**Bundeswettbewerb Mathematik**
Wissenschaftszentrum • Postfach 20 14 48 • 53144 Bonn
Fon: 0228 - 9 59 15-20 • Fax: 0228 - 9 59 15-29
e-mail: info@bundeswettbewerb-mathematik.de
www.bundeswettbewerb-mathematik.de

**Korrekturkommission** • Karl Fegert

# Aufgaben und Lösungen

# 2. Runde 2009

**Über Kommentare und Ergänzungen zu diesen Lösungsbeispielen freuen wir uns!**

Anschrift oder Email–Adresse s.o.

Stand: Oktober 2009

**Aufgabe 1**: Zu Beginn eines Spiels liegen in drei Kisten 2008, 2009 bzw. 2010 Spielsteine. Anja und Bernd führen Spielzüge abwechselnd nach folgender Regel durch: Wer am Zug ist, wählt zwei Kisten aus, entleert sie und verteilt danach die Spielsteine aus der dritten Kiste neu auf die drei Kisten, wobei keine Kiste leer bleiben darf. Wer keinen vollständigen Spielzug mehr ausführen kann, hat verloren.

Wer kann den Gewinn erzwingen, wenn Anja anfängt?

**Anmerkung**: Die Richtigkeit des Resultates ist zu beweisen.

**Antwort**: Anja kann den Gewinn erzwingen.

**1. Beweis**: Wir nennen eine Spielsituation *gut für einen Spieler*, wenn der Spieler vor seinem Zug wenigstens eine Kiste mit einer positiven Anzahl von Steinen vorfindet, die den 6er–Rest 3, 4, 5 oder 0 hat (d.h. die bei Division durch 6 den Rest 3, 4, 5 oder 0 lässt); alle anderen Spielsituationen, d.h. wenn nur Anzahlen mit 6er–Rest 1 oder 2 auftreten, nennen wir *schlecht für einen Spieler*.

Über die Aufgabenstellung hinaus zeigen wir: Den Gewinn kann ein Spieler genau dann erzwingen, wenn die Spielsituation gut für ihn ist. Die Richtigkeit der gegebenen Antwort folgt dann sofort aus der Tatsache, dass Anja zu Beginn eine Kiste mit z.B. 2010 Steinen vorfindet, einer Anzahl mit 6er–Rest 0.

Es genügt folgende drei Punkte zu zeigen:

1. Wer in einer guten Spielsituation ist, kann einen gültigen Zug durchführen, der seinen Gegner in eine schlechte Spielsituation bringt:

   Nach Definition findet er eine Kiste vor mit $6k \pm r$ Steinen für eine geeignete ganze Zahl $k \geq 0$ und eine Zahl $r \in \{3, 4, 5, 6\}$. Durch einfaches Nachrechnen stellen wir fest, dass $6k + r$ stets als Summe von drei Zahlen ausgedrückt werden kann, von denen keine einen 6-er–Rest 3, 4, 5 oder 0 hat: es ist nämlich $6k + 3 = (6k+1) + 1 + 1$, $6k + 4 = (6k+1) + 2 + 1$, $6k + 5 = (6k+1) + 2 + 2$, $6k + 6 = (6k+2) + 2 + 2$. Der Spieler am Zug kann also die beiden anderen Kisten auswählen, ausleeren und anschließend die $6k + r$ Spielsteine gemäß obiger Darstellung als Summe von drei Summanden auf die drei Kisten verteilen. Sein Gegenspieler hat dann vor seinem Zug eine schlechte Spielsituation.

2. Wer in einer schlechten Spielsituation ist, kann entweder nicht mehr ziehen und hat damit verloren, oder er kann nur solche Spielzüge durchführen, die seinen Gegner in eine gute Spielsituation bringen:

   Nach Definition findet er in jeder Kiste eine Anzahl von Steinen vor, die in der Form $6k_i + 1$ oder $6k_i + 2$ für geeignete nicht–negative ganzzahlige $k_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$, dargestellt werden können. Wenn jedes der $k_i = 0$, dann sind in keiner Kiste wenigstens 3 Steine und es ist kein Zug mehr möglich. Ist wenigstens eines der $k_i > 0$, dann kann der Spieler am Zug nicht wieder eine schlechte Spielsituation erzeugen: Er müsste die Zahl $6k_i + 1$ bzw. $6k_i + 2$ als Summe von drei Zahlen darstellen, die alle den 6er–Rest 1 oder 2 haben. Die Summe von drei solchen Zahlen ist aber stets eine Zahl mit 6er–Rest 3, 4, 5 oder 0.

3. Das Spiel ist nach endlich vielen Zügen beendet:

   Dies folgt sofort aus der Tatsache, dass in jedem Spielzug mindestens zwei Steine entfernt werden und damit irgendwann die Situation eintritt, dass sich in keiner Kiste mehr als zwei Steine befinden, also kein Zug mehr möglich ist.

Damit ist der Beweis abgeschlossen.

**2. Beweis** (Nachweis der Existenz einer Gewinnstrategie ohne konkrete Beschreibung derselben): Eine Spielsituation, aus der man den Gewinn erzwingen kann, nennen wir gut; entsprechend nennen wir eine Spielsituation schlecht, wenn man aus ihr keinen Zug mehr machen kann oder nur solche Züge machen kann, die den Gegner in eine gute Spielsituation bringen. Des weiteren nennen wir eine Kiste gut, wenn es einen Spielzug gibt, bei dem diese Kiste ausgewählt und der Gegner vor eine schlechte Spielsituation gestellt wird; entsprechend nennen wir eine Kiste schlecht, wenn jeder Spielzug, bei dem diese Kiste ausgewählt wird, den Gegner vor eine gute Spielsituation stellt. Offensichtlich ist eine Spielsituation genau dann gut, wenn sie mindestens eine gute Kiste enthält.

Zunächst zeigen wir, dass jede Spielsituation entweder gut oder schlecht ist: Solange in mindestens einer Kiste noch mehr als zwei Steine vorhanden sind, ist immer ein Zug möglich. Ferner nimmt mit jedem Spielzug die Gesamtzahl der Steine um mindestens 2 ab. Also nimmt nach einer endlichen Anzahl von Zügen die Gesamtzahl der Steine so ab, dass in keiner Kiste mehr als zwei Steine sind. In dieser Spielsituation ist kein Zug mehr möglich, diese Spielsituation ist also schlecht.

Gäbe es nun eine Spielsituation, die weder gut noch schlecht ist, dann auch eine solche mit kleinster Gesamtzahl an Steinen in den Kisten, d.h. jede Spielsituation mit weniger Steinen ist entweder gut oder schlecht. Aus der angenommenen Spielsituation ist ein Zug möglich, da sie insbesondere nicht schlecht ist. Jede mögliche Spielsituation nach diesem Zug ist nach Annahme entweder gut oder schlecht. Ist mindestens eine schlechte darunter, so ist die angenommenes Situation gut, ist keine schlechte darunter, dann ist die angenommene Situation schlecht; beides stellt einen Widerspruch zur Annahme dar.

