Bundeswettbewerb Mathematik

Wissenschaftszentrum • Postfach 20 14 48 • 53144 Bonn

Fon: 0228 - 9 59 15-20 • Fax: 0228 - 9 59 15-29

e-mail: info@bundeswettbewerb-mathematik.de

www.bundeswettbewerb-mathematik.de

Korrekturkommission • Karl Fegert

Aufgaben und Lösungen

1. Runde 2010

Über Kommentare und Ergänzungen zu diesen Lösungsbeispielen freuen wir uns!

Anschrift oder Email–Adresse s.o.

Stand: Juni 2010

Aufgabe 1: Gibt es eine positive ganze Zahl n, für die die Zahl $\underbrace{1\ldots1}_{n \text{ Einsen}}2\underbrace{1\ldots1}_{n \text{ Einsen}}$ eine Primzahl ist?

Anmerkung: Die Richtigkeit des Resultates ist zu beweisen.

Antwort: Nein, für jedes n ist die Zahl $\underbrace{1\ldots1}_{n \text{ Einsen}}2\underbrace{1\ldots1}_{n \text{ Einsen}}$ eine zusammengesetzte Zahl.

Beweis: Es ist offensichtlich $\underbrace{1\ldots1}_{n \text{ Einsen}}2\underbrace{1\ldots1}_{n \text{ Einsen}} = \underbrace{11\ldots11}_{n+1 \text{ Einsen}} \cdot 1\underbrace{0\ldots0}_{n-1 \text{ Nullen}}1$;

beide Faktoren sind für alle $n \geq 1$ definiert und verschieden von 1.

Variante (formale Schreibweise): Die zu untersuchende Zahl hat die Form

$$\underbrace{1\ldots1}_{n \text{ Einsen}}2\underbrace{1\ldots1}_{n \text{ Einsen}} = 10^n + \sum_{i=0}^{2n} 10^i = \sum_{i=n}^{2n} 10^i + \sum_{i=0}^{n} 10^i = \left(10^n + 1\right) \cdot \sum_{i=0}^{n} \left(10^i\right),$$

ist also das Produkt zweier natürlicher Zahlen, von denen für jede positive ganze Zahl n beide kleiner sind als die zu untersuchende Zahl.

Aufgabe 2: Gegeben sind 9999 Stäbe mit den Längen 1, 2, ..., 9998, 9999. Die Spieler Anja und Bernd entfernen abwechselnd je einen der Stäbe, wobei Anja beginnt. Das Spiel endet, wenn nur noch drei Stäbe übrig bleiben. Lässt sich aus diesen ein nicht entartetes Dreieck bilden, so hat Anja gewonnen, andernfalls Bernd. Wer kann den Gewinn erzwingen?

Anmerkung: Die Richtigkeit des Resultates ist zu beweisen.

Antwort: Bernd kann den Gewinn erzwingen.

Vorbemerkung: Um die Formulierungen kurz zu halten, sprechen wir gelegentlich nicht vom "Stab mit der Länge n", sondern kürzer vom "Stab n".

Mit a_1, a_2 und a_3 seien die Längen der zum Schluss übrig bleibenden Stäbe bezeichnet, wobei $a_1 < a_2 < a_3$.

1. Beweis (Angabe einer Strategie): Es genügt zu zeigen, dass Bernd erzwingen kann, dass $a_1 + a_2 \le a_3$. Mit L bezeichnen wir die Menge der "langen" Stäbe, d.h. der Stäbe, die länger als 5000 sind, mit K die Menge der "kurzen" Stäbe, d.h. der Stäbe, die höchstens die Länge 5000 haben. Die Menge K enthält also 5000 Stäbe, die Menge L enthält 4999 Stäbe, jeder Stab ist in genau einer der beiden Mengen enthalten. Da mit jedem Spielzug genau ein Stab entfernt wird und das Spiel endet, wenn noch drei Stäbe übrig sind, wird insgesamt 9999 – 3 = 9996 Mal gezogen, d.h. es finden genau 4998 Doppelzüge statt; dabei zieht jeweils zuerst Anja und dann Bernd.

Eine mögliche Gewinnstrategie für Bernd lautet nun:

> Wenn Anja einen Stab aus K entfernt, entferne als Antwortzug den kürzesten noch vorhandenen Stab aus L; wenn Anja einen Stab aus L entfernt, entferne den längsten noch vorhandenen Stab aus K.

Es genügt nun zu zeigen:

> Bernd kann stets nach dieser Strategie ziehen: Bei Befolgung der Strategie wird mit jedem Doppelzug aus jeder der beiden Mengen genau ein Stab entfernt, d.h. in K befinden sich stets noch mindestens 5000 – 4998 = 2 Stäbe, in L mindestens 4999 – 4998 = 1 Stab.
>
> Bernd gewinnt mit dieser Strategie: Zu Beginn hat die Differenz der Längen des kürzesten Stabes aus L und des längsten Stabes aus K den Wert 1. Mit jedem Doppelzug wächst diese Differenz bei Befolgung der Strategie durch Bernd um mindestens 1. Sie beträgt also am Ende des Spiels, d.h. nach 4998 Zügen, mindestens 4998 + 1 = 4999. Es ist also $a_2 + 4999 \le a_3$. Da zusätzlich $a_2 \le 5000$ und damit $a_1 \le 4999$, folgt $a_1 + a_2 \le 4999 + a_2 \le a_3$. Das war zu zeigen.

