungen: Die Längen zweier gegenüberliegender Seiten des Parallelogramms sind bekanntlich gleich, sie seien mit a bzw. b bezeichnet. Die Längen der Diagonalen seien wie üblich mit e und f bezeichnet.

1. Beweis (mit Parallelogrammgleichung): Wir verwenden den aus dem Schulunterricht bekannten Hilfssatz

HS: In jedem Parallelogramm, dessen Seiten die Längen a und b und dessen Diagonalen die Längen e und f haben, gilt die Beziehung $2a^2 + 2b^2 = e^2 + f^2$.

In dem in der Aufgabenstellung vorgegebenen Parallelogramm gilt zwischen den Zahlen a und b also notwendigerweise die Beziehung

$$2a^2 + 2b^2 = 7^2 + 9^2$$
$$\Leftrightarrow \quad 2(a^2 + b^2) = 130$$
$$\Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 = 65,$$



zusätzlich müssen nach Aufgabenstellung die Zahlen a und b positiv und ganz sein.

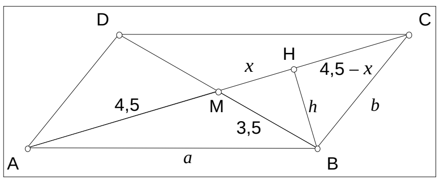
Wir suchen also nach der Darstellung von 65 als Summe der Quadrate zweier positiver ganzer Zahlen a und b. Insbesondere muss $a^2 < 65$ sein, also kann a höchstens die Werte 1, 2, ..., 8 annehmen.

Einfaches Ausprobieren aller Möglichkeiten ($65 = 1^2 + 8^2 = 2^2 + 61 = 3^2 + 56 = 4^2 + 7^2 = 5^2 + 40 = 6^2 + 29 = 7^2 + 4^2 = 8^2 + 1^2$) ergibt, dass – weil 61, 56, 40 und 29 keine Quadratzahlen sind – nur die Paare $(a,b) \in \{(1,8), (4,7), (7,4), (8,1)\}$ die Gleichung mit den Randbedingungen erfüllen. Zum Paar (1,8) und (8,1) gehört das nach Aufgabenstellung nicht zugelassene Parallelogramm, bei dem die Ecken auf einer Geraden liegen. Als einzige Möglichkeit bleiben die untereinander kongruenten Parallelogramme, die zu den Paaren (4,7) und (7,4) gehören; beide haben den Umfang $2(4 + 7) = 2(7 + 4) = 22$ [Streichhölzer].

Variante 1 (mit Satz des Pythagoras): Wir bezeichnen die Ecken des Parallelogramms so mit A, B, C und D, dass die Diagonale AC die Länge 9, die Diagonale BD die Länge 7 hat. Bekanntlich halbieren sich im Parallelogramm die Diagonalen gegenseitig; der Mittelpunkt dieser Diagonalen sei mit M bezeichnet.

Der Fußpunkt des Lotes von B auf die Diagonale AC sei mit H bezeichnet, die Länge des Lotes BH mit h, die Länge von MH mit x. O.B.d.A. liege M zwischen A und H; wir berücksichtigen, dass H außerhalb es Parallelogramms liegen kann. Dann hat die Strecke AH die Länge $4{,}5 + x$, die Strecke HC die Länge $|4{,}5 - x|$. Nach Pythagoras gilt dann in den Teildreiecken ΔMHB, ΔCHB, ΔAHB

$$x^2 + h^2 = 3{,}5^2$$
$$(|4{,}5 - x|)^2 + h^2 = b^2$$
$$(4{,}5 + x)^2 + h^2 = a^2$$



Addition der beiden unteren Gleichungen ergibt
$2 \cdot [(4{,}5)^2 + x^2 + h^2] = a^2 + b^2$; hierin setzen wir die erste Gleichung ein und erhalten so als notwendige Bedingung $2 \cdot [(4{,}5)^2 + 3{,}5^2] = a^2 + b^2$, oder äquivalent $65 = a^2 + b^2$.

Von hier schließen wir wie im 1. Beweis.

Variante 2 (mit cos–Satz): Sei der Winkel zwischen den Diagonalen, der der Seite mit der Länge a gegenüberliegt, mit φ bezeichnet (vgl. Figur im Beweis 1). Dann gilt nach cos–Satz

$$a^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{e}{2}\cdot\frac{f}{2}\cdot\cos(\varphi) \quad \text{und}$$

$$b^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{e}{2}\cdot\frac{f}{2}\cdot\cos(180°-\varphi);$$

und hieraus folgt unter Berücksichtigung der Vorgaben $e = 7$ und $f = 9$ sowie der bekannten Identität $\cos(\varphi) = -\cos(180°-\varphi)$

$$a^2 + b^2 = \left(\frac{49}{4}\right) + \left(\frac{81}{4}\right) - 2\cdot\frac{e}{2}\cdot\frac{f}{2}\cdot\cos(\varphi) + \left(\frac{49}{4}\right) + \left(\frac{81}{4}\right) + 2\cdot\frac{e}{2}\cdot\frac{f}{2}\cdot\cos(\varphi) = 2\cdot\left(\frac{130}{4}\right) = 65.$$

Von hier schließen wir wie im 1. Beweis.

3. Beweis (reiner Existenzbeweis): Wir kombinieren die Dreiecksungleichung, die Cauchy–-Schwarzsche Ungleichung und die Parallelogrammgleichung:

Die längere Diagonale des Parallelogramms bildet mit zwei Seiten der Länge a bzw. b ein Dreieck. Nach Dreiecksungleichung ist also $9 < a + b$ oder äquivalent $9^2 < (a+b)^2$. (1)

Aus $0 \le (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ folgt sofort $2ab \le a^2 + b^2$. (2)

Nach Parallelogrammsatz ist $2(a^2 + b^2) = 7^2 + 9^2 = 49 + 81 = 130$. (3)

Dies setzen wir zusammen zu

$$9^2 < (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \le a^2 + (a^2 + b^2) + b^2 = 2(a^2 + b^2) = 130 < 12^2.$$

Da a und b beide positiv ganzzahlig sind, ist auch $(a + b)$ positiv ganzzahlig, damit ist notwendigerweise $a + b = 10$ oder $a + b = 11$.
Wäre $a + b = 10$, so ergäbe sich $4ab = 2(a+b)^2 - 2(a^2 + b^2) = 2\cdot 10^2 - 130 = 70$ bzw. $2ab = 35$, was im Widerspruch zur Ganzzahligkeit von a und b steht. Es ist also notwendigerweise $(a + b) = 11$; der Gesamtumfang des Parallelogramms also $2(a + b) = 22$.

Hinweis: Es wurde nicht explizit nachgewiesen, dass ein solches Parallelogramm tatsächlich existiert. Da alle anderen Werte außer 22 ausgeschlossen wurden und die Konstruktion in der Aufgabenstellung als existent vorausgesetzt wird, ist dies auch nicht notwendig.

Häufige Fehler: Etliche Teilnehmer begannen mit einer sauberen Zeichnung: Die Diagonale der Länge 9 legt zwei Eckpunkte des Parallelogramms fest, der Kreis um deren Mittelpunkt mit Radius 3,5 ist der Ort für die anderen beiden Eckpunkte. Nun zeichnet man um die Endpunkte der langen Diagonalen Kreise mit ganzzahligen Radien als weiteren Ort für die zwei anderen Eckpunkte und sucht nach gemeinsamen Punkten von drei Kreisen. Der Zeichnung kann man nun entnehmen, dass wohl nur die Kreise mit den Radien 4 bzw. 7 in Frage kommen, d.h. dass die Seiten des betrachteten Trapezes die Längen 4 bzw. 7 haben. Diese Vorgehensweise ersetzt nicht den mathematischen Beweis, dass die betrachteten Kreise sich tatsächlich in einem Punkt schneiden, ebenso wenig den Beweis, dass sich die übrigen Kreise nicht in einem Punkt schneiden.