Nun führen wir den eigentlichen Beweis: Zu zeigen ist, dass in der Anfangsposition wenigstens eine gute Kiste ist. Entweder ist die Kiste mit 2008 Steinen gut, dann sind wir fertig. Oder sie ist schlecht, dann wählt Anja die Kiste mit 2010 Steinen, verteilt 2008 Steine in eine Kiste und je einen Stein in die beiden anderen. Da ein Zug nur bei Auswahl einer Kiste mit mehr als zwei Steinen möglich ist, muss Bernd für seinen Zug die schlechte Kiste mit 2008 Steinen auswählen. Also ist die Kiste mit 2010 Steinen gut.

**Aufgabe 2**: Es sei $n$ eine ganze Zahl, die größer als 1 ist. Beweise, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

(A) Es gibt positive ganze Zahlen $a$, $b$ und $c$, die nicht größer als $n$ sind und für die das Polynom $ax^2 + bx + c$ zwei verschiedene reelle Nullstellen $x_1$ und $x_2$ mit $|x_2 - x_1| \le \frac{1}{n}$ besitzt.

(B) Die Zahl $n$ hat mindestens zwei verschiedene Primteiler.

**1. Beweis** Teil 1: (A) $\Rightarrow$ (B): Es gelte (A). Nach bekannter Formel hat das Polynom $ax^2 + bx + c$ die Nullstellen $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ und es ist $|x_2 - x_1| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}$. Die Nullstellen sind genau dann verschieden, wenn $0 < |x_2 - x_1|$, also $\sqrt{b^2 - 4ac} > 0$ und damit auch $b^2 - 4ac > 0$. Da zusätzlich $a \le n$, so folgt $0 < \sqrt{b^2 - 4ac} \le \frac{a}{n} \le 1$. Da weiter die Zahlen $a$, $b$ und $c$ ganzzahlig sind, folgt schärfer $b^2 - 4ac = 1$ und schließlich $a = n$.

Hieraus schließen wir zunächst, dass $b$ ungerade und größer als 1 ist, d.h. dass es ein positives ganzzahliges $k$ gibt, für das $b = 2k + 1$. Weil $b \le n$, muss $k = \frac{b-1}{2} \le \frac{n-1}{2}$ gelten. Aus $b^2 - 4ac = 1$ folgt $(2k + 1)^2 - 4ac = 1$ und weiter $k(k + 1) = nc$; d.h. die Zahl $nc$ ist das Produkt von zwei teilerfremden Faktoren.

Hätte nun $n$ nur einen Primteiler, d.h. wäre $n$ eine Primzahlpotenz, so gälte wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung und der Teilerfremdheit von $k$ und $(k+1)$ entweder $n \mid k$ oder $n \mid (k+1)$, in jedem Fall also $k \ge n - 1$ im Widerspruch zu $k \le \frac{n-1}{2}$.

Teil 2: (B) $\Rightarrow$ (A): Hat man umgekehrt zur vorgegebenen Zahl $n$ eine positive ganze Zahl $k$ gefunden mit $k \le \frac{n-1}{2}$ und $k(k + 1) = nc$ für ein geeignetes positives ganzzahliges $c$, so erfüllen nach den Überlegungen im ersten Beweisteil die Zahlen $a := n$, $b := 2k + 1$ und $c := \frac{k(k+1)}{n} \le \frac{(n-1)(n+1)}{4n} \le \frac{n}{4}$ die Bedingung (A): Es sind dann nämlich $a$, $b$ und $c$ ganzzahlig, positiv und nicht größer als $n$, und weiter $\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{(2k+1)^2 - 4n\frac{k(k+1)}{n}} = \sqrt{4k^2 + 4k + 1 - 4k^2 - 4k} = 1$, d.h. für die Nullstellen des Polynoms $ax^2 + bx + c$ gilt tatsächlich $|x_2 - x_1| \le \frac{1}{a} = \frac{1}{n}$

Aus der Bedingung (B) kann man nun die Existenz einer solchen Zahl $k$ folgendermaßen herleiten: Nach Voraussetzung hat die Zahl $n$ mindestens zwei Primteiler, d.h. man kann sie als Produkt $n = r \cdot s$ zweier teilerfremder Zahlen $r > 1$ und $s > 1$ schreiben.

Bekanntlich lässt sich der größte gemeinsame Teiler zweier ganzer Zahlen als Linearkombination dieser beiden Zahlen schreiben. Auf unser Problem angewandt heißt dies, dass es ganze Zahlen $x,y$ gibt, für die $ys - xr = 1$; dabei kann man sogar $1 \le x,y < rs = n$ wählen.

Nun definieren wir $k := xr$ und $c := xy$, dann ist $k + 1 = xr + 1 = ys$ und wie gewünscht $k(k + 1) = xrys = nc$. Falls $k \le \frac{n-1}{2}$, sind wir fertig. Wenn nicht, definieren wir $k' := n - ys = n - (k + 1)$ und $c' := n - (2k+1) + c$. Wegen $ys < n$ ist $k' \ge 1$ und wir erhalten $k'(k' + 1) = (n - (k + 1))(n - k) = n^2 - n(2k+1) + k(k + 1) = n(n - (2k+1) + c) = nc'$; dabei ist offensichtlich $k'(k' + 1)$ positiv und damit auch $c'$. Schließlich ist $k + k' = n - 1$, und da $k > \frac{n-1}{2}$, muss $k' < \frac{n-1}{2}$ sein. Damit ist $k$ oder $k'$ eine Lösung für unser Problem.

**Variante** (knapp skizziert) zur Konstruktion von $k$ in Teil 2: Wir suchen also zu vorgegebenem $n$ ganzzahlige Lösungen $(k,c)$ der Gleichung $k(k + 1) = nc$; d.h. nach Lösungen der Kongruenz $k(k + 1) \equiv 0 \bmod (n)$.

Sei $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{e_i}$ die Primfaktorzerlegung von $n$. Eine Zahl $k$ mit $1 \le k \le n - 1$ ist genau dann eine solche Lösung, wenn $k$ eine Lösung von einem der $2^r$ linearen Systeme aus $r$ linearen Kongruenzen $k \equiv -d_i \bmod p_i^{e_i}$ mit $d_i \in \{0, 1\}$ ist. Die Moduln der einzelnen Kongruenzen sind teilerfremd, also besitzt nach Chinesischem Restsatz jedes System genau eine Lösung $k$ mit $1 \le k \le n$, diese Lösungen sind auch paarweise verschieden. Insgesamt haben wir also zunächst $2^r$ Lösungen.