2. Beweis (Angabe einer Strategie): Wir ordnen jedem Stab s mit Ausnahme des Stabes $m = 5000$ einen Partnerstab s' zu nach folgender Vorschrift: s und s' sind genau dann Partner, wenn $|s - s'| = 5000$. Offensichtlich sind dann auch s' und s Partner; ferner ist der Partner jeden Stabes aus L := $\{x \mid x > 5000\}$ ein Stab aus S := $\{x \mid x < 5000\}$ und umgekehrt; außerdem gibt es zu Beginn des Spieles genau einen Stab ohne Partner, nämlich $m = 5000$.

Eine mögliche Gewinnstrategie für Bernd lautet nun:

> Wenn Anja einen Stab entfernt, dessen Partner noch vorhanden ist, dann entferne diesen Partner;
> in allen anderen Fällen, d.h. wenn Anja einen Stab entfernt, dessen Partner bereits entfernt ist, dann entferne einen beliebigen Stab aus L.

Es genügt nun zu zeigen:

> Bernd kann stets nach dieser Strategie ziehen: Wie unten gezeigt wird, wird bei Befolgung der Strategie mit jedem Doppelzug stets genau ein Stab aus L gezogen. Da 9999 – 3 = 9996 Mal gezogen wird, finden genau 4998 Doppelzüge statt und zum Spielende ist noch genau 1 Stab aus L vorhanden. Wenn Anja also einen Stab ohne Partner zieht, kann Bernd immer den geforderten Stab aus L ziehen; und wenn Anja einen Stab mit Partner zieht, kann Bernd ebenfalls ziehen, nämlich diesen Partner.
>
> Bernd gewinnt mit dieser Strategie: Nach den 4998 Doppelzügen sind noch die drei Stäbe $a_1 < a_2 < a_3$ vorhanden. Nach dem oben Gesagten ist a_3 der einzige Stab aus L, er hat einen

Partner aus S der Länge $a_3 - 5000$, der Stab ohne Partner hat eine Länge von höchstens 5000. Damit ist $a_1 + a_2 \leq a_3 - 5000 + 5000 = a_3$, d.h. die Dreiecksungleichung ist verletzt und es kann aus diesen Stäben kein nicht–entartetes Dreieck gebildet werden.

Schließlich noch der Nachweis, dass bei jedem Doppelzug stets genau ein Stab aus L gezogen wird: Vor dem ersten Zug findet Anja folgende Situation vor: Es gibt genau einen Stab ohne Partner und dieser ist nicht aus L.

Wenn Anja nun einen Stab mit Partner entfernt, so entfernt Bernd dessen Partner; von diesen beiden Stäben ist genau einer aus L, der Stab ohne Partner wird nicht berührt.

Wenn Anja dagegen einen Stab ohne Partner entfernt, so zieht sie ihn nicht aus L. Alle anderen verbleibenden Stäbe (dies sind mehr als drei) haben einen Partner, insbesondere sind mindestens zwei Stäbe in L, Bernd kann also wie gefordert einen Zug aus L machen; dies ist gleichzeitig der einzige Zug aus L in diesem Doppelzug. Außerdem nimmt Bernd durch seinen Zug einem Stab, der nicht in L ist, seinen Partner; dies ist vor Anjas nächstem Zug der einzige Stab ohne Partner.

Nach dem ersten Doppelzug findet Amja also in jedem Fall wieder folgende Bedingung vor: Es gibt genau einen Stab ohne Partner und dieser ist nicht aus L. Nun kann für den zweiten Zug die obige Begründung übernommen werden und man schließt induktiv, dass bei jedem Zug genau eine Stab aus L gezogen wird.

Bemerkung: Bernd kann stets den Gewinn erzwingen, wenn die Anzahl n der Stäbe ungerade ist. Zum Nachweis ersetzt man im 1. oder 2. Beweis die Zahl 5000 durch die Zahl durch $^{(n+1)}/_{2}$. Dagegen kann bei geradem n stets Anja den Gewinn erzwingen, z.B. mit folgender Strategie: "Nimm immer den kürzesten Stab". Da sie $^{(n-2)}/_{2}$ Züge macht, haben die beiden kürzesten Stäbe mindestens die Länge $^{n}/_{2}$ und $^{n}/_{2}+1$; deren Summe ist $n + 1$, also sicher größer als die Länge des längsten Stabes.

Aufgabe 3: Über den Seiten eines Dreiecks XYZ werden nach außen hin zueinander ähnliche Dreiecke YDZ, EXZ und YXF aufgesetzt; ihre Umkreismittelpunkte seien K, L bzw. M.
Dabei sind $\angle ZDY = \angle ZXE = \angle FXY$ und $\angle YZD = \angle EZX = \angle YFX$.

Man zeige, dass das Dreieck KLM zu den aufgesetzten Dreiecken ähnlich ist.

