Bundeswettbewerb Mathematik
Wissenschaftszentrum, Postfach 20 14 48, 53144 Bonn
Fon: 0228 - 9 59 15-20 • Fax: 0228 - 9 59 15-29
e-mail: info@bundeswettbewerb-mathematik.de
homepage: www.bundeswettbewerb-mathematik.de

Korrekturkommission • Karl Fegert

Aufgaben und Lösungen

1. Runde 2009

Über Kommentare und Ergänzungen zu diesen Lösungsbeispielen freuen wir uns!

Anschrift oder Email–Adresse s.o.

Stand: 15. Mai 2009

Aufgabe 1: Bei der 202–stelligen Quadratzahl $\underbrace{9...9}_{100\text{ Neunen}}\ z\ \underbrace{0...0}_{100\text{ Nullen}}\ 9$ ist die Ziffer z an der 102–ten Dezimalstelle von rechts nicht lesbar. Ermittle eine mögliche Ziffer, die dort stehen kann!

Anmerkung: Die Richtigkeit des Resultates ist zu beweisen.

Antwort: Eine mögliche Ziffer ist $z = 4$.

1. Beweis: Es ist

$$\underbrace{9...9}_{100\text{ Neunen}}\ 4\ \underbrace{0...0}_{100\text{ Nullen}}\ 9 = 1\underbrace{00...00}_{202\text{ Nullen}} - 6\underbrace{00...00}_{101\text{ Nullen}} + 9 = 10^{202} - 6\cdot10^{101} + 3^2$$
$$= (10^{101})^2 - 2\cdot3\cdot10^{101} + 3^2$$
$$= ((10^{101}) - 3)^2 = (\underbrace{99...99}_{100\text{ Neunen}}7)^2,$$

also das Quadrat einer ganzen Zahl.

2. Beweis: Über die Aufgabenstellung hinaus zeigen wir, dass $z = 4$ und nur diese Ziffer möglich ist:

Es ist $(10^{101})^2 = 10^{202} > \underbrace{9...9}_{100\text{ Neunen}}\ z\ \underbrace{0...0}_{100\text{ Nullen}}\ 9 > \underbrace{9...9}_{100\text{ Neunen}}\ \underbrace{0...0}_{102\text{ Nullen}} = (10^{100} - 1)\cdot10^{102}$

$= (10^{101} - 10)\cdot10^{101} > (10^{101} - 10)^2$.

Also ist, wenn die angegebene Zahl überhaupt Quadrat einer positiven ganzen Zahl a ist, diese Zahl a eine der neun ganzen Zahlen im Intervall $[\ 10^{101} - 9\,;\ 10^{101} - 1\ ]$. Da die letzte Ziffer der angegebenen Zahl die Ziffer 9 ist, muss a die Endziffer 3 oder 7 haben; es ist also notwendigerweise $a = 10^{101} - 7$ oder $a = 10^{101} - 3$.

Die beiden letzten Ziffern der Zahl $(10^{101} - 7)^2$ sind aber nicht ...09, sondern ...49. Also scheidet $a = 10^{101} - 7$ aus und als einziges mögliches a bleibt $a = 10^{101} - 3$. Tatsächlich ist

$$((10^{101}) - 3)^2 = (10^{101})^2 - 2\cdot3\cdot10^{101} + 3^2 = 10^{202} - 6\cdot10^{101} + 3^2 = \underbrace{9...9}_{100\text{ Neunen}}\ 4\ \underbrace{0...0}_{100\text{ Nullen}}\ 9,$$

d.h. es ergibt sich $z = 4$ als Lösung und einzige Lösung.

3. Beweis (Ausschluss aller Ziffern außer $z = 4$, mit Verifikation): Die gegebene Zahl hat die Quersumme $101\cdot9 + z$, nach bekannter Rechenregel (eine Zahl und ihre Quersumme lassen den gleichen Rest bei Division durch 9) lässt sie bei Division durch 9 den gleichen Rest wie $101\cdot9 + z$, und damit den gleichen Rest wie z. Da eine Quadratzahl bei Division durch 9 nur einen der Reste 0, 1, 4, 7 lassen kann, ist also z eine Ziffer mit diesem Rest $\bmod 9$, d.h. es ist notwendig $z \in \{0, 9, 1, 4, 7\}$.

Die alternierende Quersumme der gegebenen Zahl (sie wird durch abwechselndes Addieren und Subtrahieren der Ziffern von rechts her gewonnen) ist $9 - z$; nach bekannter Rechenregel (eine Zahl und ihre alternierende Quersumme lassen den gleichen Rest bei Division durch 11) lässt sie bei Division durch 11 den gleichen Rest wie $9 - z$. Damit muss z eine Ziffer sein, für die $9 - z$ einen der quadratischen Reste $\bmod 11$ hat, d.h. $(9 - z) \in \{0, 1, 4, 9, 5, 3\}$ bzw. $z \in \{9, 8, 5, 0, 4, 6\}$.

Die alternierende Tausenderquersumme der gegebenen Zahl (sie wird durch abwechselndes Addieren und Subtrahieren von Dreierblöcken von rechts her gewonnen) ist $009 - 000 + 000 - ... - z\cdot100 + 999 - 999 + ... + 999 - 9 = 999 - 100\cdot z$. Nach bekannter Rechenregel lassen die gegebene Zahl und ihre alternierende Tausenderquersumme den gleich Rest bei Division durch 13 (sogar auch bei Division durch 11 und durch 7). Es ist $999 - 100\cdot z \equiv 4z - 2 \bmod 13$; es muss also z so gewählt werden, dass $4z - 2$ einen quadratischen Rest $\bmod 13$ lässt, d.h. einen der Werte $\{0, 1, 4, 9, 3, 12, 10\}$. Einfaches Durchprobieren ergibt, dass notwendig $z \in \{3, 4, 6, 7, 8\}$.

Insgesamt erhalten wir aus dem Durchschnitt aller drei Bedingungen die schärfere notwendige Bedingung $z = 4$. Die Probe ergibt, dass $z = 4$ auch hinreichend ist, weil

$$\underbrace{9...9}_{100\text{ Neunen}}\ 4\ \underbrace{0\ ...\ 0}_{100\text{ Nullen}}\ 9 \;=\; ((10^{101}) - 3)^2 \;=\; (\underbrace{99...99}_{100\text{ Neunen}}7)^2\,.$$

Bemerkung: In der Aufgabenstellung wird vorausgesetzt, dass die vorgegebene Zahl eine Quadratzahl ist. Deswegen genügt es zu zeigen, dass alle anderen Ziffern außer $z = 4$ ausscheiden. Im vorangegangenen Beweis wurde trotzdem gezeigt, dass die Bedingung $z = 4$ auch hinreichend ist.

4. Beweis: Es ist eine Ziffer z zu finden, sodass es eine (o.B.d.A. nicht–negative) ganze Zahl k gibt, für die

$$k^2 \;=\; \underbrace{9...9}_{100\text{ Neunen}}\ z\ \underbrace{0\ ...\ 0}_{100\text{ Nullen}}\ 9 \;=\; 10^{202} - 10^{102} + z \cdot 10^{101} + 9 \;=\; 10^{101}\cdot(10^{101} - (10 - z)) + 9.$$

Dies ist äquivalent zu $k^2 - 9 \;=\; 10^{101}\cdot(10^{101} - (10 - z))$ oder $(k + 3)(k - 3) \;=\; 10^{101}\cdot(10^{101} - (10 - z))$

Sofort einsichtig ist, dass der Ansatz $k + 3 \;=\; 10^{101}$ und $k - 3 \;=\; (10^{101} - (10 - z)) \;=\; 10^{101} - 6$ zur Lösung $k \;=\; 10^{101} - 3$ und $z \;=\; 4$ führt.

