Bundeswettbewerb Mathematik
Wissenschaftszentrum • Postfach 20 14 48 • 53144 Bonn
Fon: 0228 - 9 59 15-20 • Fax: 0228 - 9 59 15-29
e-mail: info@bundeswettbewerb-mathematik.de
www.bundeswettbewerb-mathematik.de

Korrekturkommission • Karl Fegert

Aufgaben und Lösungen

2. Runde 2008

Über Kommentare und Ergänzungen zu diesen Lösungsbeispielen freuen wir uns!

Anschrift oder Email–Adresse s.o.

Stand: Oktober 2008

Aufgabe 1: Man bestimme alle reellen Lösungen der Gleichung $\sqrt[5]{x^3+2x} = \sqrt[3]{x^5-2x}$.

Dabei sei – im Unterschied zu manchen Definitionen in der Fachliteratur – für eine ungerade ganze Zahl $n > 1$ die Wurzel $\sqrt[n]{a}$ auch für negative reelle Radikanden a erklärt: Sie sei diejenige reelle Zahl b, für die $b^n = a$.

Anmerkung: Die Richtigkeit des Resultates ist zu beweisen.

Antwort: Die Lösungsmenge ist $\{0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.

1. Beweis (mit Infinitesimalrechnung): Wir definieren $A(x) := \sqrt[5]{x^3+2x}$ und $B(x) := \sqrt[3]{x^5-2x}$; es sind also die Lösungen der Gleichung $A(x) = B(x)$ bzw. $A(x) - B(x) = 0$ zu bestimmen.

In einer Vorbetrachtung stellen wir fest, dass $A(-x) = \sqrt[5]{(-x)^3+2\cdot(-x)} = \sqrt[5]{-\left(x^3+2x\right)} = -\sqrt[5]{\left(x^3+2x\right)}$ $= -A(x)$, analoge Argumentation ergibt $B(-x) = -B(x)$. Es ist also $A(-x) = B(-x) \Leftrightarrow -A(x) = -B(x)$ $\Leftrightarrow A(x) = B(x)$; somit gibt es zu jeder Lösung x auch die Lösung $-x$. Es genügt also, zunächst die nicht–negativen Lösungen x zu bestimmen und anschließend zu jeder nicht–negativen Lösung x noch die Lösung $-x$ der Lösungsmenge hinzuzufügen.

Zunächst zeigen wir, dass die Elemente der Menge tatsächlich Lösungen sind: Einfaches Nachrechnen zeigt, dass

$$A(0) = \sqrt[5]{0^3+2\cdot 0} = 0 = \sqrt[3]{0^5-2\cdot 0} = B(0)\,;$$

$$A(\sqrt{2}) = \sqrt[5]{\sqrt{2}^3+2\cdot\sqrt{2}} = \sqrt[5]{2\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{2}} = \sqrt[5]{4\cdot\sqrt{2}} = \sqrt[5]{\sqrt{2}^5} = \sqrt{2}$$

$$= \sqrt[3]{\sqrt{2}^3} = \sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{4\cdot\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2}^5-2\cdot\sqrt{2}} = B(\sqrt{2})\,;$$

$$A(-\sqrt{2}) = -A(\sqrt{2}) = -B(\sqrt{2}) = B(-\sqrt{2}).$$

Nun zeigen wir noch, dass es keine anderen Lösungen mehr gibt. Nach obiger Vorbetrachtung und weil $x = 0$ eine Lösung ist, genügt es zu zeigen, dass es keine weiteren positiven Lösungen x gibt. Dies zeigen wir getrennt für die Intervalle $x \in]0; \sqrt[4]{2}[$ und $x \in [\sqrt[4]{2}; \infty[$:

$x \in]0; \sqrt[4]{2}]$: $A(x)$ und $B(x)$ nehmen genau dann positive Werte an, wenn die Radikanden positiv sind. Damit ist offensichtlich $A(x) > 0$ für alle $x > 0$. Dagegen folgt aus der Umformung

$$B(x) = \sqrt[3]{x^5-2x} = \sqrt[3]{x(x^4-2)} = \sqrt[3]{x(x^2-\sqrt{2})(x^2+\sqrt{2})} = \sqrt[3]{x(x-\sqrt[4]{2})(x+\sqrt[4]{2})(x^2+\sqrt{2})}$$

dass für $x \in]0; \sqrt[4]{2}[$ der zweite Faktor im Radikand und nur dieser negativ ist, also $B(x) < 0$. Insbesondere ist $A(x) \neq B(x)$; es gibt also im Intervall $]0; \sqrt[4]{2}[$ keine Lösung.

$x \in [\sqrt[4]{2}; \infty[$: Wir zeigen, dass die Funktion $L(x) = A(x) - B(x)$ in diesem Intervall höchstens eine Nullstelle und damit die vorgegebene Gleichung höchstens eine Lösung hat; diese muss die oben nachgewiesene Lösung $\sqrt{2} \in [\sqrt[4]{2}; \infty]$ sein:

Eine Abschätzung der Ableitung von L für $x \geq \sqrt[4]{2}$ ergibt (in diesem Zahlbereich sind Zähler und Nenner der vorkommenden Brüche alle positiv, wir vergößern also den Gesamtausdruck, wenn wir den Zähler des ersten Bruches und den Nenner des zweiten Bruches vergrößern sowie den Nenner des ersten Bruches und den Zähler des zweiten Bruches verkleinern:

$$\frac{dL(x)}{dx} = \frac{3x^2+2}{5\left(x^3+2x\right)^{\frac{4}{5}}} - \frac{5x^4-2}{3\left(x^5-2x\right)^{\frac{2}{3}}} < \frac{3x^2+2x^2}{5x^{3\cdot\frac{4}{5}}} - \frac{5x^4-x^4}{3x^{5\cdot\frac{2}{3}}} = \frac{x^2}{x^{\frac{12}{5}}} - \frac{4x^4}{3x^{\frac{10}{3}}}$$

$$< 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3} < 0.$$

Damit ist $L(x)$ streng monoton fallend für $x > \sqrt[4]{2}$, besitzt also in diesem Bereich höchstens eine Nullstelle. Diese ist nach der Eingangsbemerkung die schon bekannte Lösung $\sqrt{2}$.