1. Beweis (Nachweis der Ähnlichkeit über die Innenwinkel des Dreiecks ΔKLM): Die Umkreise der Dreiecke ΔYDZ, ΔEXZ und ΔYXF seien mit K_x, K_y bzw. K_z bezeichnet. Je zwei dieser Kreise schneiden sich in den Punkte X bzw. Y bzw. Z.

Wir behandeln zuerst den Fall, dass je zwei dieser Kreise einen weiteren gemeinsamen Punkt besitzen. Der von Z verschiedene Schnittpunkt der Kreise K_x und K_y sei mit N bezeichnet.

Es ist leicht zu zeigen, dass N auch ein Punkt des Kreises K_z ist: Nach Konstruktion sind die Vierecke XNZE und YDZN (evtl. überschlagene) Sehnenvierecke, also ist, wenn N und E auf verschiedenen Bögen über XZ liegen,

$$\angle ZNX = 180° - \angle XEZ \text{ und } \angle YNZ = \angle 180° - \angle ZDY.$$

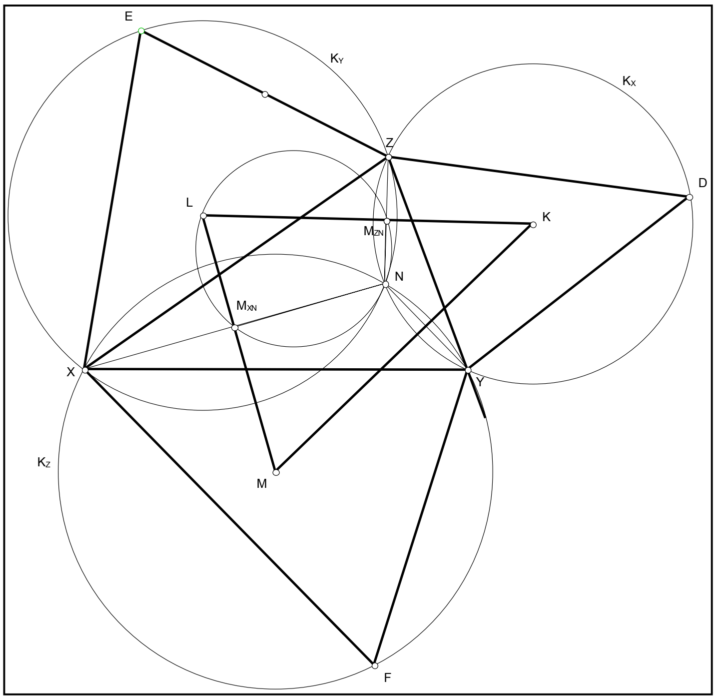
bzw. wenn N und E auf dem gleichen Bogen über XZ liegen,

$$\angle XNZ = \angle XEZ \text{ und } \angle ZNY = \angle ZDY.$$

Hieraus folgt $\angle XNY = 360° - (180° - \angle XEZ) - (\angle 180° - \angle ZDY) = \angle XEZ + \angle ZDY$
$= 180° - \angle YFX$.

bzw. ebenfalls $\angle XNY = \angle XNZ + \angle ZNY = = \angle XEZ + \angle ZDY = 180° - \angle YFX$

Dabei wurde benützt, dass die aufgesetzten Dreiecke die gleichen Innenwinkel besitzen. Damit ist auch das Viereck YNXF ein Sehnenviereck, d.h. der Punkt N liegt auf dem Umkreis des Dreiecks ΔYXF.



Die Strecken XN und ZN sind gemeinsame Sehnen der Kreise K_Y und K_z bzw. der Kreise K_y und K_x. Sie schneiden die Verbindungsgeraden der betreffenden Mittelpunkte rechtwinklig in Punkten, die wir M_{XN} bzw. M_{ZN} nennen. Von hier können wir verschieden schließen:

Variante 1:Aus Symmetriegründen ist

$\angle M_{XN}LN = {}^1/_2\angle XLN$, und
$\angle NLM_{ZN} = {}^1/_2\angle NLZ$.

Also ist unter Verwendung der Tatsache, dass L Umkreismittelpunkt von K_Y ist, (angegebene Winkel sind als gerichtete Winkel zu verstehen)

$$\begin{aligned}\angle MLK &= \angle M_{XN}LM_{ZN}\\ &= {}^1/_2\angle XLN + {}^1/_2\angle NLZ\\ &= {}^1/_2\angle XLZ\\ &= \angle XEZ.\end{aligned}$$

d.h. die Dreiecke ΔKLM und ΔEXZ haben bei L bzw. E gleiche Innenwinkel.

Variante 2: Damit hat das (evtl. überschlagene) Viereck $LM_{XN}NM_{ZN}$ an zwei gegenüber liegenden Punkten rechte Winkel, ist also ein Sehnenviereck. M_{ZN} ist Mittelpunkt von ZN, ebenso M_{XN} Mittelpunkt von XN. Damit überführt die zentrische Streckung mit Zentrum N und Streckfaktor 2 den Punkt N auf sich selbst, M_{ZN} nach Z und M_{XN} nach X; also auch den Umkreis des Vierecks $LM_{XN}NM_{ZN}$ auf den Kreis K_Y. Insbesondere wird bei dieser zentrischen Streckung das Dreieck KLM auf ein

Dreieck K'L'M' abgebildet, dessen Seiten durch X und Z gehen und dessen Ecke L' auf dem Kreis K_Y liegt. Nach Umfangswinkelsatz ist dann $\angle MLK = \angle XL'Z = XEZ$.