Für jede andere Ziffer ist dies nicht erfüllt, weil die äquivalente Gleichung $k^2 = 10^{101}\cdot(10^{101} - (10 - z))+9$ für $z < 10$ genau eine positive Lösung hat.

Aufgabe 2:
Zu zwei positiven reellen Zahlen a und b sei $m(a,b)$ die kleinste der drei Zahlen a, $\frac{1}{b}$ und $\frac{1}{a} + b$.
Für welche Zahlenpaare (a,b) ist $m(a,b)$ maximal?

Anmerkung: Die Richtigkeit des Resultates ist zu beweisen.

Antwort: Genau dann, wenn $(a,b) = (\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, ist $m(a,b)$ maximal.

1. Beweis: Wir zeigen (A) $m(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}$ und

(B) für alle anderen Zahlenpaare (a,b) ist $m(a,b) < \sqrt{2}$.

zu (A): Für $(a,b) = (\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ist $\frac{1}{b} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$ und $\frac{1}{a} + b = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$,

also $m(a,b) = \min(a, \frac{1}{b}, \frac{1}{a} + b) = \min(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}) = \sqrt{2}$.

zu (B): Sei (a^*,b^*) ein von (a,b) verschiedenes Zahlenpaar.

Dann ist $a^* = \sqrt{2} + \alpha$ und $b^* = \frac{1}{\sqrt{2}+\beta}$ für geeignete $\alpha,\beta \in\ ]-\sqrt{2};\infty[$, nämlich für $\alpha := a^* - \sqrt{2}$ und $\beta := \frac{1}{b^*} - \sqrt{2}$, wobei mindestens eine der Zahlen α und β verschieden von null ist. Es folgt

$$m(a^*,b^*) = \min(\sqrt{2} + \alpha, \sqrt{2} + \beta, \frac{1}{\sqrt{2}+\alpha} + \frac{1}{\sqrt{2}+\beta});$$

hieraus können wir drei notwendige Bedingungen ableiten:

$$m(a^*,b^*) \le \sqrt{2} + \alpha \text{ (1)}; \quad m(a^*,b^*) \le \sqrt{2} + \beta \text{ (2)}; \quad m(a^*,b^*) \le \frac{1}{\sqrt{2}+\alpha} + \frac{1}{\sqrt{2}+\beta}) \text{ (3)}.$$

Wäre nun $m(a^*,b^*) \ge \sqrt{2}$, so folgte aus (1) und (2) sowohl $\alpha \ge 0$ als auch $\beta \ge 0$, wegen $(a^*,b^*) \ne (a,b)$ sogar schärfer, dass zusätzlich $\alpha > 0$ oder $\beta > 0$. Wenn aber $\alpha > 0$ und $\beta \ge 0$ ist, so ist $\frac{1}{\sqrt{2}+\alpha} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\frac{1}{\sqrt{2}+\beta} \le \frac{1}{\sqrt{2}}$, also folgt aus (3)

$$m(a^*,b^*) \le \frac{1}{\sqrt{2}+\alpha} + \frac{1}{\sqrt{2}+\beta}) < \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

im Widerspruch zur Annahme. Der Fall $\alpha \ge 0$ und $\beta > 0$ führt zum gleichen Widerspruch.

2. Beweis: Wir untersuchen zunächst, für welche Paare (a,c) positiver reeller Zahlen die Funktion $m^*(a,c) := \min(a, c, \frac{1}{a} + \frac{1}{c})$ maximale Werte annimmt. Offensichtlich ist $m(a,b)$ genau dann maximal, wenn $m^*(a, \frac{1}{b})$ maximal ist; dabei muss noch bemerkt werden, dass bei der Substitution mit $b = \frac{1}{c}$ jede positive reelle Zahl b erreicht wird, wenn c alle positiven reellen Zahlen durchläuft.

Die Funktion m^* ist symmetrisch in a und c ist, d.h. es ist $m^*(a,c) = m^*(c,a)$; also können wir o.B.d.A. annehmen, dass $a \le c$.

Falls $c \le \sqrt{2}$, also mit obiger Annahme $a \le c \le \sqrt{2}$, ist $\frac{1}{a} \ge \frac{1}{c} \ge \frac{1}{\sqrt{2}}$, also auch

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c} \ge \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \ge c \ge a;$$

wobei offensichtlich Gleichheit genau dann gegeben ist, wenn $a = c = \sqrt{2}$.

Im vorgegebenen Fall ist also a die kleinste Zahl in der Ungleichungskette, insbesondere gilt

$a \le c \le \sqrt{2} \Rightarrow m^*(a,c) = a \le \sqrt{2}$ mit Gleichheit genau dann, wenn $a = c = \sqrt{2}$.

In jedem anderen Fall, also wenn $c > \sqrt{2}$, ist $m^*(a,c) := \min(a,c,\frac{1}{a}+\frac{1}{c}) < \sqrt{2}$, weil

entweder $\sqrt{2} \le a \le c$ (wobei höchstens einmal Gleichheit gilt),

also $\frac{1}{a} \le \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\frac{1}{c} < \frac{1}{\sqrt{2}}$, also auch $\frac{1}{a}+\frac{1}{c} < \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$;

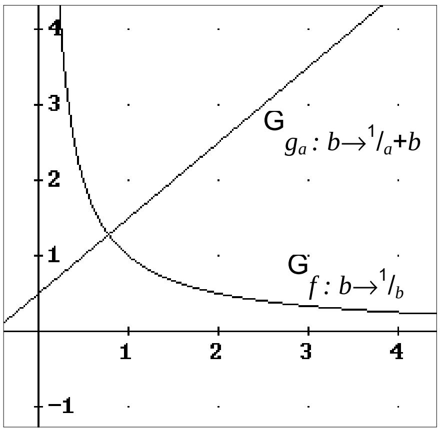
insbesondere ist $m^*(a,c) = \min(a,c,\frac{1}{a}+\frac{1}{c}) = \frac{1}{a}+\frac{1}{c} < \sqrt{2}$,

oder $a < \sqrt{2} < c$, dann ist $m^*(a,c) = \min(a,c,\frac{1}{a}+\frac{1}{c}) \le a < \sqrt{2}$.

Insgesamt erhalten wir also: Für $a = c = \sqrt{2}$ und nur für diese Werte nimmt $m^*(a,c)$ seinen maximalen Wert an; dies ist gleichbedeutend mit

Für $(a,b) = (\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ und nur für dieses Zahlenpaar ist $m(a,b)$ maximal; das war zu zeigen.

3. Beweis: Wir fixieren zunächst a und berechnen $M(a) := \max_b(\min(\frac{1}{b},\frac{1}{a}+b))$, d.h. den größten Wert, den $\min(\frac{1}{b},\frac{1}{a}+b)$ annimmt, wenn b alle positiven reellen Zahlen bei festem Wert a durchläuft.