Manche Teilnehmer berechneten mit dem Taschenrechner nach dem cos-Satz die Seitenlängen möglicher Parallelogramme, die Diagonalen der Länge 7 bzw. 9 besitzen und bei denen eine Seite eine ganzzahlige Länge besitzt. Wenn die eine Seite des Parallelogramms die Länge 4 (bzw. 7) besitzt, so liefert der TR, dass die anderen Seite die Länge 7 (bzw. 4) haben. Diese Vorgehensweise berücksichtigt nicht die Tatsache, dass bei der Berechnung von cos-Werten der TR i.A. nur Näherungswerte liefert. Es fehlt also auch hier ein exakter Beweis, dass die zweite Seite wirklich eine ganzzahlige Länge hat.

Aufgabe 2: Man stelle die Zahl 2008 so als Summe natürlicher Zahlen dar, dass die Addition der Kehrwerte dieser Zahlen den Wert 1 ergibt.

Vorbemerkung: Die Aufgabe ist vollständig und richtig gelöst, wenn Zahlen $a_1, a_2, ..., a_m$ angegeben sind und die Rechnungen $\sum_{i=1}^{m} a_i = 2008$ sowie $\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{a_i} = 1$ so vorgeführt werden, dass die Richtigkeit des Rechenergebnisses ohne weitere Hilfsmittel bestätigt werden kann. Damit ist eine mögliche Lösung recht kurz:

1. Lösung (durch Probieren): Es ist

$$2008 = 1600 + 400 + 8 = 80 \cdot 20 + 40 \cdot 10 + 4 \cdot 2 = \underbrace{80+80+...+80}_{20-mal} + \underbrace{40+40+...+40}_{10-mal} + \underbrace{4+4}_{2-mal};$$

also ist 2008 die Summe von 20 Summanden mit dem Wert 80, 10 Summanden mit dem Wert 40 und 2 Summanden mit dem Wert 4.

Die Addition der Kehrwerte dieser Zahlen ergibt tatsächlich $\frac{1}{80}\cdot 20 + \frac{1}{40}\cdot 10 + \frac{1}{4}\cdot 2 = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2} = 1.$

Obwohl eine Herleitung der Summen nicht verlangt wurde, stellen wir hier einige Möglichkeiten dar. Im Gegensatz zu manchen anderen Wettbewerbsaufgaben kommt man hier sowohl mit sinnvollem Probieren als auch mit rein konstruktiven Vorgehensweisen zum Ziel.

Gemeinsame Bezeichnungen:

Def.: Ein m–Tupel positiver ganzer Zahlen A = $(a_1, a_2, ..., a_m)$ heiße *k–Zerlegung* genau dann, wenn $\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{a_i} = 1$; wir nennen A und auch $\sum_{i=1}^{m} a_i$ eine *k–Zerlegung von* $s := \sum_{i=1}^{m} a_i$.

Die positive ganze Zahl s heiße *k–zerlegbar* genau dann, wenn es eine k–Zerlegung von s gibt.

Hilfssatz 1: Die Zahl s sei k–zerlegbar durch die k–Zerlegung $(a_1, a_2, ..., a_m)$.
Dann sind auch $2s + 2$ und $2s + 9$ k–zerlegbar,
nämlich durch die k–Zerlegungen $(2a_1, 2a_2, ..., 2a_m, 2)$ bzw. $(2a_1, 2a_2, ..., 2a_m, 6, 3)$.

Beweis: Einfaches Nachrechnen ergibt die gewünschten Werte:

$$2s + 2 = \sum_{i=1}^{m}(2a_i) + 2 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{2a_i}\right)+\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{a_i}\right)+\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2} = 1;$$

$$2s + 9 = \sum_{i=1}^{m}(2a_i) + 6 + 3 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{2a_i}\right)+\frac{1}{6}+\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{a_i}\right)+\frac{1+2}{6} = \frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2} = 1.$$

Eine k–Zerlegung bleibt also eine k–Zerlegung, wenn man jeden ihrer Summanden durch das Doppelte ersetzt und dann noch den Summanden 2 oder die beiden Summanden 3 und 6 ergänzt.

Korollar: Die Zahl N ist k–zerlegbar, wenn $f(N)$ k–zerlegbar ist; dabei sei

$$f(N) := \begin{cases} \frac{N-2}{2} & \text{falls } N \text{ gerade,} \\ \frac{N-9}{2} & \text{falls } N \text{ ungerade;} \end{cases}$$

und wenn $f(N)$ die k–Zerlegung $(a_1, a_2, ..., a_m)$ hat,
dann hat N die k–Zerlegung $(2a_1, 2a_2, ..., 2a_m, 2)$ bzw. $(2a_1, 2a_2, ..., 2a_m, 6, 3)$.

Offensichtlich ist $f(N)$ für $N > 9$ stets eine positive ganze Zahl. Dies ermöglicht uns die Konstruktion einer Zerlegung von 2008 fast ohne Probieren: Einfaches Nachrechnen im Kopf bestätigt

$f(2008) = 1003$, $f(1003) = 497$, $f(497) = 244$, $f(244) = 121$, $f(121) = 56$, $f(56) = 27$, $f(27) = 9$.

Da jede Quadratzahl n^2 die aus n Summanden bestehende k–Zerlegung $(n, n, ..., n)$ hat, hat 9 die k–Zerlegung (3, 3, 3). Durch Rückwärtsrechnen erhalten wir damit folgende k–Zerlegungen (ist in der angegebenen Zerlegung einer der angegebenen Summanden ein Produkt $\boldsymbol{s}\cdot m$, so sei dies eine Kurzschreibweise für m Summanden mit dem Wert s; wir schreiben den Summanden dann zusätzlich fett):

$$
\begin{aligned}
9 &= 3+3+3 &&= \mathbf{3}\cdot 3,\\
27 &= 2\cdot 9 + 9 &&= (\mathbf{2\cdot 3})\cdot 3 + 6 + 3 = \mathbf{6}\cdot 4 + 3,\\
56 &= 2\cdot 27 + 2 &&= (\mathbf{2\cdot 6})\cdot 4 + (2\cdot 3) + 2 = \mathbf{12}\cdot 4 + 6 + 2,\\
121 &= 2\cdot 56 + 9 &&= (\mathbf{2\cdot 12})\cdot 4 + (2\cdot 6) + (2\cdot 2) + 6 + 3 = \mathbf{24}\cdot 4 + 12 + 6 + 4 + 3,\\
244 &= 2\cdot 121 + 2 &&= (\mathbf{2\cdot 24})\cdot 4 + (2\cdot 12) + (2\cdot 6) + (2\cdot 4) + (2\cdot 3) + 2\\
&= \mathbf{48}\cdot 4 + 24 + 12 + 8 + 6 + 2,\\
497 &= 2\cdot 244 + 9 &&= (\mathbf{2\cdot 48})\cdot 4 + (2\cdot 24) + (2\cdot 12) + (2\cdot 8) + (2\cdot 6) + (2\cdot 2) + 6 + 3\\
& &&= \mathbf{96}\cdot 4 + 48 + 24 + 16 + 12 + 6 + 4 + 3,\\
1003 &= 2\cdot 497 + 9 &&= (\mathbf{2\cdot 96})\cdot 4+(2\cdot 48)+(2\cdot 24)+(2\cdot 16)+(2\cdot 12)+(2\cdot 6)+(2\cdot 4)+(2\cdot 3)+6+3\\
& &&= \mathbf{192}\cdot 4 + 96 + 48 + 32 + 24 + 12 + 8 + \mathbf{6}\cdot 2 + 3,\\
2008 &= 2\cdot 1003 + 2 &&= (\mathbf{2\cdot 192})\cdot 4+(2\cdot 96)+(2\cdot 48)+(2\cdot 32)+(2\cdot 24)+(2\cdot 12)+(2\cdot 8)+(\mathbf{2\cdot 6})\cdot 2+(2\cdot 3)+2\\
& &&= \mathbf{384}\cdot 4 + 192 + 96 + 64 + 48 + 24 + 16 + \mathbf{12}\cdot 2 + 6 + 2.
\end{aligned}
$$