Mit analoger Argumentation erhalten wir, dass das Dreieck ΔKLM bei K den gleichen Innenwinkel hat wie das Dreieck ΔYDZ bei D, welcher nach Konstruktion mit dem Innenwinkel des Dreiecks ΔEXZ bei X übereinstimmt. Damit gibt es in den Dreiecken ΔKLM und ΔEXZ zwei Paare gleicher Winkel, sie sind also ähnlich.

Falls zwei der Kreise genau einen gemeinsamen Punkt haben, kann die vorliegende Argumentation übernommen werden, wenn man z.B. "gemeinsame Sehne ZN" durch "gemeinsame Tangente in Z" ersetzt.

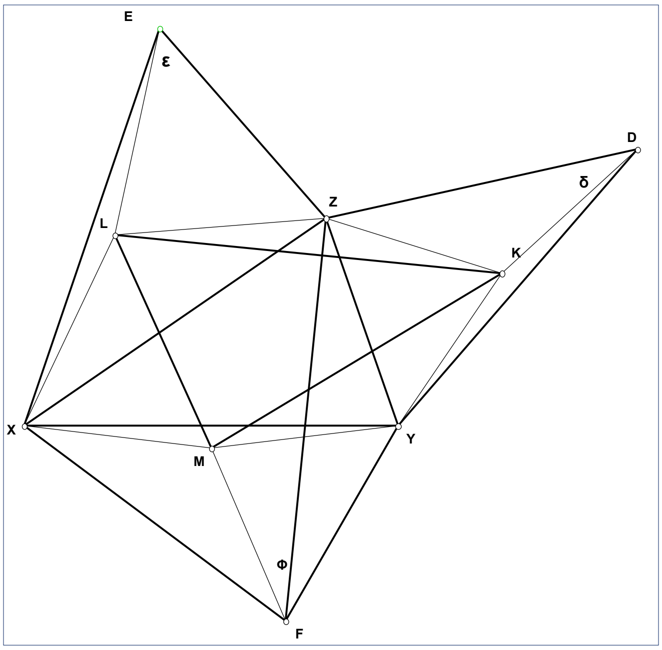
Bemerkungen: Die Diskussion der möglichen verschiedenen Lagebeziehungen, (z.B. wenn die Punkte E und N auf dem gleichen Bogen über der Sehen XZ liegen) ist hier sehr knapp abgehandelt und bedarf eigentlich einer ausführlicheren Betrachtung.

Der Punkt N ist gleichzeitig gemeinsamer Punkt der Geraden XD, YE und ZF. Dies folgt sofort aus $\angle ZNF = \angle ZNX + \angle XNF = (180° - \angle XEZ) + \angle XYF = 180°$.

Der vorliegende Beweis benützt nur die Tatsache, dass die drei Winkel an den Spitzen zusammen 180° ergeben. Es genügt also, von den aufgesetzten ähnlichen Dreiecken nur zu verlangen, dass jeder der Innenwinkel ein Mal an der Spitze liegt.

2. Beweis (Nachweis der Ähnlichkeit über die Verhältnisse der Seitenlängen): Nach Voraussetzung sind die Dreiecke ΔEXZ und ΔYXF gleichsinnig ähnlich. Damit stehen auch ihre Umkreisradien im gleichen Verhältnis wie entsprechende Seiten, es ist also $\frac{\overline{MX}}{\overline{LX}} = \frac{\overline{FX}}{\overline{ZX}}$. Weiter folgt aus der Ähnlichkeit, dass $\angle ZXL = \angle FXM$ (alle Winkel seien hier orientiert betrachtet); hieraus folgt sofort $\angle MXL = \angle FXZ$. Damit sind die Dreiecke ΔMXL und ΔFXZ ähnlich, hieraus folgt $\frac{\overline{ML}}{\overline{MX}} = \frac{\overline{FZ}}{\overline{FX}}$.

Mit analoger Argumentation in den Dreiecken ΔYXF und ΔYDZ erhalten wir über $\angle KYM = \angle ZYF$ und $\frac{\overline{YM}}{\overline{YK}} = \frac{\overline{YF}}{\overline{YZ}}$ die Ähnlichkeit der Dreiecke ΔKYM und ΔZYF und hieraus $\frac{\overline{MY}}{\overline{MK}} = \frac{\overline{FY}}{\overline{FZ}}$.



Unter Verwendung von $\overline{MX} = \overline{MY}$ berechnen wir das Verhältnis der zwei von K ausgehenden Seiten im Dreieck ΔKLM:

$$\frac{\overline{ML}}{\overline{MK}} = \frac{\overline{ML}}{\overline{MX}} \cdot \frac{\overline{MY}}{\overline{MK}} = \frac{\overline{FZ}}{\overline{FX}} \cdot \frac{\overline{FY}}{\overline{FZ}} = \frac{\overline{FY}}{\overline{FX}},$$

d.h. zwei Seiten des Dreiecks ΔKLM stehen im gleichen Verhältnis wie zwei Seiten des Dreiecks ΔXYF. Analoge Schlussfolgerung zeigt noch $\frac{\overline{KL}}{\overline{KM}} = \frac{\overline{DY}}{\overline{DZ}}$, was den Beweis beendet.