Eine Betrachtung (vgl. Figur) des Graphen der offensichtlich streng monoton fallenden Funktion von $f: b \mapsto \frac{1}{b}$ und des Graphen der offensichtlich streng monoton steigenden Funktion $g_a: b \mapsto \frac{1}{a}+b$ zeigt, dass der größte Wert von $\min(\frac{1}{b}, \frac{1}{a}+b)$ der Ordinate des Schnittpunktes der beiden Graphen im ersten Quadranten entspricht, der Wert von b, bei dem dieses Maximum angenommen wird, entspricht dessen Abszisse. Diese beiden Werte berechnen wir mit schulüblichen Methoden:

$$f(b) = g_a(b) \Leftrightarrow \frac{1}{b} = \frac{1}{a}+b \Leftrightarrow ab^2 + b - a = 0$$

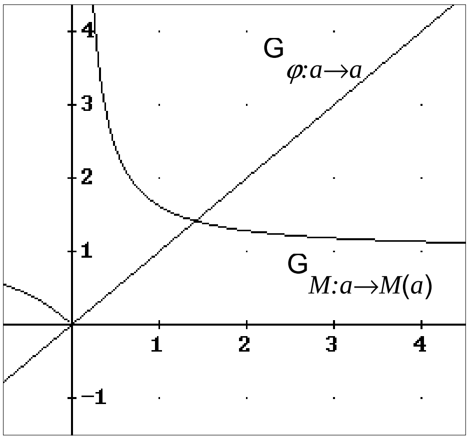
$$\Leftrightarrow b = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4a^2}}{2a} \quad (*);$$

Einsetzen in z.B. g_a ergibt (die negative Lösung entfällt, weil wir nur den Schnittpunkt im 1. Quadranten betrachten)

$$M(a) = \frac{1}{a}+\frac{-1+\sqrt{1+4a^2}}{2a} = \frac{1}{2a}+\sqrt{\frac{1}{4a^2}+1}.$$

Hiermit schließen wir weiter:

$$\max(m(a,b)) = \max(\min(a, \frac{1}{b}, \frac{1}{a} + b)) = \max(\min(a, M(a))) = \max(\min(a, \frac{1}{2a} + \sqrt{\frac{1}{4a^2}+1})).$$



Wie oben schließen wir, dass dieser Wert bei der Abszisse des Schnittpunktes der beiden Graphen von $\varphi : a \mapsto a$ (offensichtlich streng monoton steigend!) und $M : a \mapsto M(a)$ (offensichtlich streng monoton fallend!) angenommen wird. Kurze Rechnung ergibt:

$$\varphi(a) = M(a) \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{2a} + \sqrt{\frac{1}{4a^2}+1}$$

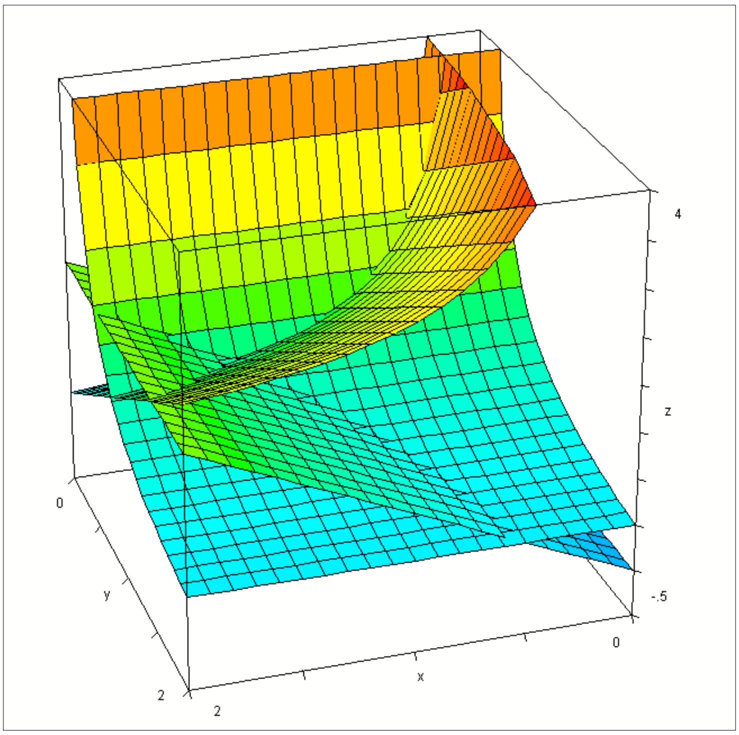
$$\Leftrightarrow \quad (a - \frac{1}{2a})^2 = \frac{1}{4a^2}+1 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad a = \sqrt{2}.$$

Den zugehörigen Wert für b berechnen wir aus (*):

$$b = \frac{-1+\sqrt{1+4a^2}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{1+4\left(\sqrt{2}\right)^2}}{2\sqrt{2}} = \frac{-1+3}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Es ist also m(a,b) maximal, wenn $a = \sqrt{2}$ und $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$, das war zu zeigen.

Bemerkungen: Die Aufgabenstellung erfordert außer dem Nachweis, dass $m(a,b) \le m(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ für alle Zahlenpaare (a,b) gilt, auch den Nachweis, dass Gleichheit nur für $(a,b) = (\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ gegeben ist. In vielen Bearbeitungen fehlte der zweite Nachweis.



Mögliche Herleitung: man betrachtet einen 3–D–Plot (DERIVE) der drei Funktionen $(x,y) \to x$, $(x,y) \to {}^1/_y$ und $(x,y) \to {}^1/_x + y$.

Das gesuchte Minimum $m(a,b)$ kann man ablesen, indem man die Punkte der Flächen mit x–Koordinate a und y–Koordinate b betrachtet; das Minimum ist dann der kleinste z–Wert.

Aus der Figur ist "ersichtlich", dass die $(x|y)$–Koordinaten des gemeinsamen Punktes zum gesuchten maximalen Minimum führen.

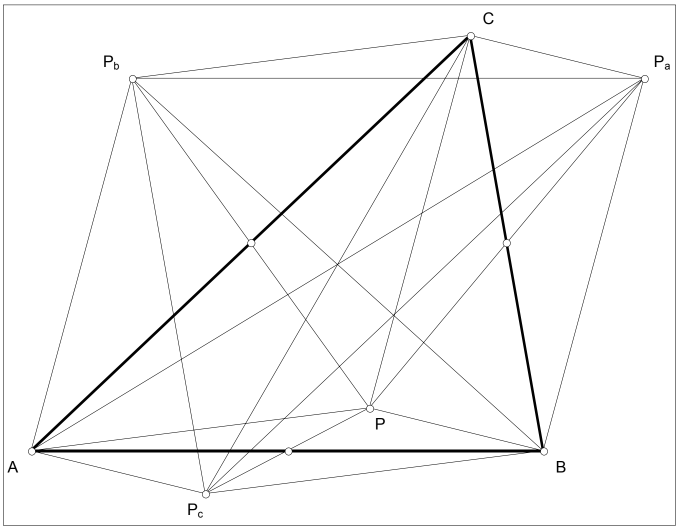
Diese Betrachtung ersetzt aber nicht einen Beweis mit einer formalen Abschätzung.