Ergänzung: Zeigt man zusätzlich

$$L(\sqrt[4]{2}) = \sqrt[5]{\sqrt[4]{2}^3 + 2\cdot\sqrt[4]{2}} - \sqrt[3]{\sqrt[4]{2}^5 - 2\cdot\sqrt[4]{2}} > \sqrt[5]{\sqrt[4]{2}^3 + 2\cdot\sqrt[4]{2}} - 0 > 0.$$

und benützt $\frac{dL(x)}{dx} < -\frac{1}{3}$, so hat man auch die Existenz dieser Nullstelle ohne vorherige Kenntnis der Lösung $\sqrt{2}$ nachgewiesen.

2. Beweis: Wir zeigen, dass x genau dann eine Lösung ist, wenn $x \in \{0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$:

"$\Rightarrow$": Sei x eine Lösung. Dann ist notwendigerweise $\sqrt[5]{x^3+2x} = x = \sqrt[3]{x^5-2x}$. (*) Den Nachweis hierfür geben wir in drei Varianten:

Variante 1: Bekanntlich erhält Potenzieren beider Seiten einer Ungleichung mit einer ungeraden positiven ganzzahligen Potenz oder deren Kehrwert die "<"– bzw. ">"–Relation. Wäre (*) nicht erfüllt, erhielte man für eine Lösung x der Ausgangsgleichung

entweder $\sqrt[5]{x^3+2x} < x \Leftrightarrow x^3 + 2x < x^5 \Leftrightarrow x^3 < x^5 - 2x \Leftrightarrow x < \sqrt[3]{x^5-2x}$

oder $\sqrt[5]{x^3+2x} > x \Leftrightarrow x^3 + 2x > x^5 \Leftrightarrow x^3 > x^5 - 2x \Leftrightarrow x > \sqrt[3]{x^5-2x}$.

In beiden Fällen folgt der Widerspruch $\sqrt[5]{x^3+2x} \neq \sqrt[3]{x^5-2x}$.

Variante 2: Wenn $\sqrt[5]{x^3+2x} = \sqrt[3]{x^5-2x}$, dann gibt es eine Zahl $z \in \mathbb{R}$, für die sowohl $z = \sqrt[5]{x^3+2x}$ als auch $z = \sqrt[3]{x^5-2x}$, also sowohl $z^5 = x^3 + 2x$ (A) als auch $z^3 = x^5 - 2x$ (B). Addition dieser beiden Gleichungen ergibt sofort die notwendige Bedingung

$$z^5 + z^3 = x^5 + x^3 \quad \text{(C);}$$

dies ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} 0 &= z^5 + z^3 - (x^5 + x^3) = z^5 - x^5 + (z^3 - x^3) \\ &= (z - x)\cdot[(z^4 + z^3x + z^2x^2 + zx^3 + x^4) + (z^2 + zx + x^2)]. \end{aligned}$$

Offensichtlich haben z und $z^5 + z^3$ stets das gleich Vorzeichen, ebenso x und $x^5 + x^3$; aus C folgt also zusätzlich, dass eine Lösung x und das dazugehörige z ebenfalls das gleiche Vorzeichen haben. Damit ist C nur dann erfüllt, wenn die erste Klammer den Wert Null hat, d.h. wenn $z = x$; oder wenn die zweite Klammer den Wert Null hat; da z und x das gleiche Vorzeichen haben, ist diese Klammer nie negativ und hat nur dann den Wert Null haben, wenn $x = z = 0$. Notwendig ist also in beiden Fällen $z = x$.

Variante 3: Wäre $x \neq z := \sqrt[5]{x^3+2x} = \sqrt[3]{x^5-2x}$, also o.B.d.A. $0 < x = z + h$, $z > 0$ für ein geeignetes $h > 0$ (für $h < 0$ vertausche man im Beweis die Bezeichnungen x und z), dann folgte aus (C) ein Widerspruch durch

$$0 = z^5 + z^3 - [(z + h)^5 + (z + h)^3] = -\sum_{i=1}^{5}\binom{5}{i}z^i h^{(5-i)} - \sum_{i=1}^{3}\binom{3}{i}z^i h^{(3-i)} < 0$$

Nun kann der eigentliche Beweis geführt werden: Wenn die Gleichung erfüllt ist, ist also notwendigerweise $x = z$. Einsetzen in (A) oder (B) ergibt die notwendige Bedingung $x^5 = x^3 + 2x$; diese kann äquivalent umgeformt werden zu

(A) $\Rightarrow x\cdot(x^4 - x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow x\cdot(x^2 - 2)\cdot(x^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow x\cdot(x + \sqrt{2})\cdot(x - \sqrt{2})\cdot(x^2 + 2) = 0.$

Wieder kann das Produkt nur dann den Wert Null haben, wenn wenigstens ein Faktor den Wert Null hat. Damit kann eine Lösung x nur eine der Zahlen $0, -\sqrt{2}$ oder $\sqrt{2}$ sein.

"⇐": Sei $x \in \{0, -\sqrt{2}\,,\ \sqrt{2}\,\}$.