3. Beweis (Variante des 2. Beweis mit (Drehstreckung): Aufgrund der Konstruktion der aufgesetzten Dreiecke gibt es eine Drehstreckung mit Zentrum X und Streckfaktor $\frac{\overline{ZX}}{\overline{FX}}$, die das Dreieck ΔEXZ und dessen Umkreismittelpunkt L in das Dreieck ΔYXF und dessen Umkreismittelpunkt M überführen. Insbesondere wird das Dreieck ΔZXL in das Dreieck ΔFXM überführt und es ist $\angle ZXL = \angle FXM$ sowie $\frac{\overline{ZX}}{\overline{LX}} = \frac{\overline{FX}}{\overline{MX}}$. Also gibt es eine weitere Drehstreckung um den Punkt X, die L in Z und M in F überführt; die Berechnung ihres Streckfaktors auf zwei Arten führt zu $\frac{\overline{FX}}{\overline{MX}} = \frac{\overline{FZ}}{\overline{ML}}$.

Mit analoger Argumentation erhalten wir, dass eine zweite Drehstreckung mit Zentrum Y den Punkt K in Z und M in F überführt; deren Streckfaktor ist $\frac{\overline{FY}}{\overline{MY}} = \frac{\overline{FZ}}{\overline{MK}}$.

"Division der beiden Gleichungen" führt zu $\frac{\overline{FX}}{\overline{MX}} : \frac{\overline{FY}}{\overline{MY}} = \frac{\overline{FZ}}{\overline{ML}} : \frac{\overline{FZ}}{\overline{MK}}$, was unter Verwendung von $\overline{MX} = \overline{MY}$ sich zu $\frac{\overline{FX}}{\overline{FY}} = \frac{\overline{MK}}{\overline{ML}}$ vereinfacht, d.h. es gibt in den Dreiecken ΔKLM und ΔXYF je ein Paar Seiten, deren Längen im gleichen Verhältnis zueinander stehen. Analoge Schlussfolgerung zeigt dies über $\frac{\overline{KL}}{\overline{KM}} = \frac{\overline{DY}}{\overline{DZ}}$ für ein zweites Seitenpaar, was den Beweis beendet.

4. Beweis (mit Abbildungsgeometrie, vgl. Figur zum 2. Beweis): Mit $[P_\alpha]$ sei die Drehung um den Punkt P um den Winkel α bezeichnet, mit [AB] die Spiegelung an der Geraden AB. Die Innenwinkel der aufgesetzten Dreiecke seien entsprechend der Bezeichnung von Ecken, an denen sie vorkommen, mit δ, ε, φ bezeichnet, es ist $\delta + \varepsilon + \varphi = 180°$.

Da K Mittelpunkt des Umkreises von ΔYDZ ist, ist nach Umfangswinkelsatz $\angle ZKY = 2\cdot\angle ZDY = 2\delta$, also ist das Bild von Y bei der Drehung $[K_{2\delta}]$ der Punkt Z. Analog schließen wir, dass der Punkt Z bei der Drehung $[L_{2\varepsilon}]$ auf X und dieser bei der Drehung $[M_{2\varphi}]$ wieder auf Y abgebildet wird. Alle Drehungen haben den gleichen Drehsinn, also ist die Summe der Drehwinkel bei diesen drei Drehungen 360° und ihre Verkettung $[M_{2\varphi}]\circ[L_{2\varepsilon}]\circ[K_{2\delta}]$ ist somit eine Parallelverschiebung. Da zusätzlich das Bild von Y bei dieser Parallelverschiebung wieder Y ist, ist diese Abbildung sogar die Identität id.

Nun wählen wir den Punkt M' so, dass im Dreieck $\Delta KLM'$ der Winkel $\angle LKM'$ die Weite δ und den gleichen Drehsinn wie $\angle ZKY$ hat und zusätzlich der Winkel $\angle M'LK$ die Weite ε hat. Es sei bemerkt, dass dann auch $\angle KLM'$ den gleichen Drehsinn wie $\angle ZLX$ hat.

Bekanntlich ist die Verkettung zweier Achsspiegelung eine Drehung um den Schnittpunkt der Achsen um den doppelten Winkel zwischen den Achsen, wobei sich der Drehsinn aus der Reihenfolge der Spiegelungen ergibt. Also können wir schließen (die beiden aufeinander folgenden Achsspiegelungen an KL heben sich auf):

$$id = [M_{2\varphi}]\circ[L_{2\varepsilon}]\circ[K_{2\delta}] = [M_{2\varphi}]\circ([LM']\circ[KL])\circ([KL]\circ[M'K]) = [M_{2\varphi}]\circ([LM']\circ[M'K]) = [M_{2\varphi}]\circ[M'_{-2\varphi}].$$

Diese beiden Drehungen heben sich also auf; dies ist genau dann der Fall, wenn M = M'. Damit hat $\Delta KLM' = \Delta KLM$ die gleichen Innenwinkel wie die aufgesetzten Dreieck, ist also ähnlich zu ihnen.