Nun berücksichtigen wir noch, dass schärfer $k \le \frac{n-1}{2}$ gefordert wird. Dadurch wird die Anzahl der Lösungen auf $2^{r-1} - 1$ eingeschränkt: Zunächst verschwinden die Lösungen $k = 0$ und $k = n$ der Systeme mit allen $d_i = 0$ bzw. $d_i = 1$; außerdem können wir jeder Lösung $k$ mit $0 < k \le \frac{n-1}{2}$ des Systems $k \equiv -d_i \bmod p_i^{e_i}$ bijektiv die Lösung $k' = n - k - 1$ mit $n - 1 > k' \ge \frac{n-1}{2}$ des Systems $k \equiv -1 + d_i \bmod p_i^{e_i}$ zuordnen. Also beträgt die Gesamtzahl möglicher Lösungen $2^{r-1} - 1$, dies ist genau dann positiv, wenn $r > 1$, d.h. wenn $n$ mindestens 2 Primfaktoren hat.

**Aufgabe 3**: Gegeben seien ein Dreieck ABC und ein Punkt P auf der Seite AB. Ferner sei Q der von C verschiedene Schnittpunkt der Geraden CP mit dem Umkreis des Dreiecks.

Beweise, dass die Ungleichung $\frac{\overline{PQ}}{\overline{CQ}} \le \left(\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}+\overline{CB}}\right)^2$ gilt und dass Gleichheit genau dann besteht, wenn CP die Winkelhalbierende des Winkels $\angle ACB$ ist.

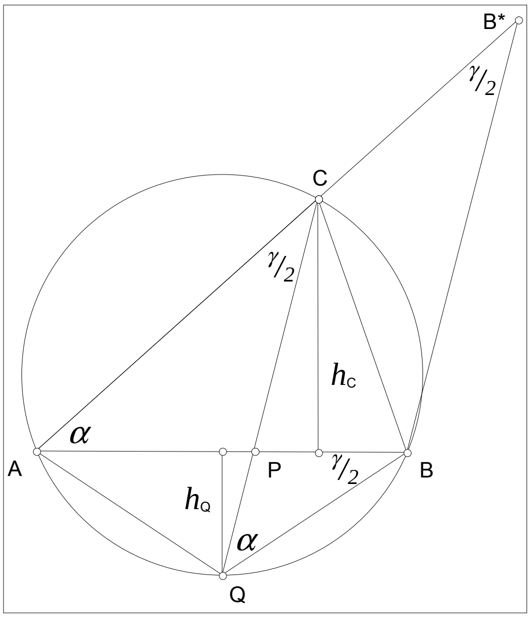
**Bezeichnungen**: Wir benützen im Dreieck $\Delta ABC$ die üblichen Bezeichnungen, also für die Längen der Dreieckseiten wie üblich $a$, $b$ und $c$, für die Winkelgrößen $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ usw.

**Bemerkung**: Ursprünglich lautete die zu beweisende Ungleichung $\left(\frac{\overline{AC}+\overline{CB}}{\overline{AB}}\right)^2 \le \frac{\overline{CQ}}{\overline{PQ}}$ und die Lage des Punktes P war auf das *Innere der Seite AB* beschränkt. Erfahrungen aus früheren Jahren haben gezeigt, dass diese Formulierung für Schüler äußerst missverständlich ist. So wurde diese Bedingung weggelassen und zur Vermeidung von evtl. verschwindenden Nennern die Kehrwerte gegeneinander abgeschätzt. Dies macht allerdings bei vielen Beweisen die Betrachtung des Sonderfalls P = A oder P = B notwendig.

**1. Beweis**: Mit $h_C$ und $h_Q$ seien die Längen der Lote von C bzw. Q auf die Seite AB bezeichnet.

Zunächst stellen wir fest, dass der Term auf der rechten Seite einen festen positiven Wert unabhängig von der Lage von P annimmt. Es genügt also zu zeigen, dass die linke Seite genau dann den maximalen Wert annimmt, wenn P auf der Winkelhalbierenden $w_\gamma$ liegt und dass in diesem Fall Gleichheit besteht.

Es ist nach Strahlensatz $\frac{\overline{PQ}}{\overline{CQ}} = \frac{h_Q}{h_Q+h_C} = 1-\frac{h_C}{h_Q+h_C}$; im Bruch auf der rechten Seite ist $h_Q$ nicht negativ und $h_C$ ist konstant und positiv. Damit hat der Term auf der rechten Seite seinen maximalen Wert genau dann, wenn $h_Q$ maximal ist, d.h. wenn Q auf der Mittelsenkrechten der Strecke AB liegt. Nach dem "Südpolsatz" (unter diesem Stichwort in Wikipedia zu finden) ist dies wiederum genau dann der Fall, wenn CQ Winkelhalbierende des Winkels $\angle ACB$ ist. (Beweis: Das Dreieck AQB ist genau dann gleichschenklig mit $\overline{AQ} = \overline{QB}$, wenn die beiden Umfangswinkel über diesen Sehnen gleich sind, d.h. wenn CQ den Winkel $\angle ACB$ halbiert).

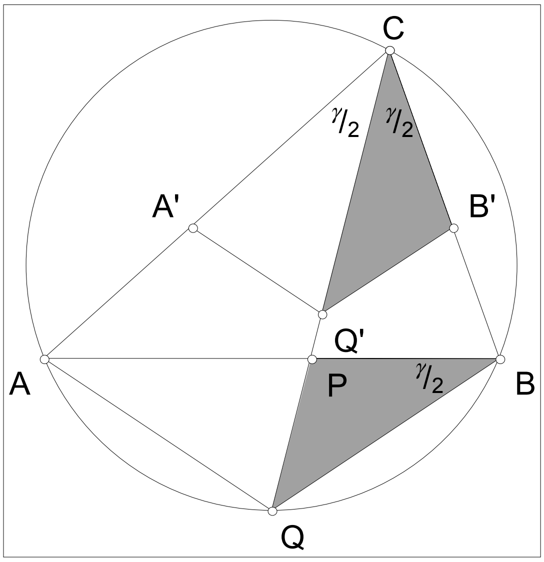



Nun zeigen wir noch, dass in diesem Fall Gleichheit besteht: Hierzu bestimmen wir auf der Halbgeraden [AC den Punkt B* so, dass $\overline{CB^*} = \overline{CB}$. Einfache Winkelbetrachtung im gleichschenkligen Dreieck $\Delta BCB^*$ zeigen, dass $\angle AB^*B = \frac{1}{2}\gamma = \angle ACP$; zusammen mit weiteren einfachen Winkelbetrachtungen im Sehnenviereck AQBC folgt, dass die Dreiecke $\Delta ABB^*$, $\Delta QPB$ und $\Delta QBC$ gleiche Innenwinkel haben, nämlich $\frac{1}{2}\gamma$ an den Ecken B*, B bzw. C sowie $\alpha$ an den Ecken A, Q bzw. Q. Sie sind damit ähnlich und es folgt sofort wie gewünscht

$$\left(\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}+\overline{CB}}\right)^2 = \left(\frac{\overline{AB}}{\overline{AB^*}}\right)^2 = \left(\frac{\overline{QP}}{\overline{QB}}\right)^2 = \left(\frac{\overline{QP}}{\overline{QB}}\cdot\frac{\overline{QP}}{\overline{QB}}\right) = \left(\frac{\overline{QP}}{\overline{QB}}\cdot\frac{\overline{QB}}{\overline{QC}}\right) = \frac{\overline{PQ}}{\overline{CQ}}.$$

**2. Beweis** (über Flächenbetrachtungen): Wir betrachten den Flächeninhalt des Dreiecks $\Delta AQB$ und des Vierecks AQBC. Da die Diagonale AB des Vierecks gleichzeitig Grundseite des Dreiecks $\Delta AQB$ ist und P der Schnittpunkt der beiden Diagonalen, hat das Verhältnis ihrer Flächeninhalte den Wert $\frac{\overline{PQ}}{\overline{CQ}}$, also den Wert auf der linken Seite der zu beweisenden Ungleichung.

