Bundeswettbewerb Mathematik
Kortrijker Str. 1 • 53177 Bonn
Telefon: 0228 - 9 59 15-20 • Telefax: 0228 - 9 59 15-29
E-Mail: info@bundeswettbewerb-mathematik.de
www.bundeswettbewerb-mathematik.de

Korrekturkommission • Karl Fegert

Aufgaben und Lösungen

2. Runde 2010

Über Kommentare und Ergänzungen zu diesen Lösungsbeispielen freuen wir uns!

Anschrift oder Email–Adresse s.o.

Stand: Oktober 2010

Aufgabe 1: Es seien a, b, c die Seitenlängen eines nicht entarteten Dreiecks mit $a \le b \le c$. Mit $t(a,b,c)$ werde das Minimum der Quotienten $\frac{b}{a}$ und $\frac{c}{b}$ bezeichnet.

Bestimme alle Werte, die $t(a,b,c)$ annehmen kann.

Anmerkung: Die Richtigkeit des Resultates ist zu beweisen.

Antwort: Die Wertemenge der Funktion t ist das halboffene Intervall $[1;\varphi[$, wobei $\varphi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Es genügt also zu zeigen,

(1) dass für jedes nicht entarteten Dreieck mit Seitenlängen a, b und c mit $a \le b \le c$ die Ungleichung $1 \le t(a,b,c) < \varphi$ gilt, und

(2) dass es zu jeder Zahl t mit $1 \le t < \varphi$ ein Dreieck gibt mit Seitenlängen a, b und c, $a \le b \le c$ und $t(a,b,c) = t$.

1. Beweis (abstrakt mit Dreiecksungleichung, mit Herleitung des Wertes von φ): Im Folgenden schreiben wir für $t(a,b,c)$ gelegentlich kürzer t.

<u>zu (1)</u>: Seien die Werte a, b und c die Seitenlängen eines nicht entarteten Dreiecks, für die zusätzlich $a \le b \le c$ gilt. Dann gelten die Bedingungen

(A) $0 < a \le b \le c$ und (B) $c < a + b$.

Wegen (A) ist stets $\frac{b}{a} \ge 1$ und $\frac{c}{b} \ge 1$; für jede zulässige Wahl von a, b und c ist also $t \ge 1$.

Weiter erfüllt t stets die beiden Ungleichungen $\frac{c}{b} \ge t$ und $\frac{b}{a} \ge t$. Offensichtlich ist stets $t > 0$, insbesondere $t \ne 0$, also ist $b \le \frac{c}{t}$ und $a \le \frac{b}{t} \le \frac{c}{t^2}$ (die letzte Ungleichung folgt mit (A)). Mit (B) folgern wir $c < a + b \le c(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t})$, was nur erfüllt sein kann, wenn die Ungleichung $(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}) > 1$ bzw. (nach Multiplikation mit $t^2 > 0$) wenn die Ungleichung $1 + t > t^2$ erfüllt ist. Quadratische Ergänzung liefert die äquivalente Ungleichung $(t - \frac{1}{2})^2 < \frac{5}{4}$ bzw. $1 - \varphi < t < \varphi$. Zusammen mit der oben hergeleiteten Bedingung $t \ge 1$ erhalten wir die notwendige Bedingung $t \in [1;\varphi[$.

<u>zu (2)</u> Ist $1 \le t < \varphi$, so ist wie gerade hergeleitet $1 + t > t^2$; d.h. die Zahlen $a := 1$, $b := t$ und $c := t^2$ erfüllen die Dreiecksungleichung, sind also Längen der Seiten eines nicht entarteten Dreiecks; ferner gilt $a \le b \le c$ und außerdem gilt tatsächlich $t(a,b,c) = \min(\frac{t}{1};\frac{t^2}{t}) = t$.

Variante zum Teil (1) (Verifikation des Ergebnisses ohne Herleitung): Bekanntlich ist φ der "goldene Schnitt"; wir werden im Beweis die bekannten bzw. durch Rechnung leicht zu verifizierenden Beziehungen $\varphi^2 = \varphi + 1$ und $\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}$ benützen.

Seien die Werte a, b und c die Seitenlängen eines nicht entarteten Dreiecks, für die zusätzlich $a \le b \le c$ gilt. Dann gilt nach Dreiecksungleichung $a > c - b$ und $c < a + b$.

Wegen $a \le b \le c$ ist stets $\frac{b}{a} \ge 1$ und $\frac{c}{b} \ge 1$, in jedem Fall also auch $t(a,b,c) \ge 1$.