So erhalten wir die

2. Lösung: Es ist $2008 = \mathbf{384}\cdot 4 + 192 + 96 + 64 + 48 + 24 + 16 + \mathbf{12}\cdot 2 + 6 + 2$
(das Produkt $s\cdot m$ sei eine Kurzschreibweise für m Summanden mit dem Wert s). Die Addition der Kehrwerte dieser Zahlen ergibt

$$\frac{1}{384}\cdot 4+\frac{1}{192}+\frac{1}{96}+\frac{1}{64}+\frac{1}{48}+\frac{1}{24}+\frac{1}{16}+\frac{1}{12}\cdot 2+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}$$

$$= \frac{4+2+4+6+8+16+24+32\cdot 2+64+192}{384} = \frac{384}{384} = 1.$$

Bemerkungen: Für jede Zahl $N > 56$ ist $f(f(f(...(f(N))...))) \in [24,56]$ nach einer endlichen Anzahl von Iterationen. Da man für alle ganzen Zahlen im Intervall [24,56] eine k–Zerlegung angeben kann, ist jedes $N \geq 24$ k–zerlegbar. Ferner ergibt einfaches Ausprobieren für N < 24, dass alle positiven ganzen Zahlen außer 2, 3, 5, 6, 7, 8, 12, 13, 14, 15, 19, 21, 23 k–zerlegbar sind. Mit Hilfssatz 1 erhalten wir also ein konstruktives Verfahren zur Bestimmung einer k–Zerlegung von beliebigen Zahlen.

Da $121 = 11^2$, hätte man auch das Rückwärtsrechnen mit der Zerlegung $121 = \mathbf{11}\cdot 11$ beginnen können.

Hilfssatz 2: Die Zahl s sei k–zerlegbar durch die k–Zerlegung $(a_1, a_2, ..., a_m)$, ferner sei n eine positive ganze Zahl.
Dann ist auch $s^* := n\cdot(n-1+s)$ eine k–zerlegbare Zahl, nämlich durch die aus $(n-1+m)$ Elementen bestehende k–Zerlegung $(n, n, ..., n, na_1, na_2, ..., na_m)$.

Beweis: Einfaches Nachrechnen ergibt die gewünschten Werte:

$$s^* = n\cdot(n-1+s) = n(n-1) + ns = n(n-1) + \sum_{i=1}^{m}(na_i) \quad \text{und}$$

$$\frac{1}{n}(n-1)+\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{na_i} = \frac{n-1}{n}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{a_i} = \frac{n-1}{n}+\frac{1}{n}\cdot 1 = 1.$$

Korollar: Die Zahl N ist k–zerlegbar, wenn es eine positive ganze Zahl n gibt, sodass $\frac{N}{n}-(n-1)$ positiv ganz und k–zerlegbar ist;

und wenn $\frac{N}{n}-(n-1)$ die k–Zerlegung $(a_1, a_2, ..., a_m)$ hat, dann hat N die aus $n-1+m$ Zahlen bestehende k–Zerlegung $(n, n, ..., n, na_1, na_2, ..., na_m)$.

Korollar: Mit $N = n^2$ erhalten wir :
Jede Quadratzahl n^2 besitzt die aus n Summanden bestehende k–Zerlegung $(n, n, ..., n)$.

Wiederholte Anwendung führt zu einer k–Zerlegung von 2008: Es ist

2008 : 8 – 7 = 244; 244 : 4 – 3 = 58; 58 : 2 – 1 = 28; 28 : 4 – 3 = 4; 4 : 2 – 1 = 1;

da 1 die k–Zerlegung (1) besitzt, können wir hieraus der Reihe nach folgende k–Zerlegungen konstruieren (ist einer der angegebenen Summanden in der Zerlegung ein Produkt $s\cdot m$, so sei dies eine Kurzschreibweise für m Summanden mit dem Wert s):

4	=	2·(1+1)	=	2·1 + 2·1 = 2·2,
28	=	4·(3 + 4)	=	4·3 + (4·2)·2 = 4·3 + 8·2,
58	=	2·(1 + 28)	=	2·1 + (2·4)·3 + (2·8)·2 = 2·1 + 8·3 + 16·2,
244	=	4·(3 + 58)	=	4·3 + (4·2)·1 + (4·8)·3 + (4·16)·2 = 4·3 + 8·1 + 32·3 + 64·2,
2008	=	8·(7 + 244)	=	8·7 + (8·4)·3 + (8·8)·1 + (8·32)·3 + (8·64)·2
			=	**8**·7 + **32**·3 + **64**·1 + **256**·3 + **512**·2.

Wir erhalten also eine

3. Lösung: Es ist 2008 = 56 + 96 + 64 + 768 + 1024 = **8**·7 + **32**·3 + **64**·1 + **256**·3 + **512**·2 ; also die Summe aus 7 Zahlen 8, 3 Zahlen 32, einer Zahl 64, 3 Zahlen 256 und 2 Zahlen 512. Die Addition der Kehrwerte dieser Zahlen ergibt

$$\frac{1}{8}\cdot 7+\frac{1}{32}\cdot 3+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}\cdot 3+\frac{1}{512}\cdot 2 = \frac{7}{8}+\frac{6+1}{64}+\frac{6+2}{512} = \frac{7}{8}+\frac{7+1}{64} = 1.$$

Bemerkung: Dieses Verfahren führt nur bei speziellen Zahlen N zu einer k–Zerlegung. Z.B. erhielte man für für N = 2064 im ersten Schritt mit 2064 : 8 – 7 = 251 eine Zahl, für die man eine k–Zerlegung durch Probieren finden müsste.

Hilfssatz 3: Die Zahl N ist k–zerlegbar, wenn es eine positive ganze Zahl n gibt, sodass $\frac{N}{n}$ als Summe $s_1^2 + s_2^2 + ... + s_n^2$ von n positiven ganzen Quadratzahlen geschrieben werden kann.

Beweis: Nach Voraussetzung ist $\frac{N}{n} = s_1^2 + s_2^2 + ... + s_n^2$ für geeignete positive ganze s_i, also ist $N = ns_1^2 + ns_2^2 + ... + ns_n^2 = (ns_1)s_1 + (ns_2)s_2 + ... + (ns_n)s_n$ die Summe von s_1 Summanden (ns_1), s_2 Summanden ns_2, ... und s_n Summanden ns_n,

und die Summe der Kehrwerte dieser Zahlen ist $\frac{1}{ns_1}s_1+\frac{1}{ns_2}s_2+...+\frac{1}{ns_n}s_n = 1.$

Mit ein bisschen Probieren erhält man (man beachte, dass auch 1^2 als Quadratzahl zugelassen ist!)