Weiter betrachten wir die zentrische Streckung mit Zentrum C und Streckfaktor $k := \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}+\overline{CB}}$. Die Bilder von A, Q und B bei dieser Abbildung bezeichnen wir mit A', Q' bzw. B'. Nach bekannten Sätzen hat das Verhältnis der Flächeninhalte von Viereck AQBC und Viereck A'Q'B'C den Wert $k^2$, also den Wert auf der rechten Seite der zu beweisenden Ungleichung. Es genügt also zu zeigen, dass der Flächeninhalt von $\Delta AQB$ nie größer ist als der Flächeninhalt von Viereck A'Q'B'C und dass Gleichheit genau dann besteht, wenn CQ die Winkelhalbierende von $\angle ACB$ ist.




Zunächst stellen wir fest, dass $\frac{\overline{PQ}}{\overline{CQ}}$ genau dann maximal wird, wenn das Dreieck $\Delta AQB$ einen maximalen Flächeninhalt hat, d.h. wenn Q den maximalen Abstand von AB hat. Dies ist genau dann der Fall, wenn das Dreieck ACB gleichschenklig mit Basis AB ist, was wiederum äquivalent mit der Aussage ist, dass CQ die Winkelhalbierende ist ("Südpolsatz"). Da der Wert auf der rechten Seite der zu beweisenden Ungleichung konstant und unabhängig von der Lage von P ist, genügt es also zu zeigen, dass in diesem Fall und nur in diesem Fall Gleichheit besteht.

Sei also CQ Winkelhalbierende von $\angle ACB$. Dann haben die Dreiecke $\Delta A'CQ'$ und $\Delta PAQ$ gleiche Innenwinkel, nämlich $\frac{1}{2}\gamma$ bei C bzw. A (diese sind gleiche Winkel über der gemeinsamen Sehne QB), ferner bei Q' bzw. Q (die Geraden QA und Q'A' sind nach Konstruktion parallel). Die Dreiecke sind also ähnlich, und da die Winkelhalbierende die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt, gilt $\frac{\overline{AP}}{\overline{AC}} = \left(\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}+\overline{CB}}\right) = k = \frac{\overline{A'C}}{\overline{AC}}$, also $\overline{AP} = \overline{A'C}$. Damit sind die beiden Dreiecke sogar kongruent und insbesondere flächengleich. Entsprechendes gilt für die Dreiecke $\Delta B'CQ'$ und $\Delta PBQ$; durch Addition erhalten wir wie gewünscht, dass das Viereck A'Q'B'C den gleichen Flächeninhalt wie das Dreieck $\Delta AQB$ hat.

**3. Beweis** (Satz von Ptolemäus, Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel): Ist P = A oder P = B, so ist die Ungleichung erfüllt und es liegt keine Gleichheit vor, da dann auf der linken Seite Null steht und rechts ein positiver Wert.

Sei also $P \neq A$ und $P \neq B$, insbesondere ist dann auch $\overline{PQ} \neq 0$. Dann ist die zu beweisende Ungleichung äquivalent (es tritt auch stets gleichzeitig Gleichheit bzw. Ungleichheit auf) mit

$$\left(\frac{\overline{AC}+\overline{CB}}{\overline{AB}}\right)^2 \leq \frac{\overline{CQ}}{\overline{PQ}} .$$

Wir verwenden den bekannten Satz von Ptolemäus:

**HS**: Im Sehnenviereck ist das Produkt der Diagonalen gleich der Summe der Produkte gegenüberliegender Seiten.

Mit den Bezeichnungen unserer Aufgabe ist also $\overline{AC}\cdot\overline{BQ}$ + $\overline{CB}\cdot\overline{QA}$ = $\overline{AB}\cdot\overline{CQ}$. Wir wählen eine Längeneinheit so, dass $\overline{AB}$ = 1, und können so die zu beweisende Ungleichung äquivalent umformen (die Äquivalenz erhält auch die Gleichheit und Ungleichheit):

$$\left(\frac{\overline{AC}+\overline{CB}}{\overline{AB}}\right)^2 \le \frac{\overline{CQ}}{\overline{PQ}} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\overline{AC}+\overline{CB}\right)^2 \le 1\cdot\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CQ}}{\overline{PQ}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\overline{AC}+\overline{CB}\right)^2 \le \frac{\overline{AC}\cdot\overline{BQ}+\overline{CB}\cdot\overline{QA}}{\overline{PQ}}$$

Da das Viereck AQBC ein Sehnenviereck ist, sind die von den Diagonalen bestimmten Dreiecke $\Delta$APQ und $\Delta$CPB ähnlich, ebenso $\Delta$CPA und $\Delta$BPQ. Hieraus folgt $\frac{\overline{AQ}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{PB}}$ und $\frac{\overline{BQ}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{PA}}$; dies setzen wir ein und formen weiter äquivalent um zu

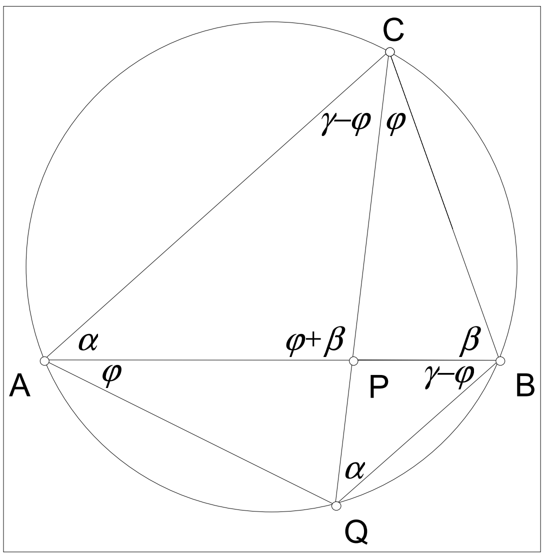
$$\ldots \Leftrightarrow \left(\overline{AC}+\overline{CB}\right)^2 \le \overline{AC}^2\cdot\frac{1}{\overline{AP}}+\overline{CB}^2\cdot\frac{1}{\overline{PB}} \quad \text{mit } \overline{AP}+\overline{PB} = 1.$$