Falls $\frac{c}{b} \ge \varphi > 0$ also $b \le c\cdot\frac{1}{\varphi} = c(\varphi - 1)$, ist $a > c - b \ge c(1 - \frac{1}{\varphi})$; dies setzen wir zusammen zu

$$\frac{b}{a} < \frac{c(\varphi-1)}{c(1-\frac{1}{\varphi})} = \frac{\varphi(\varphi-1)}{\varphi-1} = \varphi,$$

und falls $\frac{b}{a} \geq \varphi > 0$, also $\frac{a}{b} \leq \frac{1}{\varphi} = (\varphi - 1)$, folgt aus $c < a + b$ nach Division durch $b > 0$

$$\frac{c}{b} < \frac{a}{b} + 1 \leq (\varphi - 1) + 1 = \varphi;$$

in jedem Fall ist also auch $t(a,b,c) = \min(\frac{b}{a};\frac{c}{b}) < \varphi$.

Variante zum 2. Teil der Variante: Die Annahme $t \geq \varphi$, also sowohl $\frac{a}{b} \leq \frac{1}{\varphi}\varphi$ als auch $\frac{b}{c} \leq \frac{1}{\varphi}\varphi$, führt über die Dreiecksungleichung $c < a + b$ nach Division durch c zum Widerspruch

$$1 < \frac{a}{c}+\frac{b}{c} = \frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}+\frac{b}{c} \leq \frac{2}{1+\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{1+\sqrt{5}}+\frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{5-1}\cdot\frac{2(\sqrt{5}-1)}{5-1}+\frac{2(\sqrt{5}-1)}{5-1}$$
$$= \frac{(5-2\sqrt{5}+1)}{4}+\frac{2\sqrt{5}-2}{4} = 1.$$

2. Beweis: (geometrischen Konstruktion mit Eigenschaft des Apollonius–Kreises, sehr an der Anschauung fixiert): Wir benützen folgenden aus der Elementargeometrie bekannten Satz:

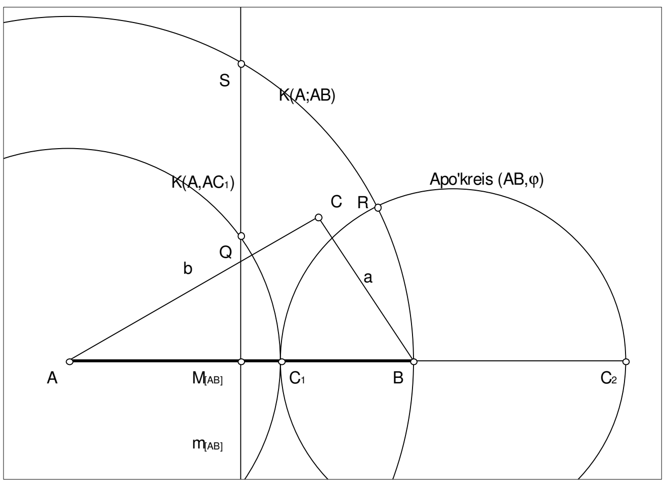
HS (Apollonius–Kreis): In der Zeichenebene sei die Strecke AB sowie eine positive reelle Zahl $r \neq 1$ gegeben. Dann gilt:

(1) Es gibt genau zwei Punkte C_1 und C_2 auf der Geraden AB, für die $\overline{AC_1}:\overline{C_1B} = \overline{AC_2}:\overline{C_2B} = r$.

(2) Die Menge aller Punkte C in der Zeichenebene, für die die Gleichung $\overline{AC}:\overline{CB} = r$ erfüllt ist, ist eine Kreislinie ("Apollonius–Kreis") , zu der die Strecke C_1C_2 ein Durchmesser ist.

(3) Für $r > 1$ erfüllen alle Punkte Q im Innern dieses Kreises die Gleichung $\overline{AQ}:\overline{QB} > r$; alle Punkte Q außerhalb dieses Kreises erfüllen die Gleichung $\overline{AQ}:\overline{QB} < r$; ferner liegt der Punkt B im Innern dieses Kreises.

Im Fall $r = 1$ bleibt die Aussage prinzipiell erhalten, der beschriebene Kreis entartet zur Mittelsenkrechten der Strecke AB, der Punkt P_2 ist der unendlich ferne Punkt, das Innere dieses Kreises wird zur Halbebene bez. der Mittelsenkrechten auf AB, die den Punkt B enthält.



Nun betrachten wir die Menge der Dreiecke mit den Ecken A und B, in denen $a \leq b \leq c$, wobei wir auch entartete Dreiecke zulassen, d.h. Dreiecke, deren Ecke C auf der Geraden (AB) liegen. O.B.d.A. können wir $c = 1$ wählen. Wegen $a \leq b$ liegt die Ecke C auf der Mittelsenkrechten von AB oder in der durch diese Mittelsenkrechte bestimmten Halbebene, die auch die Ecke B enthält. Wegen $b \leq c$ liegt die Ecke C gleichzeitig auf der abgeschlossenen Scheibe des Kreises um A durch B. C liegt also in dem Bereich, der durch die Punkte $M_{[AB]}$, C_1, B, R, S, Q und ihrer Verbindungslinien bestimmt ist. Dabei gehören die Verbindungslinien mit Ausnahme der Strecke $M_{[AB]}B$ zum Bereich, die letztere nur, wenn wir entartete Dreieck ebenfalls zulassen.