2008 : 4 = 502 = $20^2 + 10^2 + 1^2 + 1^2$, was zur oben bereits erwähnten 1. Lösung
2008 = $(4\cdot 20)\cdot 20 + (4\cdot 10)\cdot 10 + (4\cdot 1)\cdot 1 + (4\cdot 1)\cdot 1 = 80\cdot 20 + 40\cdot 10 + 4 + 4$ führt.

Aber auch 2008 : 4 = 502 = $14^2+11^2 + 11^2 + 8^2$ führt zu einer Lösung, nämlich

4. Lösung: 2008 = $\mathbf{56}\cdot 14 + \mathbf{44}\cdot 11 + \mathbf{44}\cdot 11 + \mathbf{32}\cdot 8$, die Summe der Kehrwerte dieser Zahlen ist $\frac{1}{56}\cdot 14+\frac{1}{44}\cdot 22+\frac{1}{32}\cdot 8 = 1$.

Ein weiteres Beispiel: 2008 : 8 = 251 = $10^2 + 5^2\cdot 6 + 1^2$ führt zu 2008 = $\mathbf{80}\cdot 10 + \mathbf{40}\cdot(5\cdot 6) + 8$; die Summe der Kehrwerte dieser Zahlen ist $\frac{1}{80}\cdot 10+\frac{1}{40}\cdot 30+\frac{1}{8} = \frac{1+6+1}{8} = 1$.

Hilfssatz 4: Die Zahlen s_1 und s_2 seien k–zerlegbar durch die k–Zerlegung ($a_1, a_2, ..., a_m$) bzw. ($b_1, b_2, ..., b_n$). Dann ist auch $s_1 \cdot s_2$ eine k–zerlegbare Zahl, nämlich durch die aus $m\cdot n$ Elementen bestehende k–Zerlegung ($a_1b_1, a_1b_2, ..., a_ib_j, ...a_mb_n$)

Beweis: Es ist $\sum_{i,j}\left(a_i\cdot b_j\right) = \sum_i\left(a_i\sum_j b_j\right) = \sum_i\left(a_i s_2\right) = s_1\cdot s_2$ und

$$\sum_{i,j}\frac{1}{a_i\cdot b_j} = \sum_{i,j}\left(\frac{1}{a_i}\sum_j\frac{1}{b_j}\right) = \sum_{i,j}\left(\frac{1}{a_i}\cdot 1\right) = 1.$$

Hilfssatz 5: Die n Zahlen $s_1, s_2, ..., s_n$ sei k–zerlegbar, und zwar durch jeweils eine der n k–Zerlegungen $S_i = (s_{i1}, s_{i2}, ..., s_{ik(i)})$ ($i = 1, 2, ..., n$); ferner sei $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ eine weitere k–Zerlegung mit n Elementen.

Dann ist auch $\sum_{i=1}^{n} a_i s_i$ ein k–zerlegbare Zahl, nämlich durch $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k(i)} a_i s_{ij}\right)$.

Beweis: Es ist $\sum_{j=1}^{k(i)}\frac{1}{a_i s_{ij}} = \frac{1}{a_i}\sum_{j=1}^{k(i)}\frac{1}{s_{ij}} = \frac{1}{a_i}\cdot 1$ und damit $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k(i)}\frac{1}{a_i s_{ij}}\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\cdot 1 = 1$.

Mit diesen Hilfssätzen lassen sich mit etwas Probieren k–Zerlegungen von 2008 konstruieren, z.B.:

5. Lösung: Es sind 1 und 10 = (2+4+4) zwei k–zerlegbare Zahlen, also ist auch
2008 = $2\,(10\cdot 10\cdot 10) + 4\cdot 1 + 4\cdot 1$ k–zerlegbar.

Die Elemente der zugehörigen k–Zerlegung sind die $3\cdot 3\cdot 3+2 = 29$ einzelnen Produkte, die man beim Ausmultiplizieren von 2(2+4+4)(2+4+4)(2+4+4)+ 4 + 4 erhält, also ist

2008 = 2(2+4+4)(2+4+4)(2+4+4)+ 4 + 4 = $16 + \mathbf{32}\cdot 6 + \mathbf{64}\cdot 12 + \mathbf{128}\cdot 8 + \mathbf{4}\cdot 2$

und $\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\cdot 6+\frac{1}{64}\cdot 12+\frac{1}{128}\cdot 8+\frac{1}{4}\cdot 2 = \frac{2+6+6+2+16}{32} = 1$

Hilfssatz 6: Die Zahl s sei k–zerlegbar durch ($a_1, a_2, ..., a_m$).
Dann ist $s + 3a_j$ k–zerlegbar durch ($a_1, a_2, ...,a_{j-1}, 2a_j, 2a_j, a_{j+1}, ..., a_m,$) für alle $1 \le j \le m$.

D.h: Eine k–Zerlegung bleibt eine k–Zerlegung, wenn man einen ihrer Summanden durch zwei Summanden mit dem doppelten Wert ersetzt.

Beweis: Es ist $s + 3a_j = \sum_{i=1}^{m} a_i + (-1+2+2)\cdot a_j = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m} a_i + 2a_j + 2a_j$;

und $\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m} a_i + 2\cdot\frac{1}{2a_j} = \sum_{i=1}^{m}\frac{1}{a_i} = 1.$

Hilfssatz 7: Die Zahl $Z(m) = 3\cdot 2^m - 2$ besitzt die k–Zerlegung $(2^1, 2^2, 2^3, ..., 2^{m-1}, 2^m, 2^m)$.

Beweis: Einfaches Nachrechnen ergibt $Z(m) = 3\cdot 2^m - 2 = 2\cdot 2^m + 2^m - 2 = 2^{m+1} - 1 - 1 + 2^m$ $= \left(\sum_{i=1}^{m} 2^i\right) + 2^m$ und $\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{2^i}\right) + \frac{1}{2^m} = \left(\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{2^i}\right) - 1 + \frac{1}{2^m} = 2 - \frac{1}{2^m} - 1 + \frac{1}{2^m} = 1.$

Ausgehend von $Z(m)$ konstruieren wir mit Hilfe von HS 6 weitere Zahlen mit k–Zerlegungen: Wir streichen in der k–Zerlegung von $Z(m)$ einige der Zweierpotenzen 2^i $(1 \le i \le m)$ und ersetzen sie jeweils durch zwei doppelt so große Zweierpotenzen, also durch zwei Summanden 2^{i+1}. Wir finden so die k–Zerlegungen der Zahlen, die sich in folgender Form darstellen lassen:

$$Z(m) - \sum_{i=1}^{m}\left(j(i)\cdot 2^i\right) + 2\cdot\sum_{i=1}^{m}\left(j(i)\cdot 2^{i+1}\right) = Z(m) + 3\cdot\sum_{i=1}^{m}\left(j(i)\cdot 2^i\right) \text{ mit beliebigen } j(i) \in \{0;1\}.$$

Nun stellen wir die Zahl 2008 in dieser Form dar: Es ist $Z(9) = 1534$, also $2008 = Z(9) + 474$ $= Z(9) + 3\cdot 158$; und da 158 eine gerade Zahl ist, existiert eine Darstellung im Zweiersystem $158 = \sum_{i=1}^{m}\left(j(i)\cdot 2^i\right)$ für geeignete $j(i) \in \{0;1\}$. Konkret erhält man $158 = 128 + 16 + 8 + 4 + 2$; wir ersetzen in der k–Zerlegung von $Z(9) = 512 + 512 + 256 + 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2$ diese Summanden jeweils durch zwei doppelt so große Zahlen. Dies führt zur

6. Lösung: Es ist 2008 = **512**·2 + **256**·3 + 64 + **32**·3 + **16**·2 + **8**·2 + **4**·2; und es ist

$$\frac{1}{512}\cdot 2 + \frac{1}{256}\cdot 3 + \frac{1}{64} + \frac{1}{32}\cdot 3 + \frac{1}{16}\cdot 2 + \frac{1}{8}\cdot 2 + \frac{1}{4}\cdot 2 = \frac{1+3+4+8\cdot 3+16\cdot 2+32\cdot 2+64\cdot 2}{256} = 1.$$

Ergänzungen: Für die Anzahl m der Summanden in einer k–Zerlegung von 2008 gilt: $7 \le m \le 44$.