Die Gültigkeit dieser Ungleichung zeigen wir mit Hilfe der Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel (d.h. es ist AM($x$,$y$) ≥ GM($x$,$y$) und Gleichheit genau dann, wenn $x = y$):

$$\begin{aligned}\left(\overline{AC}+\overline{CB}\right)^2 &= \overline{AC}^2+\overline{CB}^2+2\cdot\overline{AC}\cdot\overline{BC} = \overline{AC}^2+\overline{CB}^2+2\cdot\sqrt{\overline{AC}^2\cdot\frac{\overline{PB}}{\overline{AP}}\cdot\overline{BC}^2\cdot\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}}\\ &\le \overline{AC}^2+\overline{CB}^2+\overline{AC}^2\cdot\frac{\overline{PB}}{\overline{AP}}+\overline{BC}^2\cdot\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \left(\overline{AP}+\overline{PB}\right)\cdot\left(\overline{AC}^2\cdot\frac{1}{\overline{AP}}+\overline{BC}^2\cdot\frac{1}{\overline{PB}}\right)\\ &= 1\cdot\left(\overline{AC}^2\cdot\frac{1}{\overline{AP}}+\overline{BC}^2\cdot\frac{1}{\overline{PB}}\right).\end{aligned}$$

Gleichheit ist dabei genau dann gegeben, wenn $\overline{AC}^2\cdot\frac{\overline{PB}}{\overline{AP}} = \overline{BC}^2\cdot\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$; diese Bedingung vereinfachen wir zu $\frac{\overline{AC}^2}{\overline{CB}^2} = \frac{\overline{AP}^2}{\overline{PB}^2}$, was äquivalent zur Bedingung "CP ist Winkelhalbierende von $\angle$ACB" ist. Damit ist der Beweis abgeschlossen.

**4. Beweis** (mit trigonometrischen Umformungen): Ist P = A oder P = B, so ist die Ungleichung erfüllt und es liegt keine Gleichheit vor, da dann auf der linken Seite Null steht und rechts ein positiver Wert.




Sei also P $\neq$ A und P $\neq$ B, es ist dann auch P $\neq$ Q und es gibt keine entarteten Dreiecke in der Figur; d.h. wir können überall den Sinus–Satz anwenden. Wir bezeichnen die Weite des Winkels $\angle$QCB mit $\varphi$. Anwendung des Umfangswinkelsatzes ergibt $\angle$QAB = $\varphi$, $\angle$ABQ = $\gamma-\varphi$, $\angle$CBQ = $\beta+\gamma-\varphi$ = 180° – ($\alpha+\varphi$), $\angle$CQB = $\alpha$, ferner ist $\angle$CPA = $\angle$QPB = 180° – $\alpha$ – ( $\gamma-\varphi$) = $\varphi+\beta$.

Nach Sinus–Satz kann man in einer Verhältnisgleichung die Streckenlängen eines Dreiecks durch die Sinus-Werte der gegenüberliegenden Winkel ersetzen; Anwendung in den Dreiecken $\Delta$QPB und $\Delta$CQB ergibt mit bekannten trigonometrischen Umwandlungsformeln (z.B. $\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$):

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{CQ}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{QB}}\cdot\frac{\overline{QB}}{\overline{CQ}} = \frac{\sin(\gamma-\varphi)}{\sin(\varphi+\beta)}\cdot\frac{\sin(\varphi)}{\sin(\varphi+\alpha)} = \frac{\frac{1}{2}\left(\cos(2\varphi-\gamma)-\cos(\gamma)\right)}{\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(2\varphi+\alpha+\beta)\right)}$$

$$= \frac{\cos(2\varphi-\gamma)+\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha-\beta)-\cos(\gamma)}{\cos(\alpha-\beta)+\cos(2\varphi-\gamma)} = 1-\frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\gamma)}{\cos(\alpha-\beta)+\cos(2\varphi-\gamma)}$$

$$\le 1-\frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\gamma)}{\cos(\alpha-\beta)+1} = \frac{1-\cos(\gamma)}{1+\cos(\alpha-\beta)},$$

wobei Gleichheit genau dann angenommen wird, wenn $\varphi = \frac{1}{2}\gamma$, also wenn CP Winkelhalbierende von $\angle$CAB ist. (Zähler und Nenner der Brüche vor und nach dem " ≤ "–Zeichen sind sicher positiv!)

Dieser Maximalwert entspricht dem Wert auf der rechten Seite der zu beweisenden Ungleichung, wie folgende Umformung zeigt:

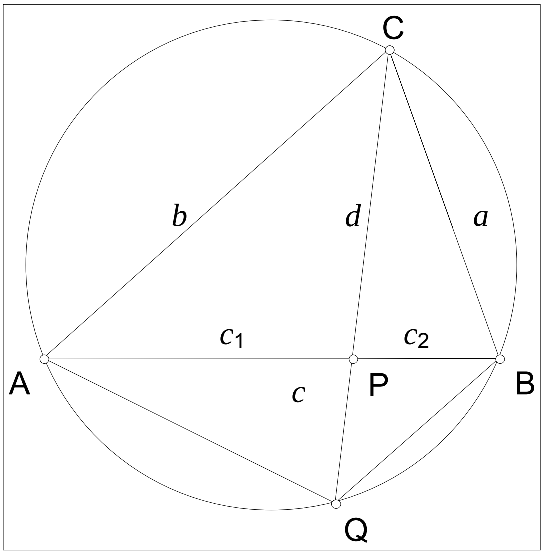
$$\left(\frac{\overline{AC}+\overline{CB}}{\overline{AB}}\right)^2 = \left(\frac{\sin(\gamma)}{\sin(\beta)+\sin(\alpha)}\right)^2 = \left(\frac{2\sin(\frac{\gamma}{2})\cos(\frac{\gamma}{2})}{2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})+\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})}\right)^2 = \left(\frac{\sin(\frac{\gamma}{2})\cos(\frac{\gamma}{2})}{\cos(\frac{\gamma}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})}\right)^2$$

$$= \frac{\sin^2(\frac{\gamma}{2})}{\cos^2(\frac{\alpha-\beta}{2})} = \frac{\frac{1}{2}\left(1-\cos(\gamma)\right)}{\frac{1}{2}\left(1+\cos(\alpha-\beta)\right)}.$$

Das war zu zeigen. Es sei noch bemerkt, dass die Nenner in den verwendeten Brüchen nie den Wert Null annehmen können; dies folgt aus der Tatsache, dass die betrachteten Winkel nie die Weite 0° oder 180° haben.

**5. Beweis** (mit Satz von Stewart): Wir verwenden die in Dreiecken üblichen Bezeichnungen für die Längen der Seiten; ferner sei $c_1 := \overline{AP}$ und $c_2 := \overline{PB}$, also $c = c_1 + c_2$, sowie $d = \overline{CP}$.