Als nächstes betrachten wir den Punkte C_1 auf der Strecke AB, für den $\overline{AC_1}:\overline{C_1B} = \overline{AB}:\overline{AC_1}$; und hierzu das entartete Dreieck ABC_1 mit $C_1 \in AB$. Für dieses Dreieck gilt $b : a = c : b$. Ein solcher Punkt existiert sicher: Wenn C_1 auf AB von B in Richtung $M_{[AB]}$ wandert, so nimmt das Verhältnis $c : b$ von 1 stetig zu, bis es den Wert 2 erreicht, während das Verhältnis $b : a$ beginnend bei beliebig großen Werten stetig abnimmt und im Mittelpunkt von AB den Wert 1 annimmt; d.h. für eine Lage von C_1 zwischen B und $M_{[AB]}$ sind die beiden Werte gleich. Einfache Rechnung führt von $b : a = c : b$, also $b^2 = ac$ zusammen mit den Nebenbedingungen $c = 1$ und $a = c - b$ zu der Bedingung $b^2 = (1 - b)\cdot 1$, also zu $b = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \varphi - 1 = \varphi^{-1}$ (die negative Lösung scheidet aus!). Hieraus folgt $\overline{AC_1}:\overline{C_1B} = b : a = c : b = 1 : \varphi^{-1} = \varphi$.

Für diesen Wert φ zeichnen wir den Apollonius–Kreis zur Strecke AB; da $\varphi > 1$, ist die Strecke C_2B kürzer als C_2A, der Kreis umschließt also den Punkt B und teilt somit den oben beschriebenen Bereich für C in zwei Teile; somit unterscheiden wir zwei Fälle für die Lage von C:

Fall 1: C liegt innerhalb dieses Apolloniuskreises oder auf ihm. Dann ist C gleichzeitig außerhalb des Kreises um A mit Radius $AC_1 = \varphi^{-1}$. Dann ist $b > \varphi^{-1}$ und somit $t(a,b,c) \le c : b < 1 : \varphi^{-1} = \varphi$.

Fall 2: C liegt außerhalb dieses Apolloniuskreises: Dann ist nach Hilfssatz $t(a,b,c) \le b : a < \varphi$.

Bemerkung: Liegt C innerhalb des durch die Punkte C_1, R, S und Q und deren Verbindungslinien definierten Bereiches, so ist sowohl $b : a < \varphi$ als auch $c : b < \varphi$.

Aufgabe 2: Die Zahlenfolge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sei rekursiv definiert durch

$$a_1 := 1, \quad a_{n+1} := [\sqrt{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}\,] \quad \text{für } n \ge 1.$$

Bestimme alle Zahlen, die mehr als zweimal als Folgenglieder auftreten.

Erläuterung: Mit [z] sei die größte ganze Zahl bezeichnet, die nicht größer als z ist.

Anmerkung: Die Richtigkeit des Resultates ist zu beweisen.

Antwort: Genau die Zweierpotenzen, d.h. die Zahlen der Form $n = 2^i$ mit ganzzahligen nicht negativen Exponenten i kommen mehr als zweimal als Folgenglieder vor.

Beweis: Wir definieren eine monoton steigende Folge (b_n) ganzer Zahlen über folgende Vorschrift: Sie soll die Zahl 1, also die Zweierpotenz 2^0 genau 4 Mal, die anderen Zweierpotenzen genau 3 Mal und alle anderen Zahlen genau 2 Mal enthalten. Anschließend werden wir zeigen, dass diese Folge die gleichen Anfangswerte wie (a_n) hat und der gleichen Rekursionsformel gehorcht, also identisch mit ihr ist. Damit ist (sogar mehr als) die Aussage bewiesen.

(Die Folge (b_n) ist also die Folge 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 8, 9, ... In ihr kommen alle natürlichen Zahlen der Größe nach geordnet vor, wobei die Zahl 1 vierfach, die anderen Zahlen entweder zwei- oder dreifach vorkommen.)

Zunächst stellen wir fest, dass die Folge (a_n) ebenfalls monoton steigt und dass $a_1 = 1 = b_1$, $a_2 = [\sqrt{1}\,] = 1 = b_2$,, $a_3 = [\sqrt{1+1}\,] = 1 = b_3$, $a_4 = [\sqrt{1+1+1}\,] = 1 = b_4$, und $a_5 = [\sqrt{1+1+1+1}\,] = 2 = b_5$; d.h. die beiden Folgen stimmen in den ersten 5 Folgegliedern überein.

Wir berechnen $\sum_{i=1}^{n} b_i$ für $n \ge 5$ und zeigen anschließend, dass in allen Fällen $b_{n+1} = [\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i}\,]$ gilt.