Dann ist x eine Lösung, was eine Probe mit Einsetzen sofort zeigt:

Für $x = 0$: $\sqrt[5]{x^3+2x} = \sqrt[5]{0^3+2\cdot 0} = 0 = \sqrt[3]{0^5-2\cdot 0} = \sqrt[3]{x^5-2x}$;

für $x = \pm\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned}\sqrt[5]{x^3+2x} &= \sqrt[5]{\left(\pm\sqrt{2}\right)^3+2\cdot\left(\pm\sqrt{2}\right)} = \sqrt[5]{\pm\left(\sqrt{2}^3+2\cdot\sqrt{2}\right)}\\ &= \pm\sqrt[5]{2\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{2}} = \pm\sqrt[5]{4\cdot\sqrt{2}} = \pm\sqrt[5]{\sqrt{2}^5} = \pm\sqrt{2}\\ &= \pm\sqrt[3]{\sqrt{2}^3} = \sqrt[3]{\pm 2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{4\cdot\left(\pm\sqrt{2}\right)-2\cdot\left(\pm\sqrt{2}\right)}\\ &= \sqrt[3]{\left(\pm\sqrt{2}\right)^5-2\cdot\left(\pm\sqrt{2}\right)} = \sqrt[3]{x^5-2x}\,.\end{aligned}$$

3. Beweis (Ermittlung der positiven Nullstellen eines Polynoms, nur skizziert): Bekanntlich ist das Potenzieren beider Seiten einer Gleichung mit der gleichen ungeraden positiven ganzen Zahl eine Äquivalenzumformung. Potenzieren beider Seiten mit 15 ergibt also

$$\begin{aligned}\sqrt[5]{x^3+2x} = \sqrt[3]{x^5-2x} \quad &\Leftrightarrow\quad (x^3+2x)^3 = (x^5-2x)^5 \;\Leftrightarrow\; x^3(x^2+2)^3 = x^5(x^4-2)^5\\ &\Leftrightarrow\quad x = 0 \;\vee\; (x^2+2)^3 = x^2(x^4-2)^5\end{aligned}$$

Man erhält also eine erste Lösung $x = 0$. Für $x \neq 0$ substituiert man $u := x^2$ und schließt weiter

$$\begin{aligned}(x^2+2)^3 = x^2(x^4-2)^5 \quad&\Leftrightarrow\quad u(u^2-2)^5-(u+2)^3 = 0\\ &\Leftrightarrow\quad u^{11}-5{\cdot}2u^9+10{\cdot}2^2{\cdot}u^7-10{\cdot}2^3{\cdot}u^5+5{\cdot}2^4{\cdot}u^3-2^5{\cdot}u \;-\; (u^3+3{\cdot}2{\cdot}6u^2+3{\cdot}2^2{\cdot}u+2^3)\\ &\Leftrightarrow\quad u^{11}-10u^9+40u^7-80u^5+79u^3-44u-8 = 0 \quad (*).\end{aligned}$$

Bei der Suche nach Lösungen u untersucht man zunächst die ganzzahligen Teilern des Absolutgliedes 8; einfaches Nachrechnen (auf das wir hier verzichten) führt zu den Lösungen $u = -1$ (dies führt zu keinen Lösungen x) und $u = 2$; dies führt zu den beiden Lösungen $x = \pm\sqrt{2}$.

Damit bleibt noch zu zeigen, dass die Gleichung (*) keine weiteren positiven Lösungen u hat. Man klammert auf der rechten Seite die beiden Faktoren $(u-2)(u+1)$ aus (Polynomdivision; hier nicht aufgeführt) und formt trickreich weiter um (die Richtigkeit der Umformung ist ebenfalls nicht aufgeführt):

$$\begin{aligned}\ldots\Leftrightarrow\quad &(u-2)(u+1)(u^9+u^8-7u^7-5u^6+21u^5+11u^4-27u^3-5u^2+20u+4) = 0\\ \Leftrightarrow\quad &(u-2)(u+1)[u(u^2-2)^4+u^4(u^2-3)^2+u^3(u^2-2)^2+u^6+u^5+u^4+(u^2-1)^2+u(u-2)^2+u^2+3] = 0\end{aligned}$$

Hier ist sofort einsichtig, dass für positive u in der eckigen Klammer keine negativen und mindestens zwei positive Summanden vorkommen; d.h. dass die eckige Klammer stets positiv ist. Es gibt also keine weiteren positiven Lösungen u und damit auch keine weiteren Lösungen x.

Bemerkung: In jedem Falle müssen zwei Dinge gezeigt werden: (*i*): die drei Zahlen sind Lösungen und (*ii*): es gibt außer diesen drei Zahlen keine anderen Lösungen. Fehlt einer der beiden Nachweise, so ist der Beweis lückenhaft. Diese beiden Schritte können auch gleichzeitig durchgeführt werden, indem man bei jeder Umformung der Gleichung nachweist, dass eine Äquivalenzumformung vorliegt.

Aufgabe 2: Die positiven ganzen Zahlen a, b und c seien so gewählt, dass auch die Quotienten $\frac{bc}{b+c}$, $\frac{ca}{c+a}$ und $\frac{ab}{a+b}$ ganzzahlig sind.

Man beweise, dass a, b und c einen gemeinsamen Teiler haben, der größer als 1 ist.

1. Beweis: Wir zeigen zunächst, dass $g := \text{ggT}(a,b) > 1$: Da $\frac{ab}{a+b}$ ganzzahlig ist und $(a+b) \geq 2$, gibt es eine Primzahl $p \geq 2$, für die $p|(a+b)$ und $p|(ab)$. Aus letzterem folgt nach bekanntem zahlentheoretischem Satz, dass $p|a$ oder $p|b$. Falls $p|a$, dann folgt zusammen mit $p|(a+b)$ auch $p|((a+b)-a)$, also $p|b$; und falls $p|b$, folgt analog $p|a$. In jedem Fall ist $p \geq 2$ ein gemeinsamer Teiler von a und b, insbesondere ist somit $g \geq p \geq 2$.

Es gibt also teilerfremde ganze Zahlen $a' > 1$ und $b' > 1$, für die $a = ga'$ und $b = gb'$ ist.

Mit diesen Bezeichnungen ist $\frac{ab}{a+b} = \frac{ga'gb'}{ga'+gb'} = \frac{ga'b'}{(a'+b')}$ ganzzahlig.