Ist P = A oder P = B, so ist die Ungleichung erfüllt und es liegt keine Gleichheit vor, da dann auf der linken Seite Null steht und rechts ein positiver Wert.




Sei also P ≠ A und P ≠ B, es ist dann auch P ≠ Q und alle im Folgenden vorkommenden Nenner sind von Null verschieden. Die zu beweisende Ungleichung kann äquivalent umgeformt werden zu

$$\frac{\overline{CQ}}{\overline{PQ}} - \left(\frac{a+b}{c}\right)^2 \ge 0$$

Nach Konstruktion ist $\angle$CPA = 180° – $\angle$BPC, also ist cos($\angle$CPA) = – cos($\angle$BPC). Diese Cosinus–Werte berechnen wir über den Cosinus–Satz aus den Seitenlängen der Dreiecke ΔCPA bzw. ΔBPC. So erhalten wir $\frac{d^2+c_1^2-b^2}{c_1 d} = -\frac{d^2+c_2^2-a^2}{c_2 d}$ und hieraus

$$d^2 = \frac{c_1a^2+c_2b^2}{c} - c_1c_2.$$

Weiter ist nach Sehnensatz $\overline{PQ} = \frac{c_1c_2}{d}$, also $\frac{\overline{CQ}}{\overline{PQ}} = \frac{d+\overline{PQ}}{\overline{PQ}} = \frac{d^2}{c_1c_2} + 1$, und somit erhalten wir wie gewünscht

$$\frac{\overline{CQ}}{\overline{PQ}} - \left(\frac{a+b}{c}\right)^2 = \frac{d^2}{c_1c_2} + 1 - \left(\frac{a+b}{c}\right)^2$$

$$= \frac{1}{c^2c_1c_2}\Big((c_1+c_2)\big(c_1a^2+c_2b^2\big) - c^2c_1c_2 + c^2c_1c_2 - (a^2+2ab+b^2)c_1c_2\Big)$$

$$= \frac{1}{c^2c_1c_2}\big(c_1{}^2a^2 + c_2{}^2b^2 - 2abc_1c_2\big) = \frac{1}{c^2c_1c_2}\big(c_1a - c_2b\big)^2 \geq 0$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $c_1a - c_2b = 0$, also genau dann, wenn $\frac{a}{b} = \frac{c_2}{c_1}$, was wiederum äquivalent zur Bedingung "PQ ist Winkelhalbierende von $\angle$ACB" ist.

**Bemerkung**: Die Lösung erbringt einen Beweis des
**Satz von Stewart** (gelegentlich auch dem Apollonius zugeschrieben):
Teilt im Dreieck $\Delta$ABC ein Punkt P auf der Seite AB diese in Teilstücke der Länge $c_1$ und $c_2$ auf, dann gilt für die Länge $d$ der Transversalen CP die Beziehung $d^2 = \frac{c_1a^2+c_2b^2}{c} - c_1c_2$ .

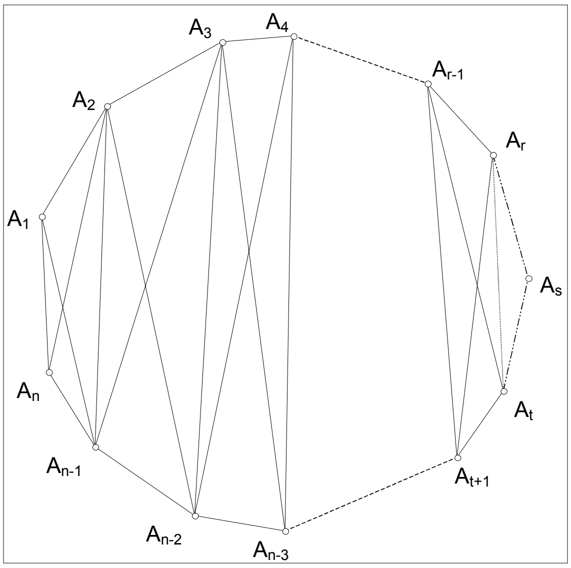
**Aufgabe 4**: Wie viele Diagonalen kann man in ein konvexes 2009–Eck höchstens einzeichnen, wenn in der fertigen Zeichnung jede gezeichnete Diagonale im Inneren des 2009–Ecks höchstens eine weitere gezeichnete Diagonale schneiden darf?

**Anmerkung**: Die Richtigkeit des Resultates ist zu beweisen.

**Antwort**: Man kann höchstens 3009 Diagonalen einzeichnen, ohne die geforderte Bedingung zu verletzen.

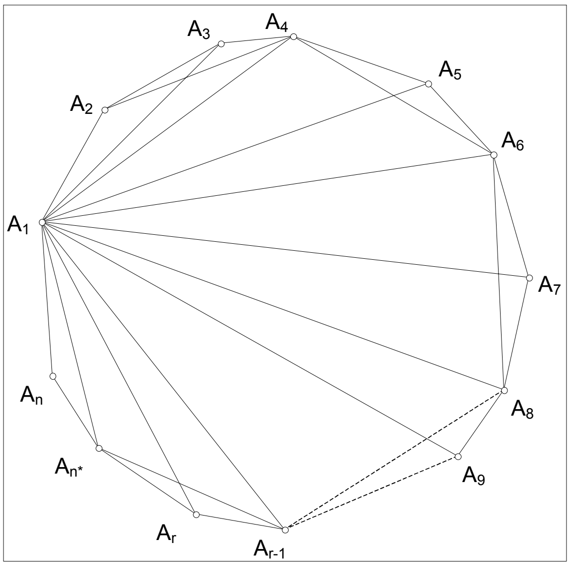
**Gemeinsame Bezeichnungen**: Mit $d(n)$ sei die maximale Anzahl von Diagonalen bezeichnet, die unter Einhaltung der genannten Bedingung in ein $n$–Eck eingezeichnet werden können. Mit $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$ seien die Ecken des $n$–Ecks fortlaufend im Uhrzeigersinn bezeichnet.

**1. Beweis**: Über die Aufgabenstellung hinaus zeigen wir, dass $d(n) = \left\lceil \frac{3}{2}n - 4 \right\rceil$, d.h. die größte ganze Zahl, die nicht kleiner als $\frac{3}{2}n - 4$ ist. Die zu beweisende Aussage folgt dann sofort durch Einsetzen von 2009 in die Formel.