Dabei schreiben wir $b_n = 2^k + r$ mit $0 < r \le 2^k$; durch diese Vorschrift sind die ganzzahligen k und r eindeutig bestimmt. Es sei noch bemerkt, dass stets $b_n - 1 = 2^k + r - 1 \ge 2^k$. Offensichtlich ist für alle $n \ge 5$ entweder $b_{n-1} = b_n$ oder $b_{n-1} = b_n - 1$; im letzteren Fall ist zusätzlich $b_n = b_{n+1}$. Für die Rechnung unterscheiden wir 4 Fälle:

(1) $b_{n-1} = b_n - 1$, d.h. b_n ist das erste von aufeinander folgenden gleichen Folgengliedern:

Aus der Definition folgt dann $b_{n+1} = b_n$. Ferner kann man $\sum_{i=1}^{n} b_i$ in vier Teilsummen aufspalten bzw. zusammenfassen: Alle ganzen Zahlen zwischen 1 und $b_n - 1$ (je einschließlich) kommen zunächst zwei Mal vor, dann die Zweierpotenzen darunter ein drittes Mal, die Zahl 1 noch ein viertes Mal und schließlich noch b_n. Damit ist

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} b_i &= 2\sum_{i=1}^{b_n-1} i + \sum_{i=1}^{k} 2^i + 1 + (2^k + r) = 2\frac{(2^k+r-1)(2^k+r)}{2} + (2^{k+1}-1) + 1 + (2^k + r)\\ &= (2^k + r)\cdot(2^k + r) - (2^k + r) + 2^{k+1} + 2^k + r = (2^k + r)^2 + 2^{k+1}\\ &> b_n^2.\end{aligned}$$

Andererseits ist aber auch

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} b_i &= (2^k + r)^2 + 2^{k+1} = (2^k + r + 1)^2 - 2(2^k + r) - 1 + 2^{k+1} = (2^k + r + 1)^2 - r - 1\\ &< (b_n+1)^2.\end{aligned}$$

Hieraus folgt sofort $\left[\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i}\right] = b_n = b_{n+1}$.

(2) $b_{n-1} = b_n$ und $b_{n-2} \neq b_{n-1}$ und b_n ist keine Zweierpotenz, d.h. b_n ist das zweite von zwei aufeinander folgenden gleichen Folgengliedern, aber nicht das zweite von drei aufeinander folgenden gleichen Folgengliedern:

Aus der Definition folgt $b_{n+1} = b_n + 1$ und wir können ähnlich wie oben aufspalten:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} b_i &= 2\sum_{i=1}^{b_n} i + \sum_{i=1}^{k} 2^i + 1 + \; = (2^k + r + 1)\cdot(2^k + r) + 2^{k+1} - 1 + 1\\ &= (2^k + r + 1)\cdot(2^k + r + 1) - (2^k + r + 1) + 2^{k+1} = (2^k + r + 1)^2 + 2^k - r - 1\\ &\geq (2^k + r + 1)^2 = (b_n+1)^2 \quad \text{(da } b_n \text{ keine Zweierpotenz ist, ist } r < 2^k \text{ !).}\end{aligned}$$

Andererseits ist aber auch

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} b_i &= (2^k + r + 1)^2 + 2^k - r - 1 = (2^k + r + 2)^2 - 2(2^k + r + 1) - 1 + 2^k - r - 1\\ &= (2^k + r + 2)^2 - 2^k - 2r - 4 \leq (b_n + 2)^2.\end{aligned}$$

Hieraus folgt sofort $\left[\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i}\right] = b_n + 1 = b_{n+1}$.

(3) b_n ist das zweite von drei aufeinander folgenden Folgengliedern, die alle die gleiche Zweierpotenzen sind:

Dann ist wieder $b_{n+1} = b_n$. Die Aufspaltung erfolgt wie im Fall (2), die Zweierpotenzen 2^{k+1} kommen nur zwei Mal vor, werden also nur in der ersten Teilsumme berücksichtigt; ferner ist $r = 2^k$; man erhält also

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} b_i &= (2^k + r + 1)^2 + 2^k - r - 1 = (2^k + r + 1)^2 + 2^k - 2^k - 1 = (2^k + r + 1)^2 - 1\\ &= (b_n + 1)^2 - 1.\end{aligned}$$

Hieraus folgt ebenfalls $\left[\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i}\right] = b_n = b_{n+1}$.

(4) b_n ist das dritte von drei aufeinander folgenden Folgengliedern, die alle die gleiche Zweierpotenz sind:

Dann ist $b_{n+1} = b_n + 1$ und mit $r = 2^k$, also $2^k + r = 2^{k+1}$ ergibt die Aufspaltung

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = 2\sum_{i=1}^{b_n} i + \sum_{i=1}^{k+1} 2^i + 1 + \;\; = (2^k + r + 1)\cdot(2^k + r) + 2^{k+2} - 1 + 1$$
$$= (2^{k+1} + 1)^2 - (2^{k+1} + 1) + 2^{k+2} = (2^{k+1} + 1)^2 + 2^{k+1} - 1$$
$$> (b_n + 1)^2.$$

Andererseits ist aber auch

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = (2^{k+1} + 1)^2 + 2^{k+1} - 1 = (2^{k+1} + 2)^2 - 2\cdot(2^{k+1} + 1) - 1 + 2^{k+1} - 1$$
$$= (2^{k+1} + 2)^2 - 2^{k+1} - 4 < (b_n + 2)^2.$$

Hieraus folgt ebenfalls $\left[\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i}\,\right] = b_n + 1 = b_{n+1}$.