Da a' und b' teilerfremd sind, sind auch a' und $(a'+b')$ sowie b' und $(a'+b')$ teilerfremd; aus der Ganzzahligkeit des Bruches folgt also $(a'+b')|g$. Insbesondere ist $a' < g$; also $a = ga' < g^2$ und $1 \leq \sqrt{a} < g$.

Analog schließen wir für $h := \text{ggT}(a,c)$, dass $(a'+c')|h$ und $1 \leq \sqrt{a} < h$.

Nun betrachten wir $t := \text{ggT}(g,h)$: Nach Konstruktion ist t ein Teiler von g und damit ein Teiler von a und b, ebenso ist t ein Teiler von h und damit Teiler von a und c; insgesamt ist also t ein gemeinsamer Teiler von a, b und c. Es genügt also noch zu zeigen, dass $t > 1$:

Nach bekanntem zahlentheoretischem Satz ist $a = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} < g \cdot h = \text{ggT}(g,h) \cdot \text{kgV}(g,h)$;

da ferner nach Definition von g und h die Zahl a ein gemeinsames Vielfaches von g und h ist, ist $\text{kgV}(g,h) \leq a$. Aus der letzten Ungleichung folgt also $t = \text{ggT}(g,h) = a : \text{kgV}(g,h) > a : a = 1$.
Dies war zu zeigen.

Bemerkung: Der erste Absatz und die Einschränkung $a' > 1$ und $b' > 1$ im zweiten Absatz sind eigentlich überflüssig.

2. Beweis: Da a und $\frac{ab}{a+b}$ beide ganzzahlig sind, ist auch $a - \frac{ab}{a+b} = \frac{a^2}{a+b}$ ganzzahlig, analog folgt aus der Ganzzahligkeit von a und $\frac{ac}{a+c}$ die Ganzzahligkeit von $\frac{a^2}{a+c}$.

Damit sind sowohl $(a+b)$ als auch $(a+c)$ Teiler von a^2; insbesondere ist $\text{kgV}((a+b),(a+c)) \leq a^2$.

Nach bekanntem zahlentheoretischem Satz ist

$$\text{kgV}((a+b),(a+c)) \cdot \text{ggT}((a+b),(a+c)) = (a+b)\cdot(a+c) = a^2 + ab + ac + bc > a^2, \text{ also}$$
$$\text{ggT}((a+b),(a+c)) > a^2 : \text{kgV}((a+b),(a+c)) \geq a^2 : a = 1.$$

Also gibt es einen gemeinsamen Primteiler $p \geq 2$ von $(a+b)$ und $(a+c)$. Aus $p|(a+b)$ und $(a+b)|a^2$ folgt $p|a^2$; hieraus folgt – da p prim ist – $p|a$.

Schließlich folgt aus $p|a$ und $p|(a+b)$, dass auch $p|((a+b)-a)$, also $p|b$; und aus $p|a$ und $p|(b+c)$ folgt analog, dass $p|c$. Insgesamt gilt also $p \geq 1$, $p|a$, $p|b$ und $p|c$; das war zu zeigen.

3. Beweis: Wir verwenden folgenden Hilfssatz:

HS: Gegeben seien drei positive ganze Zahlen r, s und t für die gilt: $r \mid t$, $s \mid t$ und r, s teilerfremd. Dann gilt auch $(rs) \mid t$.

Zum Beweis betrachten wir die – nach Voraussetzung disjunkten – Primfaktorzerlegungen (PFZ) von r und s. Weil $r \mid t$ und $s \mid t$ gilt, ist jeder der darin enthaltenen Faktoren in gleicher Vielfachheit in der

PFZ von t enthalten; umgekehrt ist jeder Primfaktor von t in höchstens einer der beiden PFZ von r bzw. s enthalten. Man kann also den Bruch $\frac{t}{rs}$ vollständig kürzen; das war zu zeigen.

Nun betrachten wir den Bruch $\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$. Weil alle beteiligten Zahlen positiv sind, ist $(a+b)(b+c)(c+a) > abc$, also $0 < \frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} < 1$. Insbesondere ist $\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \notin \mathbb{Z}$.

Nach Voraussetzung teilt jeder Faktor im Nenner den Zähler. Wären nun die drei Zahlen $(a + b)$, $(b + c)$ und $(c + a)$ teilerfremd, wäre nach obigem Hilfssatz $\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \in \mathbb{Z}$, im Widerspruch zu obiger Feststellung. Es ist also ggT($(a + b), (b + c), (c + a)$) $\geq$ 1; damit gibt es eine Primzahl $p \geq 2$, für die $p \mid (a + b)$, $p \mid b + c)$ und $p \mid (c + a)$.

Aus $p \mid (a + b)$ und $(a + b) \mid (ab)$ folgt $p \mid (ab)$; und hieraus – weil p Primzahl ist – $p \mid a$ oder $p \mid b$.

Falls $p \mid a$, folgt zusammen mit $p \mid (a + b)$ auch $p \mid ((a + b) - a)$, also $p \mid b$;
falls $p \mid b$, folgt analog $p \mid a$.

Durch entsprechende Schlussweise folgt aus $p \mid (c + a)$, dass $p \mid a$ und $p \mid c$.

Insgesamt gilt also $p \mid a$, $p \mid b$, $p \mid c$; damit haben a, b und c einen gemeinsamen Teiler, der größer als 1 ist. Das war zu zeigen

Bemerkungen: Aus $\frac{ab}{a+b}$, ganzzahlig, $\frac{bc}{b+c}$ ganzzahlig und ggT(a,b,c) > 1 folgt nicht, dass $\frac{ca}{c+a}$ ganzzahlig ist. (Gegenbeispiel: $(a,b,c) = (15\cdot 14, 15\cdot 1, 15\cdot 2)$. Einen Hinweis auf diese Tatsache erhält man im 3. Beweis, der diese Bedingung nicht benützt.