Bemerkungen: Die Aussage der Aufgabe ist für Spezialfälle bereits bekannt:

Wenn die aufgesetzten Dreiecke gleichseitig sind, erhält man einen Zusammenhang, der unter dem Begriff "Satz von Napoleon" bekannt ist. Jeder Beweis dieses Satzes, der nur benützt, dass die Innenwinkel des Dreiecks gleichgroß sind wie die Winkel an den Spitzen der aufgesetzten Dreiecke, kann umgeschrieben werden in einen Beweis für die Aussage der Aufgabe.

Wenn die aufgesetzten Dreiecke rechtwinklig–gleichschenklig sind, so kann man zwei davon zu Quadraten ergänzen; die Aussage aus der Aufgabe lautet dann (vgl. Aufgabe 3 in der 1. Runde des BWM 1998):

> Über die Seiten BC und CA eines beliebigen Dreiecks ABC werden nach außen Quadrate errichtet. Der Mittelpunkt der Seite AB sei M, die Mittelpunkte der beiden Quadrate seien P und Q. Man beweise, daß das Dreieck MPQ gleichschenklig-rechtwinklig ist.

Zusätzlich lässt sich beweisen, dass die Geraden LK und FZ sich rechtwinklig schneiden: Im Dreieck XYF ist nach Umfangswinkelsatz $2\angle XYF = \angle XMF$, also $\angle FXM = 90° - \angle XYF$; dies ist der Drehwinkel der Drehstreckung um X, die LM in ZF überführt. Andererseits ist wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke $\angle MLK = \angle XYF$; damit hat der Winkel zwischen den Geraden LK und FZ die Weite $\angle XYF + 90° - \angle XYF = 90°$.

Aufgabe 4: Bestimme alle Zahlen, die sich auf genau 2010 Arten als Summe von Zweierpotenzen mit nicht negativen ganzen Zahlen als Exponenten darstellen lassen, wobei in jeder der Summen jede Zweierpotenz höchstens dreimal als Summand auftreten darf. Dabei sind zwei Darstellungen als gleich anzusehen, wenn sie sich nur in der Reihenfolge ihrer Summanden unterscheiden. Eine Summe kann hier auch aus nur einem Summanden bestehen.

Anmerkung: Die Richtigkeit des Resultates ist zu beweisen.

Antwort: Die beiden Zahlen 4018 und 4019 und nur diese haben die gesuchte Eigenschaft.

Gemeinsame Bezeichnungen: Für ganze Zahlen n, a_i schreiben wir in Anlehnung an die Darstellung der Zahl n im Zweiersystem

$$n = [a_k, a_{k-1}, a_{k-2}, ..., a_1, a_0], \text{ wenn } n = \sum_{i=0}^{k} a_i 2^i ,$$

und nennen dies eine Darstellung von n als Summe von Zweierpotenzen; die a_i nennen wir auch *Ziffern* der Darstellung. Wenn zusätzlich $a_i \in \{0, 1, 2, 3\}$ für alle $i = 1, 2, ..., k$, d.h. wenn die zusätzlichen Bedingungen in der Aufgabenstellung erfüllt sind, nennen wir die Darstellung von n *zulässig*. (Damit lassen wir in Erweiterung der Aufgabenstellung auch die leere Summe zu, diese Summe stellt die Zahl 0, nur diese, und es ist die einzige zulässige Darstellung der Zahl 0. Das unten hergeleitete Ergebnis bleibt somit gültig.)

Die Anzahl der zulässigen Darstellungen der Zahl n bezeichnen wir mit $d(n)$.

Gelegentlich sprechen wir kürzer von "der Zahl $[a_k, a_{k-1}, a_{k-2}, ..., a_1, a_0]$" anstatt von "der Zahl, die eine Darstellung $[a_k, a_{k-1}, a_{k-2}, ..., a_1, a_0]$ besitzt".

1. Beweis: Offensichtlich ist der Wert jeder zulässigen Darstellung eine nicht negative ganze Zahl; es genügt also, nicht negative ganze Zahlen hinsichtlich ihrer Darstellbarkeit zu untersuchen.

Über die Aufgabenstellung hinaus werden wir zeigen, dass $d(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$ für alle $n = 0, 1, 2, 3, ...$.

Da die Gleichung $d(n) = 2010 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$ offensichtlich genau die Lösungen $n = 4018$ und $n = 4019$ hat, folgt so unmittelbar die Behauptung.

Zuerst zeigen wir, dass für jede nicht negative gerade ganze Zahl n die Gleichung $d(n) = d(n+1)$ gilt:

Sei $n = [a_k, a_{k-1}, a_{k-2}, ..., a_1, a_0]$ eine zulässige Darstellung von n. Da n gerade ist, ist $a_0 \in \{0, 2\}$, folglich $(a_0 + 1) \in \{1, 3\}$ und somit ist $n + 1 = [a_k, a_{k-1}, a_{k-2}, ..., a_1, a_0+1]$ eine zulässige Darstellung der ungeraden Zahl $n + 1$. Jeder zulässigen Darstellung von n ist so eindeutig eine zulässige Darstellung von $n + 1$ zugeordnet; umgekehrt kann jeder zulässigen Darstellung einer ungeraden Zahl $n + 1$ durch Umkehrung dieser Zuordnung eindeutig eine zulässige Darstellung der geraden Zahl n zugeordnet werden. Damit ist die Anzahl dieser Darstellungen gleich, d.h. es ist $d(n) = d(n+1)$.