Aufgabe 3: Ein Punkt P im Innern des Dreiecks ΔABC wird an den Mittelpunkten der Seiten BC, CA und AB gespiegelt; die Bildpunkte werden mit P_a, P_b bzw. P_c bezeichnet.

Beweise, dass sich die Geraden AP_a, BP_b und CP_c in einem gemeinsamen Punkt schneiden!

Bezeichnungen: Die Mittelpunkte der Seiten AB, BC bzw. CA seien mit M_c, M_b und M_a bezeichnet.

1. Beweis (mit Eigenschaften von Parallelogrammen): Über die Aufgabenstellung hinaus werden wir beweisen, dass die Mittelpunkte der angegebenen Strecken zusammenfallen.

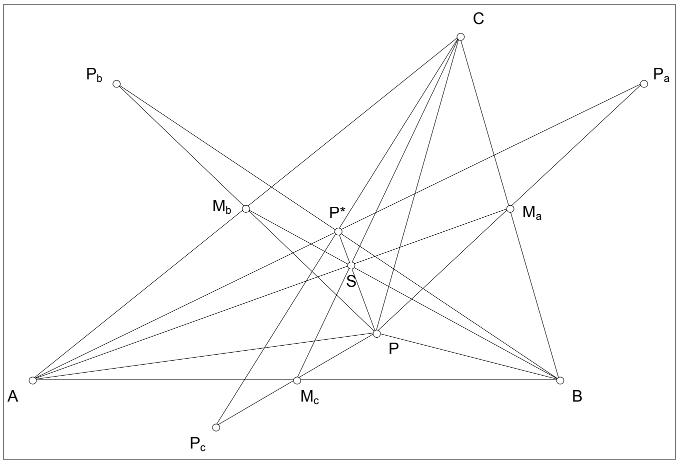


Der Mittelpunkt M_c der Seite AB halbiert nach Konstruktion sowohl die Strecke AB als auch die Strecke PP_c. Damit bilden die Punkte A, P_c, B und P ein Parallelogramm, d.h. die Strecken AP und BP_c sind gleich lang und parallel. (Da P im Innern des Dreiecks, also sicher nicht auf der Geraden (AB) liegt, ist das Parallelogramm nicht entartet.)

Mit analoger Argumentation erhalten wir, dass AP und P_bC gleich lang und parallel sind. Insbesondere bilden die Strecken BP_c und CP_b ein Parallelogramm, d.h. die Diagonalen BP_b und CP_c halbieren sich.

Ebenso bestimmen AP_c und CP_a ein Parallelogramm; d.h. der Mittelpunkt von CP_c ist auch Mittelpunkt von AP_a. Diese Aussage bleibt gültig, auch wenn dieses Parallelogramm entartet ist. Das war zu zeigen.

2. Beweis (Eigenschaften des Schwerpunktes in einem Dreieck): Da M_a Mittelpunkt sowohl von BC als auch von PP_a ist, ist die Seitenhalbierende AM_a des Dreiecks ΔABC auch Seitenhalbierende im Dreieck ΔAPP_a. Der Punkt S auf AM_a, der AM_a im Verhältnis 2:1 teilt, ist damit Schwerpunkt sowohl im Dreieck ΔABC als auch im Dreieck ΔAPP_a.



Da in jedem Dreieck der Schwerpunkt gemeinsamer Punkt aller Seitenhalbierenden ist, ist (PS) die Trägergerade der Seitenhalbierenden im Dreieck ΔAPP_a von der Ecke P aus. Ihr Endpunkt, nämlich der Mittelpunkt der Seite AP_a, ist eindeutig bestimmt als derjenige Punkt P* auf (PS), der so auf (PS) liegt, dass S innerer Punkt der Strecke PP* ist und PP* im Verhältnis 2:1 teilt. Diese Aussage gilt auch, wenn das Dreieck entartet ist, d.h. wenn P auf der Seitenhalbierenden AM_a liegt.

Mit analoger Schlussweise erhält man, dass P* auch Mittelpunkt der Strecken BP_b und CP_c ist; insbesondere ist P* gemeinsamer Punkt von AP_a, BP_b und CP_c.

3. Beweis (Vektorrechnung): Wir legen ein beliebiges Koordinatensystem über die Figur und identifizieren wie üblich Punkte mit ihren Ortsvektoren. Punkte bezeichnen wir mit großen lateinischen Buchstaben, die zugehörigen Ortsvektoren mit den entsprechenden kleinen, fettgedruckten lateinischen Buchstaben. Der zum Mittelpunkt einer Strecke gehörende Ortsvektor lässt sich bekanntlich als halbe Summe der Ortsvektoren der Endpunkte beschreiben.

Damit lassen sich die Ortsvektoren der Punkte P_a, P_b und P_c schreiben als

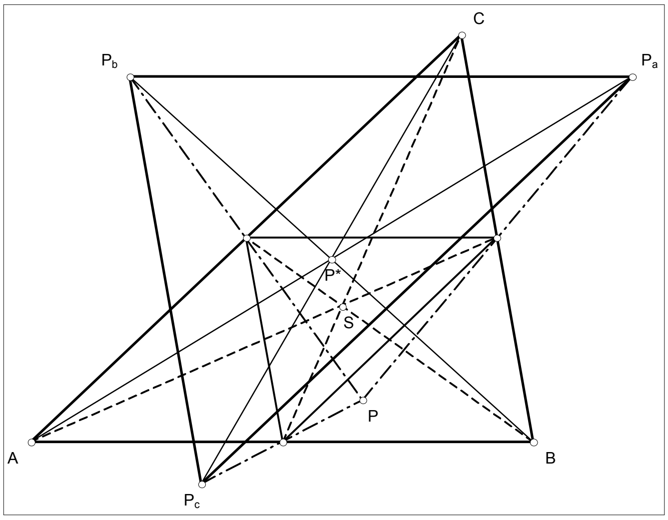
$$\mathbf{p_a} = \mathbf{p} + 2(^1/_2(\mathbf{b} + \mathbf{c}) - \mathbf{p}) = \mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{p} \quad \text{und analog}$$

$$\mathbf{p_b} = \qquad = \mathbf{a} + \mathbf{c} - \mathbf{p} \quad \text{bzw.}$$

$$\mathbf{p_c} = \qquad = \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{p}.$$

Einfache Rechnung im Kopf zeigt, dass die Ortsvektoren der Mittelpunkte der Strecken AP_a, BP_b und CP_c alle die gleiche Form $^1/_2(\,\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{p}\,)$ haben; damit fallen die Mittelpunkte dieser drei Strecken zusammen.

Bemerkung: Dieser Beweis macht deutlich, dass die Aussage des Satzes erhalten bleibt, wenn man die Lage von P nicht auf das Innere des Dreiecks einschränkt. Es ist sogar möglich, die Lage von P frei im Raum zu wählen.