Aus der . notwendigen Bedingung "$\frac{ab}{a+b} = \frac{ga'gb'}{ga'+gb'} = \frac{ga'b'}{(a'+b')}$ ganzzahlig" können wir ein Verfahren zur Konstruktion von Zahlen a,b mit der geforderten Eigenschaft herleiten: Wähle zwei positive ganze Zahlen a', b' (nicht notwendigerweise teilerfremd) und eine beliebige pos. ganze Zahl k; setze $a := k\cdot a'(a'+b')$, $b = k\cdot b'\cdot(a'+b')$. Dann ist $\frac{ab}{a+b} = \frac{k^2a'b'(a'+b')^2}{k(a'+b')(a'+b')}$..ganzzahlig. Man kann sogar zeigen, dass jedes Paar (a,b), das die Bedingung erfüllt, von dieser Form ist.

Aufgabe 3: Durch einen inneren Punkt einer Kugel werden drei paarweise aufeinander senkrecht stehende Ebenen gelegt. Diese zerlegen die Kugeloberfläche in acht krummlinige Dreiecke. Die Dreiecke werden abwechselnd schwarz und weiß so gefärbt, dass die Oberfläche der Kugel schachbrettartig aussieht.

Man beweise, dass dann genau die Hälfte der Kugeloberfläche schwarz gefärbt ist.

Bezeichnungen: Die drei Ebenen bezeichnen wir mit E_1, E_2 und E_3. Mit E_i' (i = 1, 2, 3) seien diejenigen Ebenen bezeichnet, die punktsymmetrisch zu E_i bezüglich des Mittelpunktes der Kugel liegen. Mit M_i bezeichnen wir die Ebene, die parallel zu E_i ist und durch den Mittelpunkt der Kugel geht; gleichzeitig sei bemerkt, dass M_i die Mittelparallele der Ebenen E_i und E_i' ist. Gelegentlich nennen wir M_1 die *Äquatorebene*, ihren Schnitt mit der Kugel *Äquator*.

1. Beweis: Wir legen so ein Koordinatensystem in den Raum, dass der Mittelpunkt der Kugel mit dem Ursprung zusammenfällt, die Kugel den Radius 1 hat und jede Ebene E_i senkrecht zur x_i – Koordinatenachse ist. Der innere Punkt der Kugel habe die Koordinaten $(p_1|p_2|p_3)$ mit $\Sigma p_i^2 < 1$; o.B.d.A. sei $0 \le p_i < 1$ (i = 1,2,3). Die Ebene E_i hat also die Gleichung $x_i = p_i$, die Ebene E_i' die Gleichung $x_i = -p_i$ (i = 1,2,3).

Wir zerlegen den Raum und damit auch die Kugeloberfläche durch die Ebenen E_i und zusätzlich noch durch die Ebenen E_i'; dadurch werden einige der in der Aufgabenstellung beschriebenen Dreiecke weiter aufgeteilt.

Passend zu dieser Zerteilung ordnen wir jedem Punkt im Raum ein Tripel $(a_1|a_2|a_3)$ mit $a_i \in \{ >, o, < \}$ zu; dabei soll der Eintrag a_i angeben, ob der Punkt "rechts" von E_i / zwischen E_i und E_i' / "links" von E_i' liegt. Formal lautet diese Vorschrift:

Es sei a_i = '>' $\Leftrightarrow$ $x_i > p_i$ und
a_i = 'o' $\Leftrightarrow$ $p_i \ge x_i \ge -p_i$, und
a_i = "<' $\Leftrightarrow$ $x_i < -p_i$.

Allen inneren Punkten des gleichen Flächenstückes auf der Kugel werden die gleichen Tripel zugeordnet, Punkte in verschiedenen Flächenstücken werden verschiedene Tripel zugeordnet, jedes Tripel mit Ausnahme von (o|o|o) kommt bei dieser Zuordnung vor (die zugehörige Punktmenge von (o|o|o) ist auf innere Punkte der Kugel begrenzt). Jedes einzelne Flächenstück besitzt also ein charakteristisches Tripel. Falls eine oder mehrere der Ebenen den Mittelpunkt der Kugel enthalten, entarten manche der Flächenstücke zu einer Linie oder einem Punkt. Die Gesamtaussage bleibt aber trotzdem gültig.

Bewegt man sich auf der Kugeloberfläche von einem Flächenstück zu einem anderen über eine Kante, so ändert sich genau ein Eintrag im zugehörigen charakteristischen Tripel. Die Farbe eines Dreiecks ändert sich dabei genau dann, wenn eine Kante überschritten wird, die durch eine der Ebenen E_i bestimmt wird. Dies ist genau dann der Fall, wenn im zugehörigen charakteristischen Tripel ein Eintrag von '>' verschwindet oder neu hinzukommt, d.h. wenn sich die Anzahl der Einträge '>' um genau 1 ändert. Damit haben zwei Dreiecke genau dann die gleiche Farbe, wenn die Anzahl der '>'–Einträge in ihren charakteristischen Tripeln beide gerade oder beide ungerade sind.

Nun betrachten wir zwei Tripel $(a_1|a_2|<)$ und $(a_1|a_2|>)$ mit $a_1,a_2 \in \{<,o,>\}$. Wenn dem Punkt $(x_1|x_2|x_3)$ des Raumes das Tripel $(a_1|a_2|<)$ zugeordnet wird, dann wird dem Punkt $(x_1|x_2|-x_3)$ das Tripel $(a_1|a_2|>)$ zugeordnet. Offensichtlich liegen diese beiden Punkte achsensymmetrisch bez. M_3.