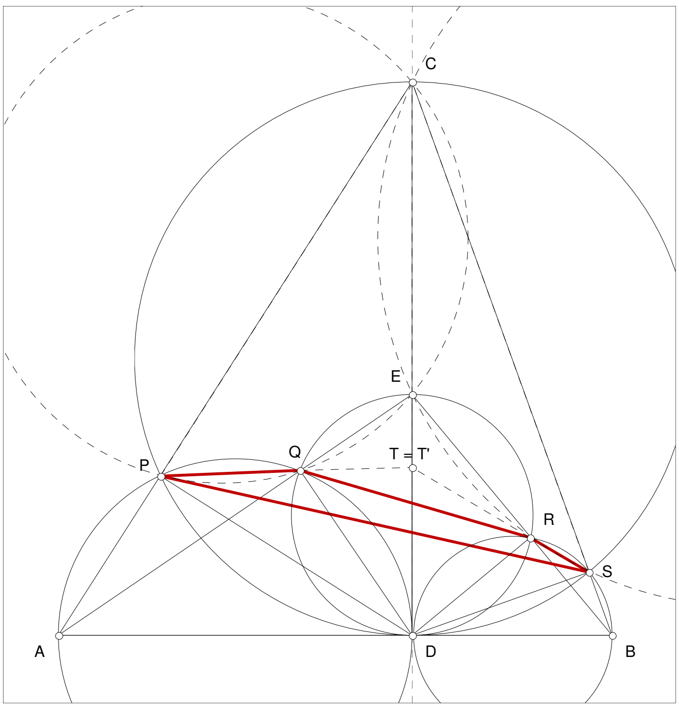
Damit gehorchen die beiden Folgen den gleiche Rekursionsgleichungen und alles ist gezeigt.

Aufgabe 3: Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck ABC. Der Fußpunkt der Höhe h_c sei mit D bezeichnet, ferner sei E ein beliebiger Punkt auf der Strecke CD. Schließlich seien P, Q, R und S die Fußpunkte der Lote von D auf die Geraden AC, AE, BE bzw. BC.

Beweise: Die Punkte P, Q, R und S liegen entweder auf einem Kreis oder auf einer Geraden.

Vorbemerkung: Falls E = C ist P = Q und R = S, d.h. es werden nur noch zwei Punkte betrachtet. Hier gibt es sowohl eine Gerade also auch viele Kreise, auf denen P, Q, R und S gleichzeitig liegen. Strenggenommen muss das Wort "entweder" also aus der Aufgabenstellung gestrichen werden. Falls E = D, ist Q = R = D; es bleiben drei Punkte, für die die Aussage immer gilt. Im folgenden nehmen wir deswegen an, dass E im Innern der Strecke DC liegt. Einige Beweise werden so allgemein formuliert, dass man erkennt, dass die Aussage für jeden Punkt der Geraden (DC) gilt.

1. Beweis (6 Mal Sekantensatz): Wegen der rechten Winkel bei P, Q, R und S liegen die Punkte P und Q auf dem Thaleskreis über AD, die Punkte R und S auf dem Thaleskreis über DB, die Punkte P und S auf dem Kreis mit Durchmesser CD und die Punkte Q und R auf dem Kreis mit Durchmesser DE. Ferner ist die Gerade CD Tangente an die beiden Thaleskreise über AD und DB mit gemeinsamen Berührpunkt D, die Gerade AB ist Tangente an die Kreise mit Durchmesser CD bzw. DE, ebenfalls mit gemeinsamem Berührpunkt D.



Nun wenden wir zweimal den Sehnen–Tangentensatz und dessen Umkehrung (STS) an: Es ist

$\overline{AC}\cdot\overline{AP} = \overline{AD}^2 = \overline{AQ}\cdot\overline{AE}$, also liegen P, Q, E und C auf einem Kreis. (Der Spezialfall, dass sie auf einer Geraden liegen, scheidet aus, da P, Q und C sicher nicht kollinear sind).

Die Geraden (PQ) und (CD) sind sicher nicht parallel; sie schneiden sich also, ihren Schnittpunkt bezeichnen wir mit T. Wieder zweimal nach STS ist $\overline{TD}^2 = \overline{TP}\cdot\overline{TQ} = \overline{TC}\cdot\overline{TE}$.

Auf der anderen Seite des Dreiecks erhalten wir analog (der Schnittpunkt von (RS) mit (CD) sei hier mit T' bezeichnet) $\overline{T'D}^2 = \overline{T'R}\cdot\overline{T'S} = \overline{T'C}\cdot\overline{T'E}$.