Beweis: Die Zahl a besitze die k–Zerlegung $a = \sum_{i=1}^{m} a_i$. Dann ist nach der Ungleichung für das arithmetische und harmonische Mittel

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} a_i}{m} = \mathrm{AM}(a_1, a_2, ..., a_m) \ge \mathrm{HM}(a_1, a_2, ..., a_m) = \frac{m}{\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{a_i}}.$$

Mit $\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{a_i} = 1$ folgt sofort $a = \sum_{i=1}^{m} a_i \ge m^2$ und hieraus mit $a = 2008$ sofort $m \le 44$.

Zum Nachweis für die untere Schranke betrachten wir eine k–Zerlegung der Form $\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{a_i} = 1$ mit $a_1 \le a_2 \le ... a_m$ und ersetzen nun ein beliebiges der a_i durch ein kleineres $a_i^* = a_i - x$, $x > 0$. Gleichzeitig ersetzen wir ein a_j mit $j > i$ durch ein größeres $a_j^* = a_j + y$, $y > 0$. Wenn nun die Summe der Kehrwerte weiter den Wert 1 behalten soll, dann ist offensichtlich $x < y$. Die zu der k–Zerlegung gehörende Zahl ist bei dieser Operation also größer geworden.

Also erreichen wir für vorgegebenes m das Maximum, wenn wir der Reihe nach möglichst kleine Zahlen so wählen, dass die Summe der Kehrwerte gerade nicht mehr den Wert 1 hat bzw. mit der $m$ten Zahl genau den Wert 1 erreicht. Auf diese Weise erhalten wir für $m = 5$ der Reihe nach die Zahlen 2, 3, 7, 43, 1806 (man rechnet leicht nach, dass tatsächlich $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{43}+\frac{1}{1806} = 1$); d.h. 2+3+7+43+1806 ist eine k–Zerlegung von 1861. Also ist 1861 die größte Zahl, die mit 5 Summanden k–zerlegt werden kann; eine k–Zerlegung von 2008 hat also mindestens 6 Summanden. Mit Nachrechnen von endlich vielen Möglichkeiten (in der Praxis natürlich von einem Computer durchgeführt) kann man zeigen, dass eine k–Zerlegung von 2008 sogar mindestens 7 Summanden hat.

Bemerkungen: Im Internet findet man auf der Seite http://mathworld.wolfram.com unter den Stichworten Egyptian Number, Egyptian Fraction, Unit Fraction weitere Quellen, u.a. auch einen Hinweis auf eine Abhandlung von R. L. Graham, "A Theorem on Partions" (J. Austral. Math. Soc. 3, 435–441, 1963)

Häufige Fehler: In den Teilnahmebedingungen steht: "Gegen die Verwendung eines Computers oder eines Taschenrechners als Hilfsmittel zur Ideenfindung bzw. Rechnungskontrolle ist nichts einzuwenden, doch müssen die für den jeweiligen Nachweis wesentlichen Schritte ohne dieses Hilfsmittel nachvollziehbar und überprüfbar sein."

Es ist also nichts dagegen einzuwenden, wenn ein Teilnehmer mit einem selbstgeschriebenen Computerprogramm eine Lösung findet und einreicht. Er/Sie muss aber darauf achten, dass die Richtigkeit der Lösung ohne weitere Hilfsmittel überprüft werden kann, d.h. der Korrektor muss ohne weitere Hilfsmittel bestätigen können, dass die Summe der angegebenen Zahlen den Wert 2008 hat und dass die Summe der Kehrwerte der Zahlen den Wert 1 hat.

Die Angabe von mehreren teilerfremden Zahlen alleine wird deswegen oft keine vollständige Lösung darstellen: Der Korrektor kann zwar ohne weitere Hilfsmittel (also durch Kopfrechnen) vielleicht noch bestätigen, dass Summe der Zahlen 2008 ist. Dass die Summe der Kehrwerte den Wert 1 hat, wird er bei einem 5stelligen Hauptnenner ohne Hilfsmittel nicht mehr überprüfen können. Bei einer Kontrollrechnung, die per TR die Kehrwerte direkt addiert (also nicht eine Ganzzahlarithmetik und den Hauptnenner verwendet), könnte außerdem der TR wegen Rundungsfehlern als Summe der Kehrwerte fehlerhaft den Wert 1 angeben.

Aufgabe 3: Man beweise folgende Aussage:

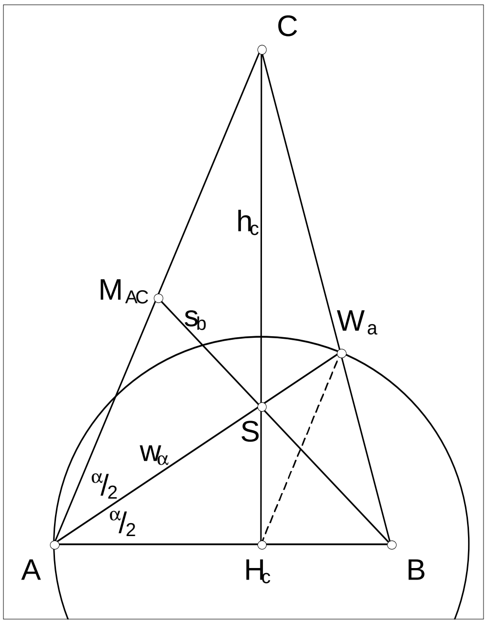
In einem spitzwinkligen Dreieck ABC schneiden sich die Winkelhalbierende w_α, die Seitenhalbierende s_b und die Höhe h_c genau dann in einem Punkt, wenn w_α, die Seite BC und der Kreis um den Höhenfußpunkt H_c durch die Ecke A einen Punkt gemeinsam haben.

Vorbemerkung: In den Beweisen wird nirgends benützt, dass CH_c mit AB einen rechten Winkel einschließt. Der zu beweisende Satz kann also allgemeiner formuliert werden:

Es sei ΔABC ein Dreieck und P ein beliebiger Punkt auf der Seite AB. Dann gilt: Die Winkelhalbierende w_α, die Seitenhalbierende s_b und die Transversale PC haben genau dann einen Punkt gemeinsam, wenn w_α, die Seite BC und der Kreis um P durch die Ecke A einen Punkt gemeinsam haben.

Gemeinsame Bezeichnungen: Der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden w_α mit BC sei mit W_a bezeichnet; die Seitenmitte von AC mit M_{AC}, der Höhenfußpunkt der Höhe von C auf AB mit H_c.