Da die Kugel in sich achsensymmetrisch bez. M_3 ist, heißt dies bezogen auf Punkte der Kugeloberfläche: Die Punkte der Flächenstücke $(a_1|a_2|<)$ und $(a_1|a_2|>)$ liegen paarweise achsensymmetrisch bezüglich M_3. Damit liegen auch die Flächenstücke selbst symmetrisch, sind also kongruent und insbesondere flächengleich. Entsprechendes gilt für alle Flächenstücke, bei denen die zugehörigen Tripel in zwei Einträgen übereinstimmen und in einem weiteren Eintrag ein '>' bzw. ein '<' haben.

Wir können also die 26 Flächenstücke zu 13 Paaren von flächengleichen Flächenstücken zusammenstellen. Wenn uns dies noch so gelingt, dass in jedem Paar zwei Flächenstücke verschiedener Farbe vorkommen, sind wir fertig. Hierzu geben wir eine konkrete Konstruktion an (vgl. Tabelle), dabei müssen folgende Bedingungen erfüllt sein: Jedes der 26 Tripel kommt genau einmal vor; die Tripel eines Paares unterscheiden sich in genau einem Eintrag, der im einen Tripel '<' und im anderen '>' ist

(Flächengleichheit), die Anzahl der Einträge '>' bzw. '<' sind von verschiedener Parität (verschiedene Färbung):

Zuerst ordnen wir jedem der 9 Tripel, deren dritter Eintrag ein '>' ist, dasjenige Tripel zu, das in den beiden ersten Einträgen übereinstimmt, aber an der dritten Stelle ein '<' hat.

>>>	>o>	><>	o>>	oo>	o<>	<>>	<o>	<<>	>>o	<<o	o<o	<oo
>><	>o<	><<	o><	oo<	0<<	<><	<o<	<<<	><o	<>o	o>o	>oo

Nach Konstruktion sind alle diese Tripel verschieden, in jedem Paar stimmen der 1. und 2. Eintrag überein, im dritten Eintrag kommt je ein '>' und ein '<' vor, d.h. es liegt Symmetrie vor. Zusätzlich hat das zweite Tripel jeden Paares genau einen Eintrag '>' weniger als das erste, die zugehörigen Flächen haben also verschiedene Farbe. Damit sind genau die Tripel gepaart, deren letzter Eintrag verschieden von 'o' ist.

Danach betrachtet man die sechs Tripel, deren letzter Eintrag 'o' und deren vorletzter Eintrag $\neq$ 'o' ist, und schließlich die zwei Tripel, deren letzter und vorletzter Eintrag 'o' ist, das Tripel (o|o|o) bleibt unberücksichtigt. Damit kommt jedes der $2^3 - 1 = 26$ Tripel genau einmal vor. Für die letzten acht Tripel geben wir die Zuordnung 'von Hand' an und überprüfen einzeln, dass die oben formulierten Bedingungen erfüllt sind:

2. Beweis: (stärker an der Anschauung fixierte, letztlich identisch mit dem 1. Beweises, m.E. leichter verständlich und trotzdem exakt genug): Wir zerlegen die Kugeloberfläche weiter durch die Ebenen

E_1', E_2' und E_3' und M_1. Dadurch entstehen insgesamt 34 Flächenstücke; die durch die Aufgabenstellung vorgegeben Färbung behalten wir bei. Falls außer der Ebene M_1 eine oder mehrere der betrachteten Ebenen durch den Mittelpunkt der Kugel gehen, entarten einige dieser Flächenstücke zu einer Linie oder einem Punkt. Die folgenden Aussagen behalten trotzdem ihre Gültigkeit.

Aus Symmetriegründen können wir – wie unten genauer beschrieben – diese 34 Flächenstücke so zu Paaren zusammenfassen, dass die beiden Flächenstücke eines Paares verschiedene Farben haben und zueinander kongruent sind, also den gleichen Flächeninhalt haben. Hieraus folgt dann sofort die Behauptung.

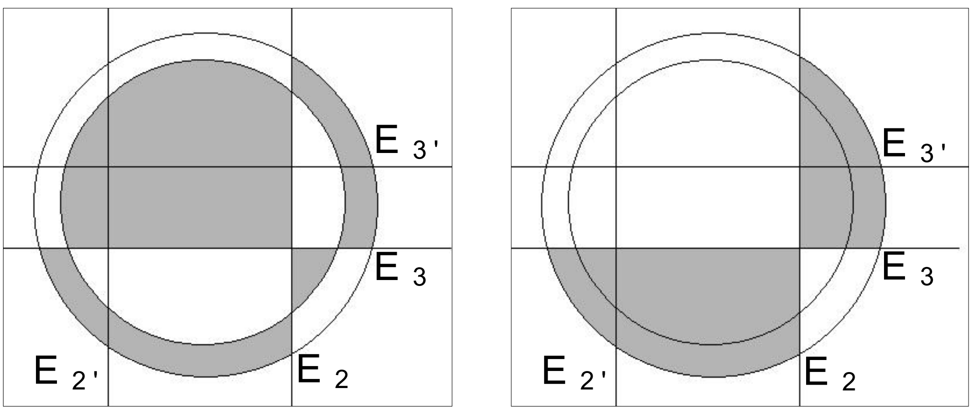
Da die Ebenen M_1, M_2, M_3 paarweise aufeinander senkrecht stehen, führt eine Spiegelung an M_i

die Kugel in sich selbst,
die Ebenen E_j, E_j', E_k und E_k' jeweils in sich selbst,
die Ebene E_i in die Ebene E_i' über und umgekehrt. ($i,j,k \in \{1,2,3\}$, i,j,k verschieden.)

Damit werden auch der Schnitt der Ebene E_i mit der Kugel in den Schnitt der Ebene E_i' mit der Kugel überführt und umgekehrt, und alle anderen Schnitte werden in sich überführt. Damit ist die Menge der Schnittlinien symmetrisch bez. jeder Ebene M_i.

Damit wird jedes der betrachteten Flächenstücke bei jeder Spiegelung an einem der M_i in ein kongruentes, also flächengleiches Flächenstück überführt; mindestens eines dieser Bilder ist disjunkt zu seinem Urbild (nämlich dasjenige, das durch eine Spiegelung an einer Ebene M_i entsteht, die das Flächenstück nicht schneidet).