Weiter zeigen wir, dass für jedes gerade n die Gleichung $d(n + 2) = d(n) + 1$ gilt:

Sei $n = [a_k, a_{k-1}, a_{k-2}, ..., a_1, a_0]$ eine zulässige Darstellung von n; da n gerade ist, ist $a_0 \in \{0, 2\}$. Dann ist $n + 2 = [a_k, a_{k-1}, a_{k-2}, ..., a_1, a_0+2]$ eine Darstellung von $n + 2$.

Im Fall $a_0 = 0$ ist diese auch zulässig. Jeder zulässigen Darstellung von n mit $a_0 = 0$ ist so umkehrbar eindeutig eine zulässige Darstellung von $n + 2$, deren erste Ziffer 2 ist, zugeordnet. Die Anzahl dieser Darstellungen ist also gleich.

Im Fall $a_0 = 2$ ist diese Zuordnung etwas komplizierter: Einfaches Nachrechnen (dem "Übertrag" beim Addieren in einem Stellenwertsystem vergleichbar) zeigt, dass

$$[a_k, ..., a_1, a_0+2] = [a_k, ..., a_2, a_1+2, a_0-2] = ... = [a_k, ..., a_{i+1}, a_i+2, a_{i-1}-2, ..., a_0-2];$$

für das kleinste i mit $a_i+2 \le 3$ erhalten wir so eine zulässige Darstellung von $n + 2$ (evtl. benötigen wir noch eine zusätzliche Ziffer $a_{k+1} = 2$). Wir bemerken noch, dass in dieser Darstellung mindestens eine Ziffer, nämlich die in dem Verfahren zuletzt behandelte, mindestens den Wert 2 hat.

Also können wir jeder Darstellung von n mit Anfangsziffer $a_0 = 2$ eine Darstellung von $n + 2$, in der die erste Ziffer den Wert 0 und mindestens eine Ziffer einen Wert vom mindestens 2 hat, zuordnen. Auch hier ist die Zuordnung umkehrbar eindeutig: Es ist nämlich (sei i kleinster Index mit $a_i \ge 2$, dann ist $a_j+2 \le 3$ für alle $j < i$, ferner ist a_0 gerade und kleiner als 2, also $a_0 = 0$):

$$\begin{aligned}
n - 2 &= [a_k, ..., a_j, ..., a_2, a_1, a_0] - 2\\
&= [a_k, ..., a_j-2, a_{j-1}+4, ..., a_2, a_1, 0] - 2\\
&= [a_k, ..., a_j-2, a_{j-1}+2, a_{j-2}+4, a_{j-3}, ..., a_2, a_1, 0] - 2\\
&= ... = ... =\\
&= [a_k, ..., a_j-2, a_{j-1}+2, a_{j-2}+2, a_{j-3}+2, ..., a_2+2, a_1+2, 4] - 2\\
&= [a_k, ..., a_j-2, a_{j-1}+2, a_{j-2}+2, a_{j-3}+2, ..., a_2+2, a_1+2, 2].
\end{aligned}$$

Die Betrachtung beider Fälle zeigt also, dass die Gesamtzahl der zulässigen Darstellungen von n identisch ist mit der Anzahl zulässiger Darstellungen von $n + 2$, die mindestens eine Ziffer 2 oder 3 enthalten.

Es bleibt also noch, alle Darstellungen von $n + 2$ zu zählen, in denen ausschließlich Nullen und Einsen vorkommen: Diese sind identisch mit den Darstellungen von $n + 2$ im Dualsystem, davon gibt es bekanntlich genau eine.

Dies setzen wir für gerade n zusammen zu $d(n+2) = d(n) + 1$; diese Formel gilt offensichtlich auch für ungerade n. Ferner ist $0 = [0]$ die einzige zulässigen Darstellung von 0, also ist $d(0) = 1$. Das bisher Gesagte lässt sich somit zusammenfassen zu

Die Zahlenfolge $\langle d(n)\rangle$ erfüllt die Bedingung $d(0) = 1$, $d(n+1) = \begin{cases} d(n) & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ d(n)+1 & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$

Offensichtlich ist diese Zahlenfolge durch diese Rekursion eindeutig bestimmt. Ebenso offensichtlich ist, dass auch die Zahlenfolge $\langle \left[\frac{n}{2}\right] + 1\rangle$ dieser Rekursionsgleichung gehorcht. Damit sind beide identisch, das war zu zeigen.

Variante: Zuerst zeigen wir wie oben, dass für alle geraden n die Gleichung $d(n) = d(n+1)$ gilt, d.h. dass für alle n die Gleichung $d(2n) = d(2n+1)$.

Weiter zeigen wir, dass für jedes $n \ge 1$ die Gleichung $d(2n) = d(n) + d(n-1)$ gilt: Sei wieder $2n = [a_k, a_{k-1}, ..., a_1, a_0]$ eine zulässige Darstellung von $2n$. Da $2n$ gerade ist, ist $a_0 \in \{0, 2\}$.