Nach Vorgabe der Punkte C, D und E ist die Lage von T bzw. T' auf der Strecke CD eindeutig bestimmt (bewegt man T bzw. T' von D weg, so wird die linke Seite stetig größer, die rechte Seite stetig kleiner). Da beide Gleichungen identisch sind, ist T = T'.

Aus den beiden Gleichungen folgt also $\overline{TP}\cdot\overline{TQ} = \overline{T'R}\cdot\overline{T'S} = \overline{TR}\cdot\overline{TS}$ und hieraus wieder nach STS, dass P, Q, R und S auf einem Kreis bzw. im Spezialfall auf einer Geraden liegen.

2. Beweis (Nachweis über Winkel im Viereck PQRS, mehrfach Umfangswinkelsatz): Wegen der rechten Winkel bei P, Q, R und S liegen die Punkte P und Q auf dem Thaleskreis über AD, die Punkte R und S auf dem Thaleskreis über DB, die Punkte P und S auf dem Thaleskreis über CD und die Punkte Q und R auf dem Kreis mit Durchmesser DE. Ferner ist die Gerade CD Tangente an die beiden Thaleskreise über AD und DB mit gemeinsamen Berührpunkt D, die Gerade AB ist Tangente an die Kreise mit Durchmesser CD bzw. DE, ebenfalls mit gemeinsamem Berührpunkt D. Weiter ist das Dreieck ΔADE rechtwinklig bei D, es wird durch die Höhe DQ in zwei Dreiecke unterteilt, die zum ursprünglichen Dreieck ΔADE ähnlich sind, also die gleichen Innenwinkel haben. Entsprechendes gilt für das Dreieck ΔBDC mit der Höhe DS. Es ist also

Nach Umfangswinkelsatz in den Kreisen DSCP und DBSR ist

$$\tau := \angle DPS = \angle DCS = \angle BDS = \angle BRS = \angle ERT \text{ und}$$

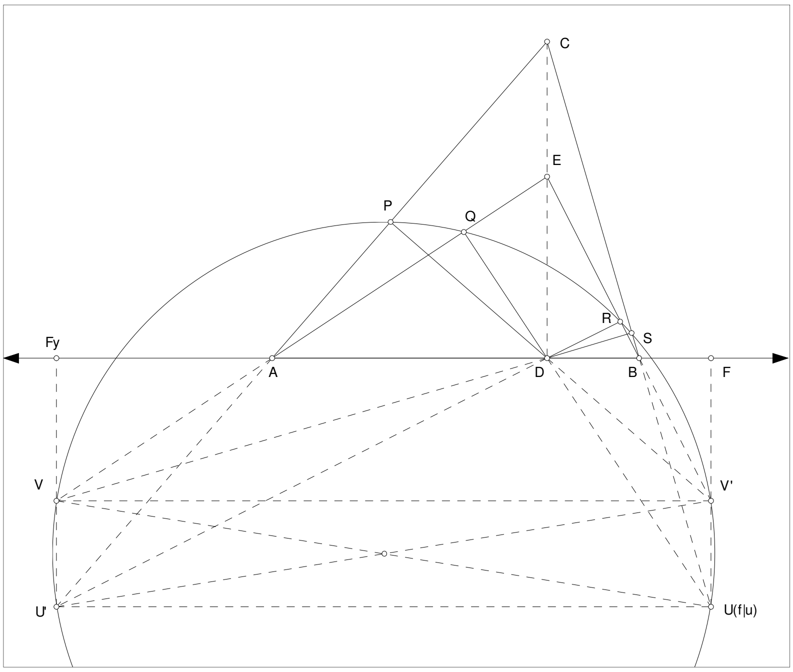
$$\varphi := \angle DPQ = \angle DAQ = EDQ = \angle ERQ$$

Also ist $\angle SPQ + \angle QRS = |\varphi - \tau| + 180° - |\varphi - \tau| = 180°$; damit bilden die Punkte P, Q, R und S entweder ein Sehnenviereck oder sie liegen auf einer Geraden.

3. Beweis (Ähnlichkeit bzw. Strahlensatz, mit Konstruktion des Kreises): Wir betrachten zunächst den Fall, dass E nicht mit dem Höhenschnittpunkt zusammenfällt.

Dann ist die Gerade (AE) zwar senkrecht zu (DQ), aber nicht senkrecht zu (BC), d.h (DQ) und (BC) sind nicht parallel, haben also einen Schnittpunkt. diesen nennen wir U. Ebenso ist (BC) nicht gemeinsames Lot von (DS) und (AE), also besitzen (DS) und (AE) einen Schnittpunkt, den wir V nennen. Nach Konstruktion ist nun sowohl $\angle VQU = 90°$ als auch $\angle VSU = 90°$, also liegen Q und S auf dem Thaleskreis über der Strecke UV.