Nun beschreiben wir die oben angenommene Paarbildung (vgl. Skizze, die eine senkrechte Projektion der Kugeloberfläche auf die Äquatorebene beschreibt, und zwar links für die "untere", rechts für die "obere" der beiden durch die Äquatorebene bestimmten Kugelhälften):



Zuerst betrachten wir die Menge derjenigen Flächenstücke, die nicht zwischen E_3 und E_3' liegen. Sie werden nach Konstruktion nicht von M_3 geschnitten und sind mit ihrem Spiegelbild bzgl. M_3 disjunkt. Das Spiegelbild liegt ebenfalls nicht zwischen E_3 und E_3'. So können wir aus der Menge jeweils die beiden Flächenstücke, die achsensymmetrisch bez. M_3 liegen, zu einem Paar zusammenfassen. Sie sind auch von verschiedener Farbe, da eine Verbindungslinie auf einem Kleinkreis senkrecht zu M_3 (also parallel oder senkrecht zu M_1 bzw. M_2) genau einen Schnittpunkt mit E_3 und keinen oder genau 2 Schnittpunkte mit E_2 bzw. E_1 hat, also auf dem Weg ungeradzahlig oft die Farbe wechselt.

Entsprechend verfahren wir mit der Menge der Flächenstücke, die noch übrig sind und die nicht zwischen E_2 und E_2' liegen (sie werden in Paare von Spiegelbildern bez. M_2 eingeteilt), danach mit den restlichen, die nicht zwischen E_1 und E_1' liegen (Spiegelbildern bez. m_1). Die Paarbildung ist auch unter den jeweils restlichen Flächenstücke möglich, da ein Flächenstück genau dann z.B. zwischen E_3 und E_3' liegt (also unter den restlichen Flächenstücke ist), wenn dies auch für sein Spiegelbild bez. M_2 gilt.

Da es keine Flächenstücke gibt, die zwischen allen Paaren von E_i und E_i' liegen (dies beschreibt einen Raum im Innern der Kugel), haben wir alle Flächenstücke bei der Bildung von Paaren kongruenter und farbverschiedener Flächenstücke berücksichtigt. Das war zu zeigen.

Bemerkungen: Die zusätzliche Zerteilung der Kugeloberfläche durch M_1 ist für die Argumentation nicht nötig. Sie wurde gewählt, um in der Skizze die beiden Kugelhälften getrennt betrachten zu können. In der Argumentation muss man dann von nur 26 Flächenstücken reden; die Zuteilung in Paare ist dann bei beiden Beweisvarianten identisch. (Die abstrakte Bezeichnung 'o' heißt ja, das der betr. Punkt zwischen den Ebenen E_i und E_i' liegt!)

Man kann leicht das ebene Analogon zu dieser Aufgabe beweisen:

Übungsaufgabe: Durch einen inneren Punkt eines Kreises werden zwei senkrecht aufeinander stehenden Geraden gelegt. Diese teilen den Kreis in vier Teilbögen, die abwechselnd weiß und schwarz gefärbt werden. Man beweise, dass die Hälfte des Kreisumfanges weiß gefärbt ist.

Etliche Teilnehmer haben versucht, mit Hilfe dieses Satzes die Aufgabenstellung mit einer – leider falschen – Verallgemeinerung des Cavalieri–Prinzips zu beweisen: Jede Ebene, die parallel zu einer der gegebenen Ebenen ist, schneidet aus den weißen und schwarzen Flächen weiße und schwarze Kreisbögen gleicher Gesamtlänge aus.

Alleine hieraus folgt aber nicht, dass die weißen und schwarzen Flächen den gleichen Inhalt haben. Nötig wären hier noch Überlegungen, in welchem Winkel die betr. Flächen gegen die Schnittebene geneigt sind. Als Gegenbeispiel nehme man den Einheitswürfel ABCDEFGH und die beiden Vierecke ABFE und ABGH: Diese haben sicher verschiedene Flächeninhalte (nämlich 1 bzw. $\sqrt{2}$); trotzdem schneidet jede Ebene, die parallel zur Grundfläche ist, aus den beiden Vierecken Strecken gleicher Länge aus (nämlich Strecken der Länge 1).

Die Aufgabe ließe sich auch über geeignete Integrale auf der Kugeloberfläche lösen. Hierzu müssen Eigenschaften des Riemann'schen Integrals in der Ebene auf die gekrümmte Kugeloberfläche übertragen werden. Dies erfordert aber einen zusätzlichen Argumentationsaufwand, der im Rahmen unserer Wettbewerbsaufgaben übertrieben erscheint.

Aufgabe 4: Auf einem Bücherbord stehen nebeneinander n Bücher ($n \geq 3$) von lauter unterschiedlichen Autoren. Ein Bibliothekar betrachtet das erste und zweite Buch von links und vertauscht diese beiden genau dann, wenn sie nicht in der alphabetischen Reihenfolge ihrer Autoren stehen. Danach macht er das Gleiche mit dem zweiten und dritten Buch von links usw. Auf diese Weise geht er die Buchreihe insgesamt dreimal von links nach rechts durch.

Bei wie vielen verschiedenen Ausgangsanordnungen der Bücher sind diese dann alphabetisch geordnet?

Anmerkung: Die Richtigkeit des Resultates ist zu beweisen.

Antwort: Es gibt genau $6 \cdot 4^{n-3}$ Anordnungen, bei denen die Bücher nach 3 Sortierdurchgängen sortiert sind.

Gemeinsame Bezeichnungen: Wir nummerieren die Positionen der Bücher von links nach rechts mit 1, 2, ..., n; ferner geben wir jedem Buch diejenige Nummer, die der Position des Buches nach einem vollständigen Sortieren entspricht. Außerdem sprechen wir kürzer von "Buch n" bzw. "Position n", wenn wir das "Buch mit der Nummer n" bzw. die "Position mit Nummer n" meinen.