4. Beweis: Wir betrachten die zentrische Streckung $S_1(S;-0{,}5)$, wobei S der Schwerpunkt des Dreiecks ΔABC ist, und die zentrische Streckung $S_2(P;2)$. Bekanntlich ist das Bild von Dreieck ΔABC bei der Streckung S_1 das Mittendreieck $\Delta M_aM_bM_c$; das Bild von $\Delta M_aM_bM_c$ bei der Streckung S_2 ist nach Konstruktionsanweisung der Aufgabe das Dreieck $\Delta P_aP_bP_c$. Die Verkettung zweier zentrischer Streckungen ist bekanntlich wieder eine zentrische Streckung, deren Streckfaktor das Produkt der beiden Streckfaktoren ist, oder eine Parallelverschiebung. In diesem Fall ist der Streckfaktor $-0{,}5 \cdot 2 = -1$; hieraus lesen wir ab, dass die Verkettung der beiden zentrischen Streckungen eine Punktspiegelung ist; sie führt das Dreieck ΔABC in das Dreieck $\Delta P_aP_bP_c$ über. Insbesondere ist das Streckzentrum der Mittelpunkt aller Verbindungsstrecken von Urbild– und Bildpunkten, insbesondere von AP_a, BP_b und CP_c.

Bemerkung: Weiter können wir die Lage dieses gemeinsamen Punktes P* beschreiben: Das Zentrum dieser Punktspiegelung ist derjenige Punkt, der bei der Verkettung der beiden zentrischen Streckungen fix bleibt; dies ist derjenige Punkt P* auf der Geraden (PS), der die Strecke PS im Verhältnis –3 teilt, d.h. der Punkt, der so auf (PS) liegt, dass er außerhalb der Strecke SP liegt und seine Entfernung zu P drei Mal so groß wie die Entfernung zu S ist).

Aufgabe 4: Eine positive ganze Zahl heiße *Dezimal-Palindrom*, wenn ihre Dezimaldarstellung $z_n...z_0$ mit $z \neq 0$ spiegelsymmetrisch ist, d.h. wenn $z_k = z_{n-k}$ für alle $k = 0, 1, ..., n$ gilt.

Zeige, dass jede nicht duch 10 teilbare Zahl ein positives Vielfaches besitzt, das ein Dezimal–Palindrom ist!

Vorbemerkung: Im Zusammenhang mit der Aufgabe ist ein Vielfaches von z immer eine Zahl, die aus z durch Multiplikation mit einer *ganzen* Zahl entsteht.

Formal muss unterschieden werden zwischen einer Zahl und dem Ziffernblock, der ihre Darstellung im Dezimalsystem ist. Da dies jedoch den Text erheblich verlängern kann, wird gelegentlich – wenn keine Missverständnisse zu befürchten sind – hierauf verzichtet und z.B. formuliert "Die erste Ziffer der Zahl ..." anstatt "Die erste Ziffer in der Dezimaldarstellung der Zahl ..."; oder auch "Der Ziffernblock Z ist teilbar durch ..." anstatt "Die Zahl, deren Dezimaldarstellung der Ziffernblock Z ist, ist teilbar durch ..." .

1. Beweis (Konstruktion eines Palindroms zu einer gegebenen Zahl z): Wir stellen diese Konstruktion anhand des konkreten Beispieles $z = 632$ dar; die Verallgemeinerung für beliebige ganze Zahlen z ist unmittelbar einsichtig.

Zunächst kehren wir die Ziffernfolge von $z = 632$ um, erhalten so 236. (Für den allgemeinen Fall bemerken wir noch, dass die gewählte Zahl – da nicht durch 10 teilbar – keine Endnull haben darf, die Zahl mit der umgekehrten Ziffernfolge beginnt also nicht mit einer Ziffer Null). Anschließend betrachten wir die Zahlen, die durch mehrfaches Nebeneinanderschreiben der Dezimaldarstellung dieser Zahl 236 entstehen: 236, 236.236, 236.236.236, ... usw. Bei Division durch 632 lässt jede dieser Zahlen einen der 632 verschiedenen Reste 0, 1, ..., 631; nach Schubfachprinzip kommen also unter den ersten 633 dieser Zahlen zwei mit dem gleichen Rest vor. Die Differenz D dieser beiden Zahlen ist also durch 632 teilbar, d.h. D ist ein Vielfaches von 632.

D hat Dezimaldarstellung D := 236.236. ... .236.000.000. ... .000, d.h. sie besteht aus k Blöcken 236 (für ein geeignetes k mit $1 \leq k \leq 633$), gefolgt von einigen Blöcken 000.

An diese Zahl hängen wir nun k Blöcke 632 an und erhalten so die Zahl

P(632) := 236.236. ... .236.000.000. ... .000.000.632. ... .632.632,

das ist offensichtlich ein Dezimalpalindrom. Die Manipulation mit den Ziffern können wir auch als Rechnung beschreiben: Es ist P(632) = D $\cdot$ 10^p + 632 $\cdot$ 1001. ... 1.001.001 (der letzte Faktor besteht aus k Blöcken 001). Da sowohl D als auch 632 Vielfache von 632 sind, sind beide Summanden und damit auch P(632) Vielfache von 632.

2. Beweis: Wir verwenden drei Hilfssätze aus der Zahlentheorie, von denen die ersten beiden aus dem Schulunterricht bekannt sind und der dritte bewiesen wird:

HS 1: Sei $z = a \cdot b$ und a, b teilerfremd. Dann ist eine ganze Zahl genau dann Vielfaches von z, wenn sie Vielfaches von a und Vielfaches von b ist.

HS 2: Eine Zahl ist genau dann Vielfaches von 2^k bzw. 5^k, wenn die Zahl, die durch den Ziffernblock der letzten k Ziffern bestimmt ist, Vielfaches von 2^k bzw. 5^k ist.

HS 3: Sei s eine ganze Zahl, die weder durch 2 noch durch 5 teilbar ist, sei $Z = [z_{k-1}, z_{k-2}, ... , z_1, z_0]$ ein beliebiger Ziffernblock von k Ziffern ($k = 1, 2, 3, ...$) mit $z_0 \neq 0$. ("Führende" Ziffern 0 sind erlaubt!).
Ferner bezeichnen wir mit Z_i den Ziffernblock, der durch i–maliges Nebeneinanderschreiben von Z entsteht.
Dann ist jedes Z_i Vielfaches von Z und mindestens eines der Z_i ($i = 1, 2, ..., s$) Vielfaches von s.

Beispiel: Mit Z = [00123] und s = 37 erhalten wir: Jede der Zahlen 123.00123.00123. ... .00123 ist Vielfaches von 123, mindestens eine davon (hier: Z_3) ist Vielfaches von 37.

Beweis: Offensichtlich ist $Z_i = Z \cdot$ 100..00100..001 ... ... 100..001, also Vielfaches von Z. Die zweite Aussage zeigen wir durch Widerspruch: Gäbe es kein Vielfaches von s unter den Z_i ($i = 1, 2, ..., s$), dann ließe bei Division durch s jede dieser s Zahlen einen der $(s-1)$

verschiedenen positiven Reste 1, 2, ..., (s–1). Nach Schubfachprinzip gäbe es also zwei Zahlen Z_m und Z_n mit $s \geq m > n \geq 1$, die den gleichen Rest haben, $Y := Z_m - Z_n$ wäre also durch s teilbar.

Die Dezimaldarstellung von Y besteht von links gesehen aus $(m-n)$ nebeneinander geschriebenen Ziffernblöcken Z, gefolgt von n Blöcken von Nullen; es wäre also $Y = Z_j \cdot 10^{k \cdot n}$ mit $0 < j = m - n < s$.