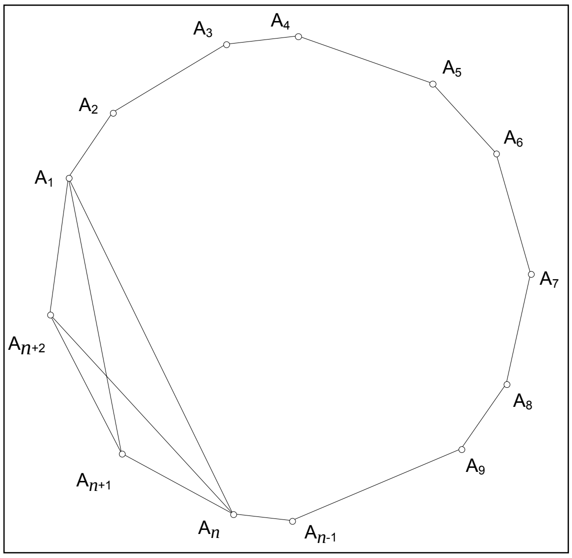

Zunächst zeigen wir, dass $d(n) \geq \left\lceil \frac{3}{2}n - 4 \right\rceil$, indem wir in einem konvexen $n$–Eck eine Auswahl von einzuzeichnenden Diagonale angeben, die die gegebene Bedingung erfüllen.

**Variante 1**: Wir zeichnen zunächst die Diagonalen $A_2A_{n-1}$, $A_3A_{n-2}$ usw. Wenn $n$ ungerade ist, sind dies $\frac{n-3}{2}$ Diagonalen (bis auf drei Punkte werden alle Punkte zu Paaren zusammengefasst, die Endpunkte von Diagonalen sind) und es entstehen ebensoviele Vierecke. Wenn $n$ gerade ist, sind dies $\frac{n-4}{2}$ Diagonalen (bis auf vier Punkte werden alle Punkte zu Paaren zusammengefasst, die Endpunkte von Diagonalen sind; in der Figur muss der Punkt $A_s$ gestrichen werden und $A_rA_t$ ist keine Diagonale, sondern eine Seite des $n$–Ecks) und es entstehen $\frac{n-2}{2}$ Vierecke. In jedes der Vierecke zeichnen wir noch die zwei Diagonalen $A_1A_{n-1}$ und $A_2A_n$, $A_2A_{n-2}$ und $A_3A_{n-1}$ usw. ein, also $n$ – 3 bzw. $n$ – 2 Diagonalen. Falls $n$ ungerade, haben wir so $\frac{n-3}{2}$ + ($n$–3) Diagonalen eingezeichnet, falls $n$ gerade ist, insgesamt $\frac{n-4}{2}$ + ($n$–2). In beiden Fällen kann dieser Term durch $\left\lceil \frac{3}{2}n - 4 \right\rceil$ ausgedrückt werden. Offensichtlich erfüllen die gezeichneten Diagonalen die Bedingungen der Aufgabe.




**Variante 2**: Wir zeichnen von $A_1$ alle möglichen Diagonalen, das sind $n-3$ Diagonalen. Danach zeichnen wir die Diagonalen $A_2A_4$, $A_4A_6$, $A_6A_8$, usw.; falls $n$ ungerade, ist die letzte $A_{n-3}A_{n-1}$, falls $n$ gerade, ist die letzte $A_{n-2}A_n$. Dies sind in beiden Fällen $\left[\frac{1}{2}n-1\right]$ Diagonalen, zusammen also $\left[\frac{3}{2}n-4\right]$.

Auch hier erfüllen offensichtlich alle gezeichneten Diagonalen die Bedingung der Aufgabe.




**Variante 3** (induktiv): Wir zeigen als Hilfssatz, dass $d(n+2) \geq d(n) + 3$. Zusammen mit $d(3) = 0 = \left[\frac{3}{2}\cdot 3-4\right]$ (ein Dreieck hat keine Diagonalen!) und $d(4) = 2 = \left[\frac{3}{2}\cdot 4-4\right]$ (jedes Viereck hat 2 Diagonalen und diese erfüllen in jedem Fall die Bedingung) folgt dann die Behauptung.

Wir betrachten ein $(n+2)$–Eck mit $n \geq 3$. Zuerst zeichnen wir die Diagonale $A_1A_n$ ein, sie teilt das $(n+2)$–Eck in das $n$–Eck $A_1A_2...A_n$ und ein Viereck $A_1A_nA_{n+1}A_{n+2}$ auf. In das $n$–Eck zeichnen wir $d(n)$ Diagonalen, die die Bedingung erfüllen, ein und in das Viereck zeichnen wir die Diagonalen $A_1A_{n+1}$ und $A_nA_{n+2}$ ein. So haben wir $d(n) + 3$ Diagonalen eingezeichnet, offensichtlich erfüllen diese auch im $(n+2)$–Eck die geforderte Bedingung. Somit gilt $d(n+2) \geq d(n) + 3$.

Nun zeigen wir noch, dass $d(n) \leq \left[\frac{3}{2}n-4\right]$:

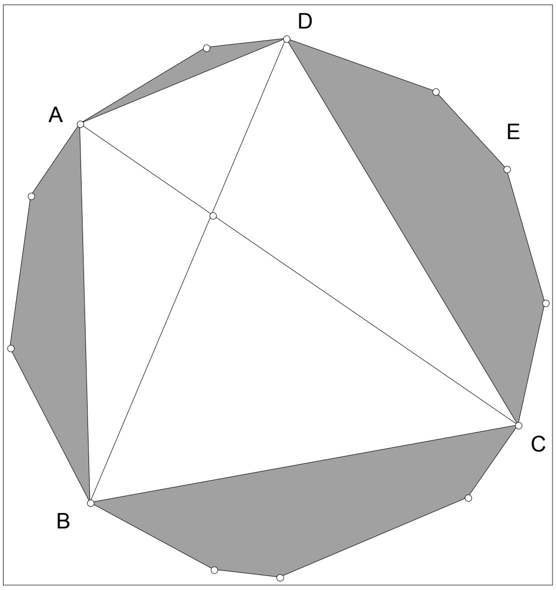
Dies zeigen wir mit vollständiger Induktion nach Anzahl der Ecken, wobei der Induktionsschluss von $n$ auf $n+2$ geht:

**Induktionsanfang**: Die Aussage ist richtig für $n = 3$ und $n = 4$: Wie oben schon bemerkt, hat jedes Dreieck keine Diagonale und die Formel ergibt für $n = 3$ tatsächlich den Wert 0; und jedes Viereck hat genau 2 Diagonalen, diese erfüllen die Bedingung und die Formel ergibt für $n = 4$ tatsächlich den Wert 2.

**Induktionsannahme**: Es gelte $d(n_0) \leq \left[\frac{3}{2}n_0-4\right]$ für ein bestimmtes $n_0 \geq 3$.

**Induktionsschritt**: Dann gilt die Aussage auch für $n_0+2$: Wir betrachten $n \geq 5$. In ein $n$–Eck kann man höchstens $n-3$ Diagonalen so einzeichnen, dass sich keine zwei schneiden: Es teilen nämlich $k$ solche Diagonalen das $n$ – Eck in $(k+1)$ Vielecke mit insgesamt $n+2k$ Ecken auf, wobei jedes Vieleck mindestens 3 Ecken hat. Damit gilt die Beziehung $n+2k \geq 3(k+1)$ oder $k \leq n-3$. Da aber $d(n) \geq \left[\frac{3}{2}n-4\right] > n-3$ für alle $n \geq 5$, gibt es in einer maximalen

Konfiguration von Diagonalen in einem Vieleck mit mindestens 5 Ecken mindestens zwei sich schneidende Diagonalen. Deren Endpunkte bestimmen ein Viereck ABCD für alle $n \geq 4$. Keine weitere Diagonale einer maximalen Konfiguration kann durch das Innere dieses Vierecks laufen, da sie sonst mindestens eine der Diagonalen AC und BD schneiden und damit auf dieser einen zweiten Diagonalenschnittpunkt erzeugen würde.