1. Beweis (mit Satz von Ceva): Es sei ΔABC ein Dreieck, das sowohl bei A als auch bei B einen spitzen Winkel besitzt. Dann gelten folgende Äquivalenzen (notwendige Begründungen sind als Fußnote am Ende des Beweises angegeben):



$W_a \in K(H_c,\ r = \overline{H_cA}\ )$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{H_cA} = \overline{H_cW_a}$$

$$\Leftrightarrow \quad \Delta AH_cW_a \text{ ist gleichschenklig mit Basis } AW_a$$

$$\Leftrightarrow \quad \angle H_cAW_a = \angle AW_aH_c$$

$$\Leftrightarrow^{1)} \quad \angle W_aAC = \angle AW_aH_c$$

$$\Leftrightarrow^{2)} \quad H_cW_a \parallel AC$$

$$\Leftrightarrow^{3)} \quad \frac{\overline{AH_c}}{\overline{H_cB}} = \frac{\overline{CW_a}}{\overline{W_aB}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\overline{AH_c}\cdot\overline{BW_a}}{\overline{H_cB}\cdot\overline{W_aC}}\cdot\frac{1}{1} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\overline{AH_c}\cdot\overline{BW_a}\cdot\overline{CM_{AC}}}{\overline{H_cB}\cdot\overline{W_aC}\cdot\overline{M_{AC}A}} = 1$$

$$\Leftrightarrow^{5)} \quad CH_c,\ BM_{AC} \text{ und } AW_a \text{ gehen durch einen Punkt.}$$

Begründungen für die Äquivalenzen:

1) da AW_a den Winkel $\angle BAC$ halbiert.

2) Wechselwinkel an einer Geradenkreuzung, außerdem liegen C und H_c in verschiedenen Halbebenen bez. AW_a.

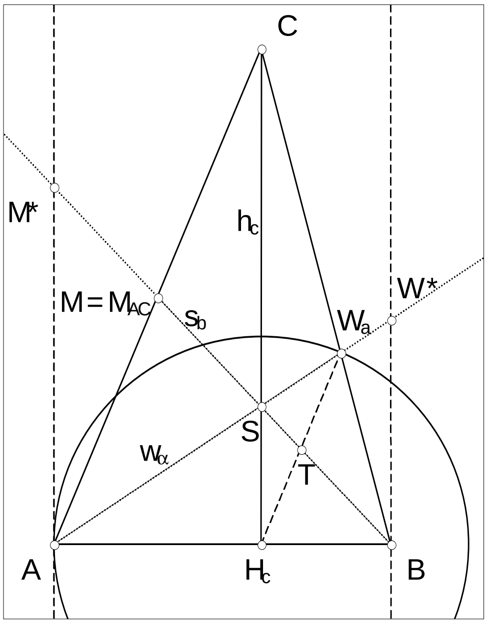
3) "$\Rightarrow$" gilt nach Strahlensatz mit Zentrum B und den Strahlen (BA und (BC; "$\Leftarrow$" gilt nach der Umkehrung des Strahlensatzes. Dabei ist zusätzlich zu berücksichtigen, dass in jedem Dreieck der Punkt W_a zwischen B und C liegt und – da die Winkel bei A und B beide spitz sind – auch H_c zwischen B und A.

4) da M_{AC} Mittelpunkt der Seite AC ist.

5) nach Satz von Ceva (beide Richtungen).

2. Beweis (mit zentrischen Streckungen; diese führen zu einem Beweis des Satzes von Ceva): Wir ergänzen in der Figur die Parallelen zu CH_c durch die Punkte A bzw. B. Die (von A bzw. B verschiedenen) Schnittpunkte dieser beiden Senkrechten mit w_α bzw. s_b nennen wir W* bzw. M*. Schließlich sei mit $(X, Y\to Z)$ diejenige zentrische Streckung bezeichnet, deren Zentrum X ist und die den Punkt Y in den Punkt Z überführt.

"$\Rightarrow$": Es gebe eine Punkt, den die Geraden w_α, s_b und h_c gemeinsam haben.



Wir bezeichnen diesen Punkt mit S. Dann führen wir hintereinander die zentrischen Streckungen $(A, H_c\to B)$, $(W_a, B\to C)$, $(M_{AC}, C\to A)$ und $(B, A\to H_c)$ durch. Dabei wird H_c der Reihe nach auf B, auf C, auf A und schließlich wieder auf sich selbst abgebildet; der Punkt S der Reihe nach auf W*, zurück auf S, auf M* und schließlich ebenfalls auf sich selbst. Damit ist das Bild der Strecke H_cS wieder die Strecke H_cS; hieraus folgt sofort, dass das Produkt der Beträge der Streckfaktoren den Wert 1 hat. Es ist also

$$1 = \frac{\overline{AB}}{\overline{AH_c}} \cdot \frac{\overline{W_aC}}{\overline{BW_a}} \cdot \frac{\overline{M_{AC}A}}{\overline{CM_{AC}}} \cdot \frac{\overline{H_cB}}{\overline{AB}}.$$

In dieser Gleichung kürzen sich die Werte $\overline{AB}$ (und wir erhalten so - wenn man w_α, s_b und h_c als beliebige Transversalen definiert - den Beweis für eine Richtung des Satzes von Ceva). Außerdem ist M_{AC} der Mittelpunkt von AC, also ist $\frac{\overline{M_{AC}A}}{\overline{CM_{AC}}} = 1$.

Obige Gleichung ist also äquivalent zu $1 = \frac{\overline{AB}}{\overline{AH_c}} \cdot \frac{\overline{W_aC}}{\overline{BW_a}} \cdot 1 \cdot \frac{\overline{H_cB}}{\overline{AB}}$ und damit auch zu

$$\frac{\overline{AH_c}}{\overline{H_cB}} = \frac{\overline{W_aC}}{\overline{BW_a}}.$$

Wir beachten hier, dass wegen der Spitzwinkligkeit des Dreiecks nicht nur W_a innerer Punkt von BC, sondern auch H_c innerer Punkt von AB ist; mit der Umkehrung des Strahlensatzes können wir also folgern, dass $AC \| H_cW_a$. Außerdem teilt bekanntlich in jedem Dreieck eine Winkelhalbierende die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten, also ist $\frac{\overline{W_aC}}{\overline{BW_a}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$.

Schließlich wenden wir nochmals den Strahlensatz an (Zentrum B; $AC\|H_cW_a$) und erhalten schließlich mit $\frac{\overline{AH_c}}{\overline{H_cB}} = \frac{\overline{W_aC}}{\overline{BW_a}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{H_cW_a}}{\overline{H_cB}}$ sofort die Behauptung $\overline{AH_c} = \overline{H_cW_a}$.

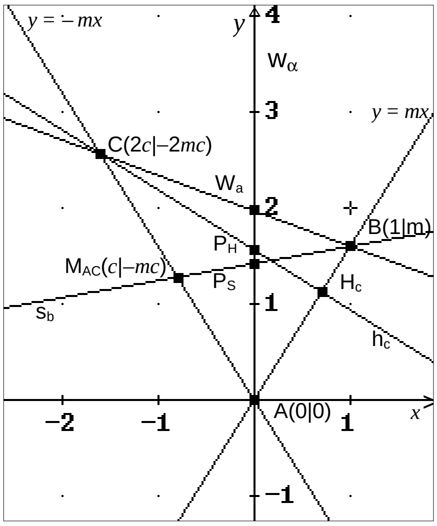
"$\Leftarrow$": Sei W_a gemeinsamer Punkt von BC, von w_α und von $K(H_c, r = \overline{H_cA})$.

Wir bezeichnen den Schnittpunkt von w_α und h_c mit S; den Schnittpunkt von AC mit BS mit M, den Schnittpunkt von BS mit H_cW_a mit T. Es genügt dann zu zeigen, dass M tatsächlich Mittelpunkt von AC ist.