Da Y auch Vielfaches von s ist, erhalten wir zwei Darstellungen von Y:

$$Y = Z_j \cdot 10^{k \cdot n} = s \cdot M$$ für eine geeignete ganze Zahl M.

Beide Darstellungen von Y besitzen die gleiche Primfaktorzerlegung. Da die Primfaktorzerlegung des Faktors s nach Voraussetzung keinen Faktor 2 oder 5 enthält, ist der Faktor $10^n = (2 \cdot 5)^n$ ganz in M, der Faktor s vollständig im Faktor Z_j enthalten. Dies bedeutet wiederum, dass Z_j mit $j < s$ Vielfaches von s im Widerspruch zur Annahme ist.

Zum eigentlichen Beweis konstruieren wir zu einer beliebigen Zahl z, die nicht durch 10 teilbar ist, ein Dezimalpalindrom, das gleichzeitig Vielfaches von z ist.

Da z nicht durch 10 teilbar ist, kann man z schreiben in der Form $z = c^r \cdot s$ für geeignete ganze Zahlen $c \in \{2;5\}$, r und s, wobei s eine Zahl ist, die weder durch 5 noch durch 2 teilbar ist. Die Zahlen c^r und s sind also teilerfremd, nach HS 1 genügt es daher, ein Dezimalpalindrom anzugeben und nachzuweisen, dass es sowohl Vielfaches von c^r als auch von Vielfaches von s ist.

Bei der Konstruktion gehen wir aus von einem geeigneten Vielfachen von c^r, das selbst Dezimalpalindrom ist, d.h. dessen Dezimaldarstellung von der Form $Z = [z_0, z_1, ..., ..., z_1, z_0]$ ist. Ein solches können wir folgendermaßen konstruieren: Wir wählen zuerst ein beliebiges Vielfaches von c^r (z.B. c^r selbst) mit der Form $Z^* = [z_{k-1}, z_{k-2}, ..., z_1, z_0]$;. Wenn Z^* nicht schon selbst palindromisch ist, fügen wir vor z_{k-1} noch so viele Nullen ein, dass der Ziffernblock mindestens r Ziffern besitzt, und schreiben dann davor den Ziffernblock in umgekehrter Reihenfolge; d.h. wir betrachten den Ziffernblock $Z = [z_0, z_1, ..., z_{k-1}, 0, 0, ..., 0, z_{k-1}, z_{k-2}, ..., z_1, z_0]$. Damit ist der Ziffernblock palindromisch; die letzten r Ziffern bilden ein Vielfaches von c^r, nach HS 2 ist also auch Z Vielfaches von c^r.

Nun betrachten wir die Z_i ($i = 1, 2, ..., s$), d.h. die Zahlen, die durch i–maliges Nebeneinanderschreiben von Z entstehen. Weil z kein Vielfaches von 10 ist, ist $z_0 \neq 0$. Offensichtlich ist mit Z auch jedes der Z_i ein Dezimalpalindrom; nach HS 3 ist eines davon Vielfaches von s und gleichzeitig Vielfaches von c^r. Das war zu zeigen.

Beispiel zur Verdeutlichung: Für $z = 1168 = 2^4 \cdot 73$ ist $c = 2$, $r = 4$, $s = 73$, $c^r = 16$. Das palindromische Vielfache von $c^r = 16$ konstruieren wir, indem wir vor den vierziffrigen Block 0016 den umgedrehten Ziffernblock 61 schreiben zu 610.016; viermaliges Nebeneinanderschreiben ergibt das Dezimalpalindrom 610.016.610.016.610.016.610.016; es ist Vielfaches von 1168.

Ebenso können wir zu $c^r = 16$ das durch Probieren gefundene palindromische Vielfache $272 = 16 \cdot 17$ verwenden. Achtmaliges Nebeneinanderschreiben ergibt 272.272.272.272.272.272.272.272; diese Zahl ist Dezimalpalindrom und Vielfaches von 1168.

Variante: Für eine ganze Zahl z, die nicht durch 10 teilbar ist, sei mit $u(z)$ diejenige Zahl bezeichnet, deren Dezimaldarstellung aus der Dezimaldarstellung von z durch Umkehrung der Ziffernfolge entsteht. (Beispiel: $u(5^3) = u(125) = 521$.)

Für $k \in \{1, 2, 3, ...\}$ und $n \in \{0, 1, 2, ...\}$ sei $A(k,n) := \sum_{i=0}^{n} 10^{ki} = 1\underbrace{00...0}_{k-1 \text{ Nullen}}1\underbrace{00...0}_{k-1 \text{ Nullen}}1 \; ... \; 1\underbrace{00...0}_{k-1 \text{ Nullen}}1$,

d.h. $A(k,n)$ ist eine ganze Zahl, deren Dezimaldarstellung aus $n + 1$ Einsen besteht, zwischen denen jeweils Blöcke von je $k - 1$ Nullen eingefügt sind. Offensichtlich ist jedes $A(k,n)$ ein Dezimalpalindrom; wir nennen diese Zahlen *Elementarpalindrome* oder kürzer *E–Palindrome*.

Zum Beweis betrachten wir eine beliebige, nicht durch 10 teilbare Zahl z. Da $10 = 2 \cdot 5$ die Primfaktorzerlegung von 10 ist, kann die Zahl z nicht gleichzeitig durch 2 und durch 5 teilbar sein. Es genügt also, folgende Fälle zu unterscheiden:

Fall 1: Die Zahl z ist weder durch 5 teilbar noch durch 2 teilbar: Wir werden (über die Aufgabenstellung hinaus) zeigen, dass zu jedem vorgegebenen k unter den Vielfachen von z sich ein E–Palindrom $A(k,n)$ befindet, d.h. ein E–Palindrom, bei dem die Anzahl der Nullen in einem Block einen beliebigen vorgegeben Wert annimmt.

Beweis: Für ein beliebiges, aber fest gewähltes k betrachten wir die z+1 verschiedenen E–Palindrome $A(k,i)$ mit $i \in \{0, 1, ..., z\}$ und davon jeweils den Rest mod z. Es gibt z verschiedene Reste mod z, nach Schubfachprinzip haben also zwei dieser Zahlen – sie seien mit $A(k,m)$ und $A(k,n)$ mit $m > n$ bezeichnet – den gleichen Rest mod z, ihre Differenz

$$A(k,m) - A(k,n) = \sum_{i=0}^{m} 10^{ki} - \sum_{i=0}^{n} 10^{ki} = \sum_{i=n+1}^{m} 10^{ki} = 10^{(n+1)k} \sum_{i=0}^{m-n-1} 10^{ki}$$

$$= 10^{(n+1)k} \cdot A(k,m-n-1)$$

ist also durch z teilbar, d.h. jeder Primfaktor von z kommt in der Primfaktorzerlegung von $10^{(n+1)k} \cdot A(k,m-n-1)$ in mindestens der gleichen Häufigkeit vor. Der erste Faktor $10^{(n+1)k}$ hat aber nur Primfaktoren 2 und 5, die laut Voraussetzung in z nicht vorkommen. Also kommt jeder Primfaktor von z auch in der Primfaktorzerlegung von $A(k,m-n-1)$ vor; dieses Elementarpalindrom ist also ein Vielfaches von z.