Mit $P(k)$ sei die Position des Buches k zu einem im Begleittext näher bestimmten Zeitpunkt bezeichnet. Die Bücher sind genau dann alphabetisch sortiert, wenn $P(k) - k = 0$ für alle $k = 1, 2, \ldots, n$.

Beweis: Wir bestimmen zunächst eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Bücher nach 3 Durchgängen vollständig alphabetisch sortiert sind. Danach bestimmen wir die Anzahl von Anordnungen, die diese Bedingung erfüllen.

Über die Aufgabenstellung hinaus zeigen wir:

HS: Diejenigen Ausgangsanordnungen der Bücher, bei denen zu Beginn $P(k) - k \leq m$ für alle $k = 1, 2, \ldots, n$ ist (d.h. bei denen zu Beginn kein Buch mehr als m Positionen zu weit rechts steht), sind genau diejenigen Ausgangsanordnungen, die nach höchstens m Durchgängen alphabetisch geordnet sind.

(Die zu zeigende Aussage folgt für $m = 3$.)

Die Bedingung ist **notwendig**: Aus der Konstruktion des Sortiervorganges ist sofort ersichtlich, dass bei einem Durchgang die Position eines Buches höchstens um 1 kleiner werden kann. Wenn die zu beweisende Bedingung nicht erfüllt ist, d.h. wenn es ein Buch k gibt mit $P(k) - k \geq m + 1$, so ist nach m Durchgängen $P(k) - k \geq m + 1 - m \cdot 1 = 1 \neq 0$; d.h. wenn die Bedingung nicht erfüllt ist, steht mindestens ein Buch nicht am gewünschten Platz.

Die Bedingung ist **hinreichend**: Zunächst bemerken wir, dass schon aus der Bedingung $P(k) - k \leq 0$ für alle $k = 1, 2, \ldots, n$ die vollständige alphabetische Sortierung folgt: Gäbe es ein k mit $P(k) - k \neq 0$, also mit $P(k) - k < 0$, dann wäre $k > P(k) \geq 1$. Mindestens eines der $P(k)$ Bücher mit den Nummern $1, \ldots, P(k)$ kann nicht auf den $P(k) - 1$ Plätzen $1, \ldots, P(k) - 1$ stehen. Für dieses Buch – es habe die Nummer $k^* \leq P(k)$ – gilt also $P(k^*) > P(k) \geq k^*$ im Widerspruch zur allgemeinen Voraussetzung $P(k) - k \leq 0$ für alle $k = 1, 2, \ldots, n$.

Die Bedingung sei also erfüllt, d.h. zu Beginn sei $P(k) - k \leq m$ für alle $k = 1, 2, \ldots, n$ und ein $m > 0$. Gleichzeitig nehmen wir an, dass es auch ein k_0 mit $P(k_0) - k_0 = m$ gebe; andernfalls könnten wir m durch $m-1$ ersetzen. Für jedes solche k_0 gilt nach Schubfachprinzip: Mindestens ein Buch auf den $P(k_0) > k_0$ Positionen hat eine Nummer, die größer als k_0 ist. Die größte der Nummern solcher Bücher sei mit k^* bezeichnet; k^* ist gleichzeitig die (einzige!) größte Nummer auf den Positionen $1, 2, \ldots, k_0$.

Nach Konstruktion des Sortieralgorithmus wird bei einem Durchgang dieses Buch solange weiter nach rechts sortiert, bis es auf ein Buch mit höherer Nummer trifft. Dies ist – da k^* die größte Zahl auf den Positionen $1, 2, \ldots, P(k_0)$ ist – frühestens dann der Fall, wenn es auf Position $P(k_0)$ ist. Mit dem Sortiervorgang, mit dem das Buch auf diese Position kam, ist aber das Buch, das zuvor auf dieser Position stand, auf die Position k_0-1 gesetzt worden; d.h. nach dem Durchgang ist $P(k_0) - k_0 = m-1$.

Diese Aussage gilt für alle k_0 mit $P(k_0) - k_0 = m$; nach dem Durchgang gilt also $P(k) - k \leq m - 1$ für alle $k = 1, 2, ..., n$. Mehrfache Anwendung dieser Argumentation ergibt: Nach spätestens m Durchgängen gilt $P(k) - k \leq 0$ für alle $k = 1, 2, ..., n$; d.h. die Bücher sind dann alphabetisch sortiert.

Die **Anzahl** dieser Permutationen erhalten wir für $m = 3$ mit dem Zählprinzip: Für $n = 3$ gibt es $6 = 6 \cdot 4^{3-3}$ Permutationen; diese sind in jedem Falle sogar schon nach zwei Durchgängen sortiert, sie erfüllen also alle die Bedingung. Für $n \geq 4$ kann unter der gegebenen Bedingung das Buch 1 auf einer der vier Position 1, 2, 3 oder 4 stehen. Das Buch 2 (sofern es nicht unter Büchern mit den größten drei Nummern ist) kann auf einer der Positionen 1, 2, ..., 5 stehen, die noch nicht von Buch 1 besetzt sind; das sind ebenfalls vier mögliche Positionen. Dies gilt entsprechend für alle folgenden Positionen mit Ausnahme der letzten drei; diese Bücher können nur noch auf drei bzw. zwei bzw. einer Position(en) stehen. Die Gesamtzahl berechnet sich also zu $4^{n-3} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \cdot 4^{n-3}$.

Bemerkung: Mit höchstens m Sortierdurchgängen sind $m! \cdot (m+1)^{(n-m)}$ verschiedene Anordnungen sortiert.

Der angegebene Sortieralgorithmus wird in der Informatik unter dem Stichwort "Bubblesort" näher beschrieben. Im Internet findet man viele Fragestellungen und Lösungen mit einem Bezug hierzu.