Aus der Voraussetzung folgt sofort, dass $\overline{AH_c} = \overline{H_cW_a}$. Das Dreieck ΔAH_cW_a ist also gleichschenklig mit Basis AW_a. Es hat somit gleiche Basiswinkel, d.h. es ist unter Berücksichtigung, dass w_α die Winkelhalbierende von α ist, $\angle H_cAW_a = \angle AW_aH_c = \frac{\alpha}{2}$. Insbesondere ist dann $\angle AW_aH_c = \angle W_aAC$ und somit $H_cW_a \| AC$.

Nun betrachten wir die beiden zentrischen Streckungen, die die Strecke H_cW_a mit ihrem Teilpunkt T in die Strecke AC mit ihrem Teilpunkt M überführt. Eine dieser beiden zentrischen Streckungen hat B als Zentrum und es folgt $\frac{\overline{H_cT}}{\overline{TW_a}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{MC}}$; die andere hat S als Zentrum und es folgt sofort $\frac{\overline{H_cT}}{\overline{TW_a}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{MA}}$. Hieraus folgt sofort $\frac{\overline{AM}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{MA}}$, also $\overline{AM} = \overline{MC}$; das war zu zeigen.

3. Beweis (mit Koordinatenrechnung): Wir betrachten zunächst ein beliebiges, bei A spitzwinkliges Dreieck ΔABC und in ihm die Punkte, in denen die Seitenhalbierende s_b und die Höhe h_c die Winkelhalbierende w_α schneiden; diese seien mit P_S bzw. P_H bezeichnet.



Zur Untersuchung legen wir ein rechtwinkliges Achsenkreuz mit gleichen Einheiten auf den beiden Achsen so auf das Dreieck, dass der Ursprung auf den Punkt A und die positive y–Achse auf w_α zu liegen kommt. Die Gerade AB lässt sich dann durch die Gleichung $y = mx$ für ein geeignete reelle Zahl m beschreiben, die Gerade AC – da Bild von AB durch Spiegelung an w_α, also der y–Achse, – durch die Gleichung $y = -mx$. Da $\alpha < 90°$, ist zusätzlich $m > 1$.

Nun wählen wir die Einheiten auf den beiden Achsen so, dass der Punkt B die x – Koordinate 1 hat; den hieraus resultierenden Wert für die x – Koordinate des Punktes C nennen wir $2c$, dabei ist $c < 0$. Aus den Geradengleichungen ergeben sich die Koordinaten von B und C zu $B(1|m)$, und $C(2c|-2cm)$. Jedes bei A spitzwinklige Dreieck lässt sich so durch die zwei Parameter m und c beschreiben.

Nun bestimmen wir die Koordinaten der Punkte M_{AC}, P_S, P_H, H_C und W_a; dabei werden wir nicht immer explizit angeben, dass die im Nenner vorkommenden Ausdrücke $1-c$ und $1-2c$ wg. $c < 0$ nie den Wert null annehmen:

M_{AC}: Sofort einsichtig ist, dass der Mittelpunkt von AC die Koordinaten $M_{AC}(c|-cm)$ hat.

P_S: Die Seitenhalbierende s_b ist ein Gerade, die durch die Punkte $B(1|m)$ und $M_{AC}(c|-cm)$ geht; ihre Geradengleichung leiten wir nach bekannter Zwei-Punkte-Formel her:

$$M_{AC}B \ : \ y = \frac{m-(-mc)}{1-c}(x-1) + m = m\frac{1+c}{1-c}x - m\frac{1+c}{1-c} + m = m\frac{1+c}{1-c}x - \frac{2mc}{1-c}.$$

Der y–Achsenabschnitt gibt uns sofort die Koordinaten $P_S(0|-\frac{2mc}{1-c})$.

P_H: Die Höhe h_c ist eine Gerade durch $C(2c|-2cm)$, die senkrecht zur Geraden $y = mx$ steht, also die Steigung $-\frac{1}{m}$ hat. Dieser Ausdruck ist wegen $m \neq 0$ immer definiert, die Geradengleichung lautet also

$$CH_C: \quad y = -\frac{1}{m}(x-2c) - 2mc = -\frac{1}{m}x + 2c\left(\frac{1}{m} - m\right)$$

Wieder gibt uns der y–Achsenabschnitt die Koordinaten $P_H(0|2c(\frac{1}{m} - m))$.

H_c: Der Punkt H_c ist Schnittpunkt dieser Geraden mit der Geraden $y = mx$, seine Koordinaten $(x_h|y_h)$ bestimmen wir mit schulüblichen Mitteln (Gleichsetzen der Funktionsterme, Einsetzen):

$$-\frac{1}{m}x_h + 2c(\frac{1}{m} - m) = mx_h \quad\Leftrightarrow\quad 2c(\frac{1}{m} - m) = (\frac{1}{m} + m)x_h \quad\Leftrightarrow\quad x_h = \frac{2c(1-m^2)}{1+m^2};$$

mit $y_h = m\cdot x_h = m\cdot\frac{2c(1-m^2)}{1+m^2}$ erhalten wir $H_c(\frac{2c(1-m^2)}{1+m^2} \mid \frac{2mc(1-m^2)}{1+m^2})$.

W_a: Der Punkt W_a ist der Schnittpunkt der Geraden BC mit der y–Achse; die Bestimmung seiner Koordinaten verläuft analog zur Bestimmung der Koordinaten von P_S; wir müssen lediglich den Wert c durch den Wert $2c$ ersetzen und erhalten die Koordinaten von $W_a(0\mid -\frac{4mc}{1-2c})$.

Nun kommen wir zum eigentlichen Beweis. Es gelten folgende Äquivalenzen:

w_α, s_b und h_c haben einen Punkt gemeinsam

$\Leftrightarrow$ die y–Koordinaten der Punkte P_S und P_H sind gleich

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{2mc}{1-c} = 2c(\frac{1}{m} - m) \qquad |:2c \neq 0;\ \cdot m(c-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad m^2 = (c-1)\cdot(1-m^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad m^2(1 + (c-1)) = c - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad m^2 = \frac{c-1}{c}.$$

w_α, BC und der Kreis um $H_c(x_h \mid y_h)$ durch A(0|0) haben einen Punkt $W_a(x_w|y_w)$ mit $x_w = 0$ gemeinsam

$$\Leftrightarrow \quad \overline{H_cW_a} = \overline{H_cA} \quad\Leftrightarrow\quad (x_h - x_w)^2 + (y_h - y_w)^2 = (x_h - 0)^2 + (y_h - 0)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad -2y_hy_w + y_w^2 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 2y_h = y_w$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cdot\frac{2mc(1-m^2)}{1+m^2} = -\frac{4mc}{1-2c} \qquad |:4mc \neq 0,\ \cdot(2c-1)(1+m^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad (2c-1)(1-m^2) = 1 + m^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (2c-1) - 1 = m^2(1 + 2c - 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad m^2 = \frac{c-1}{c}.$$

Damit haben wir nachgewiesen, dass beide Bedingungen äquivalent sind.

Bemerkungen: Die Einschränkung auf spitzwinklige Dreiecke ist eigentlich unnötig: Die Bedingung $\gamma < 90°$ wird oben nirgends benötigt und es gibt auch Dreiecke mit $\gamma \geq 90°$, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Der Fall $\alpha \geq 90°$ oder $\beta \geq 90°$ wir durch die anderen Bedingungen der Aufgabe ausgeschlossen: Hier verläuft die Höhe h_c niemals im Innern des Dreiecks, während sich die Seitenhalbierende und die Winkelhalbierende immer im Innern des Dreiecks schneiden, d.h. w_α, s_b und h_c haben niemals einen gemeinsamen Punkt. In der Gegenrichtung führt die Forderung, dass H_cA und H_cW_a gleiche Länge haben, zur unerfüllbaren Forderung $\alpha \geq 90°$ und $\beta \geq 90°$. In diesem Fall gilt also die Kontraposition.