Fall 2: Die Zahl z ist reine Zweierpotenz oder reine Fünferpotenz, d.h. für eine geeignete Zahl r gilt $z = 2^r$ oder $z = 5^r$. Dann ist $u(z) \cdot 10^r + z = u(z) \cdot 5^r \cdot 2^r + z$ die Summe zweier Zahlen, die beide durch z teilbar sind, also ein Vielfaches von z. Gleichzeitig ist $z \leq 5^r < 10^r < u(z) \cdot 10^r$, d.h. z hat höchstens so viele Ziffern, wie $u(z) \cdot 10^r$ Endnullen hat. Damit geschieht die Addition dadurch, dass bei der Zahl $u(z) \cdot 10^r$ einige der Endnullen durch die Ziffern von z ersetzt werden. Damit besteht die Dezimaldarstellung von $u(z) \cdot 10^r + z$ von links aus dem Ziffernblock von $u(z)$, gefolgt von evtl. einigen Nullen und dann dem Ziffernblock von z. Damit ist diese Zahl ein Dezimalpalindrom.

Fall 3: In allen anderen Fällen ist z von der Form $z = c^r \cdot s$, für geeignete pos. ganze Zahlen c, r und s, wobei $c \in \{2;5\}$ ist und s eine Zahl ist, die weder durch 5 noch durch 2 teilbar ist.

Dann betrachten wir die Zahl $(u(c^r) \cdot 10^r + c^r) \cdot A(k,n)$, wobei wir die Zahl k so wählen, dass sie der Anzahl der Stellen der Dezimaldarstellung von $(u(c^r) \cdot 10^r + c^r)$ entspricht, und die Zahl n so wählen, dass $A(k,n)$ ein Vielfaches von s ist. Nach der Überlegung im Fall 1 ist dies möglich, da s weder durch 2 noch durch 5 teilbar ist. Nach der Überlegung im Fall 2 ist $(u(c^r) \cdot 10^r + c^r)$ ein Vielfaches von c^r und $A(k,n)$ ein Vielfaches von s, ihr Produkt also ein Vielfaches von $c^r \cdot s = z$.

Gleichzeitig ist die Zahl $(u(c^r) \cdot 10^r + c^r)$ nach Konstruktion ein Dezimalpalindrom: Die Dezimaldarstellung von $(u(c^r) \cdot 10^r + c^r) \cdot A(k,n)$ besteht aus der $(n+1)$–fachen Wiederholung des Ziffernblocks, der die Dezimaldarstellung von $(u(c^r) \cdot 10^r + c^r)$ darstellt. Damit ist die betrachtete Zahl ebenfalls ein Dezimalpalindrom.

3. Beweis: Im Rahmen dieses Beweises verwenden wir folgende Bezeichnung: Zu ganzen nicht-negativen Zahlen b und q, $q \geq$ Anz. der Ziffern in der Dezimaldarstellung von b, bezeichne $u_q(b)$ denjenigen Ziffernblock, der entsteht, wenn man in der Dezimaldarstellung von b die Reihenfolge der Ziffern umkehrt und dann so viele Nullen anfügt, dass der entstehende Ziffernblock aus q Ziffern besteht. Je nach Zusammenhang verwenden wir die Bezeichnung auch für die dadurch bestimmte Zahl. (Für z.B. $b = 125$ bezeichnet also $u_5(b)$ den Ziffernblock oder auch die Zahl 52100.)

Zum Nachweis der Behauptung werden wir zu einer beliebig vorgegebenen, nicht durch 10 teilbaren Zahl z in vier Schritten eine Zahl konstruieren und anschließend zeigen, dass die Konstruktionsschritte möglich sind, dass das Ergebnis Vielfaches von z ist und dass die so konstruierte Zahl ein Dezimalpalindrom ist:

1. Wir bestimmen nicht–negative Zahlen c, r und s mit $c \in \{2; 5\}$, s weder durch 2 noch durch 5 teilbar, sodass $z = c^r \cdot s$.
2. Wir wählen ein Vielfaches von z in der Form $V_{p,q} := \underbrace{999...99}_{p \text{ Neunen}}\underbrace{00...0}_{q \text{ Nullen}}$, wobei $p \geq q \geq r$,

   d.h. eine Zahl, deren Dezimaldarstellung von links aus einem Block von p Neunen, gefolgt von einem Block von q Nullen besteht.
3. Zur Zahl $V_{2p,q} = \underbrace{999...99999...99}_{2p \text{ Neunen}}\underbrace{00...0}_{q \text{ Nullen}}$ addieren wir c^r und $u_q(c^r) \cdot 10^{2p+q}$.
4. Davon subtrahieren wir $c^r \cdot 10^p$ sowie $u_q(c^r) \cdot 10^{p+q}$.

(Beispiel zur Verdeutlichung: $z = 592 = 2^4 \cdot 37$; also $c = 2$, $r = 4$, $s = 37$.

Dann ist $c^r = 16$, wir können $p = 6$, $q = 4$ wählen und erhalten die Rechnung (zur übersichtlichen Abgrenzung der Ziffernblöcke gruppieren wir die Ziffern nicht wie üblich zu Dreiergruppen, sondern abwechselnd in Vierer– und Zweiergruppen):

	$V_{2p,q}$	=	99.9999. 9999.99. 0000
+	c^r	=	0016
+	$u_q(c^r) \cdot 10^{2p+q}$	=	6100. 00.0000. 0000.00. 0000
–	$c^r \cdot 10^p$	=	0016.00. 0000
–	$u_q(c^r) \cdot 10^{p+q}$	=	00.6100. 0000.00. 0000
			6100. 99.3899. 9983.99. 0016

Nachweise:

Der Schritt 1 ist immer möglich: Nach Voraussetzung ist z nicht durch 10 teilbar. Die Primfaktorzerlegung von z enthält also höchstens einen der beiden Primfaktoren von 10, also höchstens einen der beiden Primzahlen 2 und 5. Man fasst alle von 2 bzw. 5 verschiedenen Primfaktoren zu einem Faktor s zusammen und erhält so das geforderte $z = c^r \cdot s$.

Der Schritt 2 ist immer möglich: Hierzu betrachten wir die (sicher existierende) Dezimalbruchentwicklung von z^{-1}. Nach bekannten Rechenregeln für Brüche und Dezimalbrüche hat diese immer die Form

$$z^{-1} = 0,[Vorperiode]\,[Periode]\,[Periode]\,[Periode]... ;$$

wobei $[Vorperiode]$ einen evtl. leeren Ziffernblock mit q Ziffern ($q \in \{0, 1, 2...\}$ und

$[Periode]$ einen Ziffernblock mit p Ziffern ($p \in \{1, 2, ...\}$ bezeichnet.

(Ein nicht–periodischer Dezimalbruch wird durch Anhängen von unendlich vielen Nullen ein periodischer Dezimalbruch, d.h. die obige Festlegung enthält mit $[Periode] = 0$ und $p = 1$ auch endliche Dezimalbrüche. Den Fall, dass $[Periode]$ ein aus lauter Neunen bestehender Ziffernblock ist, können wir bekanntlich ausschließen.)