In analoger Weise konstruieren wir die Punkte U' und V' als Schnittpunkte der Geraden (DR) und (AC) bzw. (DP) und (BE); es liegen dann P und R auf dem Thaleskreis über U'V'. Es genügt nun zu zeigen, dass diese beiden Thaleskreise identisch sind; hierzu genügt es wiederum zu zeigen, dass das Viereck UV'VU' ein Rechteck ist.



Hierzu führen wir noch den Hilfspunkt F als Fußpunkt des Lotes von U auf (AB) ein. In der so entstehenden Figur haben die Dreiecke ΔBFU und ΔBDC paarweise parallele Seiten, sind also ähnlich; ebenso sind die Dreiecke ΔDFU und ΔEDA ähnlich, weil sie beide einen rechten Winkel haben und die Schenkel der Winkel bei U und bei A paarweise senkrecht aufeinander stehen, also ebenfalls gleich sind. Es sei bemerkt, dass dies für alle Lagen von E relativ zum Höhenschnittpunkt gilt.

Für die Rechnung benötigen wir nur Längen von Strecken, die parallel zu AB oder DC sind, es liegt daher nahe, ein Achsenkreuz mit der x–Achse auf AB und der y–Achse auf CD zu legen und die Koordinaten wie folgt zu bezeichnen; A($-a$|0), B(b|0), C(0|c), F(f|0), U(f|$-u$). In der Lage der Skizze, d.h. wenn U und C in verschiedenen Halbebenen bez. AB liegen, sind alle Werte a, b, c, f und u positiv und stellen somit die Längen der entsprechenden Strecken dar. Falls U und C in der gleichen Halbebene bez. AB liegen, muss in der folgenden Rechnung f durch $-f$ und u durch $-u$ ersetzt werden. Die Schlussfolgerungen aus den Ergebnissen der Rechnung bleiben die gleichen.

Aus der oben beschriebenen Ähnlichkeit folgt dann:

$\frac{f}{u} = \frac{e}{a}$, also $f = \frac{e}{a}\cdot u$, sowie $\frac{b}{c} = \frac{f-b}{u}$; Einsetzen ergibt

$\frac{b}{c} = \frac{\frac{e}{a}u-b}{u} = \frac{e}{a}-\frac{b}{u}$; über den Zwischenschritt $\frac{b}{u} = \frac{e}{a}-\frac{b}{c} = \frac{ce-ab}{ac}$ erhalten wir

$u = \frac{abc}{ce-ab}$, und hieraus $f = \frac{e}{a}\cdot\frac{abc}{ce-ab} = \frac{bce}{ce-ab}$.

Keiner der auftretenden Nenner kann den Wert 0 annehmen, der Fall $ce - ab = 0$ tritt nur auf, wenn E der Höhenschnittpunkt ist (letzteres folgt aus der Tatsache, dass genau dann die Dreiecke ΔADC und ΔHDB ähnlich sind, also $c : a = b : e$ gilt.).

Der Ausdruck für u ist symmetrisch in a und b, der Ausdruck für f symmetrisch in c und e. Dies nützen wir aus zur Berechnung der entsprechenden Werte für U', V' und V: Offensichtlich hat U' die gleiche y–Koordinate wie U (bei der Berechnung vertauscht man a und b), und V' hat die gleiche x–Koordinate wie U (bei der Berechnung vertauscht man c und e) und schließlich hat V die gleiche y–Koordinate wie U und die gleiche x–Koordinate wie U'. Also ist das Viereck UV'VU' ein Rechteck, das war zu zeigen.

Abschließend betrachten wir den Fall, dass E mit dem Höhenschnittpunkt zusammenfällt (zur Betrachtung genügt obige Figur, auch wenn dort E nicht genau auf den Höhenschnittpunkt gelegt wurde): Zunächst stellt man fest, dass die Vierecke DERQ und DBSR Sehnenvierecke sind (rechte Winkel bei Q und R bzw. R und S!), also $\angle QRD = \angle QED$ und $\angle BRS = \angle BDS$; ferner ist $\angle DAE = 90° - \angle AED$ (im rechtwinkligen Dreieck ADE) und schließlich $\angle BDS = \angle DAE$ (da E mit dem Höhenschnittpunkt zusammenfällt, ist DS||AE. Dies setzen wir zusammen zu

$$\angle QRS = \angle QRD + \angle DRB + \angle BRS = \angle QED + 90° + \angle BDS = 90° - \angle DAE + 90° + \angle DAE$$
$$= 180°.$$

Also sind Q, R und S kollinear; analog zeigt man, dass P,Q und R kollinear sind. Das war zu zeigen.