Hinweis auf häufige Fehler: Die Formulierung "(A) genau dann, wenn (B)" fordert einen Beweis, in dem die beiden Beweisrichtungen "Aus (A) folgt (B)" und "Aus (B) folgt (A)" in ausreichender Weise abgehandelt werden. Dies gelingt meistens, wenn man eine klare Zweiteilung (vgl. 2. Beweis) vornimmt oder konsequent Doppelpfeile (vgl. 1. und 3. Beweis) verwendet. Fehlt eine der beiden Richtungen, wird die Aufgabe als "insgesamt nicht gelöst" bewertet.

Aufgabe 4: In einem ebenen Koordinatensystem stehen auf Punkten mit ganzzahligen Koordinaten vier Spielsteine. Sie können nach folgender Regel gezogen werden: Ein Stein kann auf eine neue Position gezogen werden, wenn in der Mitte zwischen seiner alten und neuen Position einer der übrigen Steine liegt.

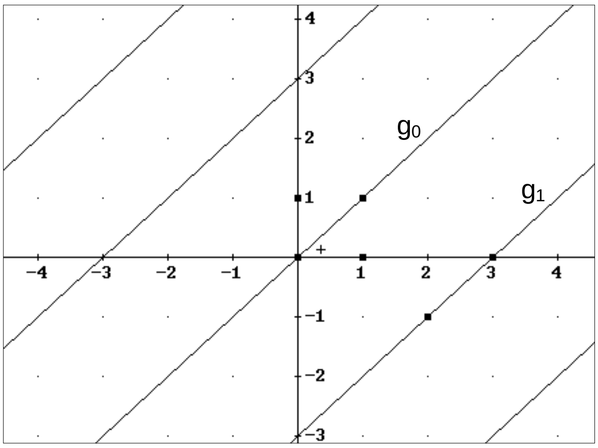
Zu Beginn stehen die vier Spielsteine auf den Punkten (0|0), (0|1), (1|0) und (1|1). Kann man nach endlich vielen Zügen erreichen, dass die vier Steine auf je einem der Punkte (0|0), (1|1), (3|0) und (2|–1) stehen?

Antwort: Nein, dies ist nicht möglich.

Gemeinsame Bezeichnungen: Wenn wir den Stein A so ziehen, dass der Stein B in der Mitte zwischen der alten und neuen Position von Stein A liegt, dann sagen wir kürzer "Stein A springt über Stein B" oder auch (in Anlehnung an die naheliegende geometrische Interpretation) "Stein A wird an Stein B gespiegelt". Außerdem verkürzen wir die Formulierung "Die Koordinaten des Punktes, auf dem der Stein A steht" zu "Die Koordinaten des Steines A".

1. Beweis: Zunächst stellen wir fest, dass die Umkehrung jedes Zuges ein nach den Zugregeln gültiger Zug ist. Es genügt also zu zeigen, dass es keine Zugfolge gibt, die von der Endstellung zu der Ausgangsstellung führt.

Weiter stellen wir fest, dass in der Endstellung alle Steine auf einer der beiden parallelen Geraden durch (0|0) und (1|1) bzw. durch (2|–1) und (3|0) liegen (also auf den beiden parallelen Geraden, die durch die Gleichungen $x - y = 0$ bzw. $x - y = 3$ gegeben sind). Wir nennen diese beiden Geraden g_0 und g_1; ihren Abstand nennen wir d.



Im Folgenden betrachten wir die Menge aller Geraden, die zu g_0 und g_1 parallel sind und die untereinander den Abstand $k \cdot d$ für ein geeignetes ganzzahliges k haben; wir nennen diese Menge G. Wählt man irgendeinen Punkt auf irgendeiner dieser Geraden als Zentrum einer Punktspiegelung, so wird bei dieser Punktspiegelung die Menge G offensichtlich in sich selbst überführt.

Jeder erlaubte Zug entspricht der Punktspiegelung eines Steines an einem anderen Stein. Wenn also ein Stein vor dem Zug auf einer der Geraden aus G liegt und der Stein, an dem gespiegelt wird, ebenfalls, dann liegt der gezogene Stein nach dem Zug auf dem Bild dieser Geraden bei der gleichen Punktspiegelung, also wieder auf einer Geraden aus G. Da in der Endstellung alle Steine auf Geraden aus G liegen, ist dies nach jedem Rückwärts–Zug ebenso der Fall. In der Anfangsstellung liegen aber zwei Steine nicht auf Geraden von G, nämlich (0|1) und (1|0). Also kann die Anfangsstellung aus der Endstellung nicht durch Rückwärtsziehen erreicht werden. Das war zu zeigen.

2. Beweis (algebraische Formulierung des ersten Beweises): Wir geben jedem Stein abhängig von seiner Lage im Achsenkreuz eine Farbe nach folgender Regel: Wir berechnen aus seinen Koordinaten $(x|y)$ den Wert $x - y$; wenn $x - y \equiv 0 \mod 3$, dann erhalte der Stein die Farbe grün, andernfalls die Farbe rot. Einfaches Nachrechnen ergibt, dass zu Beginn zwei Steine grün sind (nämlich die beiden auf (0|0) und (1|1)) und dass zwei Steine rot sind (nämlich die beiden auf (0|1) und (1|0)). In der gewünschten Endstellung sind alle vier Steine grün.

Springt nun der Stein A($x|y$) über den Stein B($r|s$) auf die Position ($x'|y'$), so liegt nach der Zugregel der Punkt ($r|s$) in der Mitte zwischen ($x|y$) und ($x'|y'$), es ist also

$r = \frac{x+x'}{2}$ und damit $x' = 2r - x$; analog erhalten wir $y' = 2s - y$.

Die Farbe eines Steines nach einem Zug ergibt sich aus dem Wert des Ausdrucks $x' - y' = (2r - x) - (2s - y) = 2(r - s) - (x - y)$. Insbesondere gilt: Wenn A die Farbe rot hat (d.h. wenn $(x - y) \equiv 1 \bmod 3$ oder $(x - y) \equiv 2 \bmod 3$ ist) und B die Farbe grün hat (d.h. wenn $(r - s) \equiv 0 \bmod 3$ ist), ist entweder $x' - y' = 2(r - s) - (x - y) \equiv 0 - 1 \bmod 3$ oder $x' - y' = 2(r - s) - (x - y) \equiv 0 - 2 \bmod 3$. Also behält ein roter Stein bei einem Sprung über einen grünen Stein die Farbe rot.

Da bei jedem Zug genau ein Stein bewegt wird, ändert sich auch bei höchstens einem Stein die Farbe. Wenn man die Endstellung erreichen könnte, müsste es also einmal einen Zug geben, vor dem ein roter und drei grüne Steine im Koordinatensystem stehen und nach dem alle vier Steine grün sind. Mit diesem Zug müsste also ein roter Stein über einen grünen Stein springen und dabei seine Farbe zu grün ändern. Dies ist jedoch nach der Schlussfolgerung im vorigen Absatz nicht möglich.

Bemerkungen: Anstatt der beiden im 1. Beweis genannten parallelen Geraden können wir auch die beiden Geraden $x + 2y = 0$ (diese enthält die Punkte (0|0) und (2|–1)) und $x + 2y = 3$ (diese enthält die Punkte (1|1) und (3|0)) betrachten. Dann führt man den Beweis mit der Invarianten $x + 2y \equiv 0 \bmod 3$.