Für zulässige Darstellungen von $2n$ mit $a_0 = 0$ betrachten wir die Zahl $[a_k, a_{k-1}, ..., a_2, a_1]$, d.h wir schneiden die erste Ziffer der betrachteten Darstellung von $2n$ ab. Dies entspricht einer Division durch 2, d.h. $[a_k, a_{k-1}, ..., a_2, a_1]$ ist eine (offensichtlich zulässige!) Darstellung der Zahl n. Jeder zulässigen Darstellung von $2n$ mit $a_0 = 0$ ist so eindeutig eine zulässige Darstellung von n zugeordnet; diese Zuordnung ist offensichtlich bijektiv. Es gibt also $d(n)$ zulässige Darstellungen von $2n$ mit Anfangsziffer 0.

Für zulässige Darstellungen von $2n$ mit $a_0 = 2$ betrachten wir ebenfalls die Zahl $[a_{k-1}, ..., a_2, a_1]$, d.h. wir subtrahieren 2 und schneiden die erste Ziffer ab. Dies entspricht einer Subtraktion von 2 mit anschließender Division durch 2; d.h. $[a_{k-1}, ..., a_2, a_1]$ ist eine (offensichtlich zulässige) Darstellung der Zahl $n - 1$ (es ist $n \ge 1$, also $n - 1 \ge 0$.). Jeder zulässigen Darstellung von $2n$ mit $a_0 = 2$ ist so eindeutig eine zulässige Darstellung von $n-1$ zugeordnet; diese Zuordnung ist offensichtlich bijektiv. Es gibt also $d(n-1)$ zulässige Darstellungen von $2n$ mit Anfangsziffer 2.

Damit sind alle möglichen zulässigen Darstellungen von $2n$ untersucht, es gilt $d(2n) = d(n) + d(n-1)$.

Nun können wir abschließend die Gültigkeit der eigentliche Formel mittels vollständiger Induktion nach n zeigen (wobei der Induktionsschritt von geradem n über $n+1$ zu $n+2$, dem nächsten geraden n geht):

Induktionsanfang: Es sind $0 = [0]$ und $1 = [1]$ offensichtlich die jeweils einzigen zulässigen Darstellungen von 0 bzw. 1, also ist $d(0) = 1 = \left[\frac{0}{2}\right]+1$ und $d(1) = 1 = \left[\frac{1}{2}\right]+1$, d.h. die Aussage ist richtig für $n = 0$ und $n = 1$.

Induktionsannahme: Die Aussage sei richtig für ein bestimmtes gerades $n \geq 0$.

Induktionsschluss: Dann ist sie auch richtig für das ungerade $n + 1$ und das gerade $n + 2$: Nach oben nachgewiesenen Gleichungen gilt für gerade n

$$d(n+1) = d(n) = \left[\frac{n}{2}\right]+1 = \left[\frac{n+1}{2}\right]+1 ;$$

ferner gilt für das ganzzahlige $n^* := {}^n/_2$:

$$d(n+2) = d(2(n^*+1)) = d(n^*+1) + d(n^*) = \left[\frac{n^*+1}{2}\right]+1 + \left[\frac{n^*}{2}\right]+1 = \left[\frac{2n^*}{2}\right]+2$$

$$= \left[\frac{2(n^*+1)}{2}\right]+1 = \left[\frac{n+2}{2}\right]+1 ,$$

d.h. die Formel gilt für $n+1$ und für $n+2$.

2. Beweis: Sei $n = \sum_{i=0}^{k} a_i 2^i$ mit $a_i \in \{0, 1, 2, 3\}$ für alle i, eine zulässige Darstellung der Zahl n.

Bekanntlich ist die Darstellung jeder ganzen Zahl im Zweiersystem eindeutig. Also gibt es für jedes $a_i \in \{0, 1, 2, 3\}$ eindeutig bestimmte Zahlen b_i, $c_i \in \{0, 1\}$ sodass $a_i = b_i \cdot 1 + c_i \cdot 2$. Dann ist

$$n = \sum_{i=0}^{k} a_i 2^i = \sum_{i=0}^{k} (b_i + 2c_i) 2^i = \sum_{i=0}^{k} b_i 2^i + 2\sum_{i=0}^{k} c_i 2^i .$$

Über diese Gleichung können wir jeder zulässigen Darstellung von n eindeutig zwei nicht negative ganze Zahlen $b := \sum_{i=0}^{k} b_i 2^i$ und $c := 2\sum_{i=0}^{k} c_i 2^i$ zuordnen, deren Summe $b + c$ den Wert n hat und bei denen c gerade ist. Diese Zuordnung ist, da sich die $b_i, c_i \in \{0, 1\}$ aus der eindeutigen Darstellung dieser Zahlen im Zweiersystem ergeben, bijektiv. Damit gibt es genau so viele zulässige Darstellungen von n, wie es solche Summen gibt, d.h. so viele, wie es nicht–negative ganze gerade Zahlen gibt, die nicht größer als n sind. Hieraus folgt sofort $d(n) = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$. Schließlich bemerken wir, dass die Gleichung $d(n) = \left[\frac{n}{2}\right] + 1 = 2010$ genau die Lösungen 4018 und 4019 hat..