Es genügt also, die maximale Anzahl von Diagonalen zu bestimmen, die in den vier durch die Punkte A, B, C und D bestimmten Teilvielecken am Rand unter Einhaltung der gegebenen Bedingung gezogen werden können. Dabei ist zu berücksichtigen, dass die Diagonalen AB, BC, CD und DA mitzählen und dass diese Teilvielecke entartet sein können, d.h. nur aus zwei Ecken bestehen. Die Eckenzahl dieser vier Teilvielecke nennen wir $n_i$ ($i$ = 1, 2, 3, 4); dabei gilt $2 \leq n_i \leq n-2$ und $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n + 4$.

Ist $n_i \geq 3$, so kann man die Induktionsannahme anwenden, d.h. – unter Einbeziehung der "Randdiagonale" AB, BC, CD bzw. DA – ist die maximale Anzahl von weiter zeichenbaren Diagonalen $\left[\frac{3}{2}n_i - 4 + 1\right]$. Aber auch für $n_i = 2$ ergibt dieser Term den richtigen Wert, nämlich 0 (die Strecken AB, BC, CD bzw. DA sind dann nicht Diagonalen, sondern Seiten des $n$–Ecks. Als Gesamtzahl erhalten wir dann

$$d(n) \leq 2 + \sum_i \left[\frac{3}{2}n_i - 3\right] \leq 2 + \frac{3}{2}(n_1+n_2+n_3+n_4) - 12 = 2 + \frac{3}{2}(n+4) - 12 = \frac{3}{2}n - 4 .$$

Da die Gesamtzahl eine natürliche Zahl ist, kann man diesen Term durch $\left[\frac{3}{2}n - 4\right]$ ersetzen.

**2. Beweis**: Wir betrachten ein 2009–Eck, in das eine maximale Anzahl von Diagonalen gemäß den Bedingungen der Aufgabe eingezeichnet ist. Im Folgenden verwenden wir den Begriff "Diagonale" stets im Sinne von "eingezeichnete Diagonale".

Wir zerlegen das 2009–Eck durch Schnitte entlang aller Diagonalen, die im Innern keinen gemeinsamen Punkt mit einer anderen Diagonalen besitzen. Wir erhalten so Vielecke (wenn es keine solchen Diagonalen gibt, arbeiten wir mit dem unzerschnittenen 2009–Eck weiter), deren Ecken gleichzeitig Ecken des 2009–Ecks sind. Nach Konstruktion ist jede Diagonale dieses Vielecks auch Diagonale des 2009–Ecks und keine Diagonale des 2009–Ecks schneidet eine Seite dieses Vielecks; ferner schneidet jede Diagonale durch das Innere eines solchen Vielecks – weil nicht Schnittlinie – eine weitere Diagonale im Innern dieses Vielecks.

Wir zeigen nun, dass jedes dieser Vielecke entweder ein Dreieck ist oder ein Viereck mit zwei Diagonalen ist:

Falls es keine Diagonale im Innern enthält, ist es ein Dreieck: Andernfalls hätte es nämlich vier oder mehr Ecken und man könnte eine Diagonale einzeichnen, die keinen Schnittpunkt mit einer weiteren Diagonalen hat. Diese Diagonale hätte auch im ursprünglichen 2009–Eck keinen Schnittpunkt mit einer weiteren Diagonalen, was im Widerspruch zum Einzeichnen der Maximalzahl von Diagonalen im 2009–Eck steht.

In jedem anderen Fall ist es ein Viereck: Dann enthält es nämlich eine Diagonale im Innern, und da diese nicht Schnittlinie ist, hat sie einen Schnittpunkt mit einer zweiten Diagonalen. Die Endpunkte dieser beiden Diagonalen bilden ein Viereck, dessen Ecken – sie seien fortlaufend mit A, B, C und D bezeichnet (vgl. 3. Figur im 1. Beweis) – Eckpunkte des ausgeschnittenen Vielecks sind, also ist die Eckenzahl mindestens vier. Wir führen noch die Annahme, dass das ausgeschnittene Vieleck eine fünfte Ecke E hätte, zum Widerspruch: o.B.d.A. liege E so, dass B und E in verschiedenen Halbebenen bez. der Geraden AD liegen. Die Strecke AD kann dann entweder noch als Diagonale eingezeichnet werden, oder sie ist schon eingezeichnet und hat keinen Schnittpunkt mit einer weiteren Diagonalen oder sie ist eingezeichnet und hat einen Schnittpunkt mit einer weiteren Diagonalen. Der erste Fall steht im Widerspruch zum Einzeichnen der Maximalzahl von Diagonalen, der zweite Fall steht im Widerspruch dazu, dass AD nicht Schnittlinie und damit am Rand des ausgeschnittenen Vielecks liegt, der dritte Fall steht im Widerspruch dazu, dass die Diagonale, die AD schneidet, auf mindestens einer der sich schneidenden Diagonalen AC oder BD einen zweiten Schnittpunkt erzeugt.

Für eine Abschätzung der maximalen Anzahl der Diagonalen $d(2009)$ überlegen wir noch Folgendes:

Alle Seiten der ausgeschnittenen Vielecke sind Seiten oder Diagonalen des 2009–Ecks.
Zählt man die Seiten der ausgeschnittenen Vielecke, werden die Seiten des 2009–Ecks einfach, die Diagonalen des 2009–Ecks doppelt gezählt.
Im Innern jedes ausgeschnittenen Vierecks liegen genau zwei Diagonalen des 2009–Ecks.
Zerlegt man ein 2009–Eck durch Schnitte entlang von Diagonalen in Dreiecke, so erhält man stets 2007 Dreiecke.
Jedes Viereck kann man durch einen Schnitt entlang der Diagonalen in zwei Dreiecke teilen.

Seien also $t$ und $q$ die Anzahlen der ausgeschnittenen Dreiecke bzw. Vierecke. Dann folgt aus den letzten beiden Gedanken sofort $t + 2q = 2007$, also $4q = 4014 - 2t$, und mit den anderen Gedanken

$$2d(2009) = 3t + 4q - 2009 + 4q = 3t + (4014 - 2t) - 2009 + (4014 - 2t) = 6019 - t;$$

da $d(2009)$ eine ganze Zahl ist und $t \geq 0$, folgt sofort $d(2009) \leq 3009$.

Dass auch $d(n) \geq 3009$, zeigen wir wie im ersten Beweis durch die konkrete Angabe einer Konfiguration, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.