Diesen Dezimalbruch können wir nach bekannten Rechenregeln wieder in einen Bruch zurückwandeln; wir erhalten

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= 0,[Vorperiode]\,[Periode]\,[Periode]\,[Periode]...\\ &= 10^{-q}\cdot(\,[Vorperiode] + 0,[Periode]\,[Periode]\,[Periode]\,...\,).\\ &= \frac{(10^p-1)\cdot[Vorperiode]+[Periode]}{10^q(10^p-1)}.\end{aligned}$$

Nach Multiplikation beider Seiten dieser Gleichung mit den Nennern erhalten wir

$$10^q\cdot(10^p-1) = z\cdot(\,(10^p-1)\cdot[Vorperiode]+[Periode]\,) = c^r\cdot s\cdot M$$
für ein geeignetes ganzzahliges M.

Hieraus lesen wir ab, dass die Zahl auf der linken Seite der Gleichung – ihre Dezimaldarstellung hat die Form $V_{p,q} = \underbrace{999...99}_{p}\underbrace{00...0}_{q}$ – ein Vielfaches von z ist.

Zusätzlich lesen wir ab – da kein Primfaktor von s in 10^q enthalten ist –, dass alle Primfaktoren von s in (10^p-1) enthalten sind, d.h. dass (10^p-1) Vielfaches von s ist.

Multiplikation mit $\underbrace{1\underbrace{00...0}_{p-1\text{ Nullen}}1\underbrace{00...0}_{p-1\text{ Nullen}}1\;...\;1\underbrace{00...0}_{p-1\text{ Nullen}}}_{t\text{ Blöcke}}1\underbrace{00...000}_{w\text{ Nullen}}$ $(t,w\in\{0,1,2,...\})$ ergibt weitere Vielfache von z; diese haben dann die Form $\underbrace{999...99}_{tp}\underbrace{00...0}_{q+w}$. Durch geeignete Wahl von w kann $q+w$ jeden gewählten Wert übertreffen, durch geeignete Wahl von t kann tp jeden beliebig gewählten Wert übertreffen. Das war zu zeigen.

Variante zum Nachweis von Schritt 2: Wir verwenden aus der elementaren Zahlentheorie den

Satz von Euler: Seien a und s teilerfremd, ferner sei $\varphi(s)$:= Anzahl der zu s teilerfremden Zahlen aus dem Intervall $[1,s]$. Dann ist $a^{\varphi(s)}\equiv 1 \bmod s$.

Für $a = 10$ und dazu teilerfremdes s ergibt sich, dass $10^{\varphi(s)}-1 = 999...9$ ein Vielfaches von s ist, ebenso für jedes k die Zahl $(10^{\varphi(s)}-1)\cdot\sum_{i=1}^{k}10^{i\varphi(s)} = 10^{(k+1)\varphi(s)}-1$. Dies ist eine Zahl, deren Dezimaldarstellung aus $k\cdot\varphi(s)$ Neunen besteht; Anhängen von Nullen entspricht einer Multiplikation mit 10. Damit gibt es zu jeder ganzen Zahl der Form 2^p5^qs ein Vielfaches der Form 999...900...00, deren Anzahlen von Nullen und Neunen einen vorgegebenen Wert übersteigt.

Die Schritte 3 und 4 sind beide immer möglich: Es ist $2^r < 5^r < 10^r$, also haben die Dezimaldarstellungen von 2^r und 5^r höchstens r Ziffern. Also ist $u_r(c^r)$ definiert und bestimmt eine positive ganz Zahl, ebenso $c^r\cdot 10^p$, $u_q(c^r)\cdot 10^{2p+q}$ sowie $u_q(c^r)\cdot 10^{p+q}$.

Die so konstruierte Zahl ist Vielfaches von z: Es ist

$$\begin{aligned}&V_{2p,q} + c^r + u_q(c^r)\cdot 10^{2p+q} - c^r\cdot 10^p - u_q(c^r)\cdot 10^{p+q}\\ &\qquad= V_{2p,q} - c^r(10^p-1) + u_q(c^r)\cdot 10^{p+q}\cdot(10^p-1)\\ &\qquad= V_{2p,q} - c^r\cdot s\cdot M' + u_q(c^r)\cdot(2\cdot 5)^{p+q}\cdot s\cdot M'\end{aligned}$$

Jeder der drei Summanden und damit auch die Summe ist Vielfaches von z:

Der erste, weil $V_{2p,q} = 10^q\cdot(10^{2p}-1) = 10^q\cdot(10^p-1)\cdot(10^p+1) = V_{p,q}\cdot(10^p+1)$ und $V_{p,q}$ selbst Vielfaches von z ist,
der zweite, weil er ein Produkt ist, unter dessen Faktoren $c^r\cdot s = z$ vorkommt,
der dritte, weil er ein Produkt ist, unter dessen Faktoren $(2\cdot 5)^{p+q}\cdot s\cdot$ und damit (wegen $p+q \geq r$) ebenfalls $c^r\cdot s = z$ vorkommt.

Die so konstruierte Zahl ist ein Dezimalpalindrom (zur Verdeutlichung verfolge man die Ausführungen am oben angegebenen Beispiel): Die Dezimaldarstellung der Zahl c^r hat höchstens r Ziffern und damit höchstens so viele Ziffern, wie die Dezimaldarstellung von $V_{2p,q}$ am Enden Nullen hat. Die

Addition von c^r zu $V_{2p,q}$ geschieht also dadurch, dass einige der letzten r Nullen von $V_{2p,q}$ (diese existieren wegen $q \geq r$!) durch die Ziffernfolge von c^r ersetzt werden. Andererseits hat die Dezimaldarstellung von $V_{2p,q}$ genau $2p + q$ Ziffern und die Dezimaldarstellung von $u_q(c^r)\cdot 10^{2p+q}$ hat nach dem zu $u_q(c^r)$ gehörenden Ziffernblock genau $2p+q$ Nullen. Also geschieht die Addition von $u_q(c^r)\cdot 10^{2p+q}$ zu $V_{2p,q}$ dadurch, dass in der Dezimaldarstellung von $V_{2p,q}$ die Ziffernfolge von $u_q(c^r)$ vor die Dezimaldarstellung von $V_{2p,q}$ gestellt wird.

Damit besteht die Dezimaldarstellung der nach Schritt 3 konstruierten Zahl von links aus dem Ziffernblock von $u_q(c^r)$ mit q Ziffern, gefolgt von zwei Ziffernblöcken zu je p Neunen und einem Ziffernblock mit q Ziffern (darunter evtl. führenden Nullen), der die Zahl c^r darstellt. Dies ist ein Dezimalpalindrom; die Symmetrieachse liegt zwischen den Ziffern an den Stellen $p+q$ und $p+q+1$.

Die Subtraktion im Schritt 4 erfolgt dadurch, dass der zu c^r gehörende Block vom Block der Ziffern an den Stellen $p+q$, $p+q-1$, ..., $p+1$ abgezogen wird, der zu $u_q(c^r)$ vom Block der Ziffern an den Stellen $p+q+1$, $p+q+2$,... $p+2q < 2p+q$. Diese Blöcke sind disjunkt, sie überlappen sich auch nicht mit den zu c^r und $u_q(c^r)\cdot 10^{2p+q}$ gehörenden Blöcken. Da die Ziffern, von denen subtrahiert wird, alle Neunen sind, entsteht kein Übertrag. Damit ist alles symmetrisch, das Ergebnis ein Dezimalpalindrom.