4. Beweis: (abbildungsgeometrisch mit Inversion am Kreis): Wegen der rechten Winkel bei P, Q, R und S liegen die Punkte P und Q auf dem Thaleskreis K_{AD} über AD, die Punkte R und S auf dem Thaleskreis K_{BD} über DB, die Punkte P und S auf dem Kreis K_{CD} mit Durchmesser CD und die Punkte Q und R auf dem Kreis K_{DE} mit Durchmesser DE. Ferner ist die Gerade CD Tangente an K_{AD} und K_{BD} mit gemeinsamem Berührpunkt D, die Gerade AB ist Tangente an die Kreise K_{CD} bzw. K_{DE}, ebenfalls mit gemeinsamem Berührpunkt D. In der Figur ist also folgendes zu bemerken:

- Die Kreise K_{AD}, K_{BD}, K_{CD} und K_{DE} gehen alle durch D.
- K_{AD} und K_{BD} haben D als einzigen gemeinsamen Punkt; ebenso die K_{CD} und K_{DE}.
- K_{AD} und K_{BD} schneiden die Kreise K_{CD} und K_{DE} rechtwinklig in D, also aus Symmetriegründen auch rechtwinklig in den von D verschiedenen Schnittpunkten, d.h. in P, Q, R und S.

Wir unterwerfen nun die gesamte Figur einer Inversion an einem Kreis mit Mittelpunkt D und bezeichnen das Bild eines Objektes X bei dieser Abbildung mit X'. Nach bekannten Eigenschaften kann man in der Bildfigur bemerken:

- K'_{AD}, K'_{BD}, K'_{CD} und K'_{DE} sind alle Geraden.
- K'_{AD} und K'_{BD} haben keine gemeinsamen Punkte, sind also parallel, ebenso K'_{CD} und K'_{DE}.
- K'_{AD} und K'_{BD} schneiden die K'_{CD} und K'_{DE} rechtwinklig in den Punkten P, Q, R und S.

Damit bilden die Bilder P', Q', R' und S' ein Viereck mit vier rechten Winkeln, also ein Rechteck. Dieses hat einen Umkreis; das Urbild dieses Umkreises ist entweder wieder ein Kreis durch P, Q, R und S oder – wenn dieser Umkreis durch D geht – eine Gerade durch P, Q, R und S. Dies war zu zeigen.

Bemerkung: In der Literatur findet sich der hier anwendbare 5 – Kreise – Satz (*five – circle – theorem*, gelegentlich *Miquel* zugeschrieben): Falls die Punkte der 4 Punktequadrupel (P,Q,A,B), (P,S,A,D), (Q,R,B,C) und (P,Q,R,S) jeweils auf einem Kreis liegen, dann liegen auch die Punkte des Quadrupels (A,B,C,D) auf einem Kreis. Etwas weniger streng formuliert: Liegen die einen vier Schnittpunkte einer Kette von 4 Kreisen auf einem Kreis, dann auch die anderen vier.

Aufgabe 4: Im Folgenden sei mit $\mathbb{N}_0$ die Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen bezeichnet.

Bestimme alle Polynome p, die die beiden folgenden Eigenschaften erfüllen:

(1) Alle Koeffizienten von p sind aus $\mathbb{N}_0$.

(2) Es gibt eine Funktion f, die auf $\mathbb{N}_0$ definiert ist und nur Zahlen aus $\mathbb{N}_0$ als Werte annimmt und die $f(f(f(n))) = p(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ erfüllt.

Anmerkung: Die Richtigkeit des Resultates ist zu beweisen.

Antwort: (1) Alle Polynome p der Form $p(x) = x + c$, wobei c eine Zahl aus $\mathbb{N}_0$ ist, die kein ganzzahliges Vielfaches von 3 ist, erfüllen die Eigenschaft (2) nicht.

(2) Alle anderen Polynome p mit Koeffizienten aus $\mathbb{N}_0$ erfüllen beide Eigenschaften.

Bezeichnungsweisen: Für ganzzahlige $k \geq 0$ sei mit $f^{(k)}(a)$ die Zahl bezeichnet, die durch k–maliges Anwenden der Funktion f auf die Zahl a entsteht. Es ist also $f^{(0)}(a) = a$, $f^{(1)}(a) = f(a)$, $f^{(k+1)}(a) = f(f^{(k)}(a))$ für alle $k > 1$. Sofern f injektiv ist, bezeichne – soweit existent – $f^{(-1)}(a)$ das Urbild von a, $f^{(-(k+1))}(a)$ das Urbild von $f^{(-k)}(a)$.

Beweis:

zu (1): Wir betrachten ein Polynom der Form p der Form $p(x) = x + c$, wobei c eine Zahl aus $\mathbb{N}_0$ ist Da p offensichtlich streng monoton steigend ist, ist p injektiv, d.h. aus $p(a) = p(b)$ folgt $a = b$; ferner ist die Wertemenge von p die Menge $p(\mathbb{N}_0) = \{c, c+1, c+2, c+3, ...\}$ und $p^{(k)}(x) = x + kc$, ferner $p(x) > x$ für alle $x \in \mathbb{N}_0$.

Nun nehmen wir an, dass eine Funktion f mit den geforderten Eigenschaften existiert. Dann ist f ebenfalls injektiv, denn es gilt

$$f(a) = f(b) \Rightarrow f^{(3)}(a) = f^{(3)}(b) \Rightarrow p(a) = p(b) \Rightarrow a = b.$$

Nach Voraussetzung ist die Funktion f auf allen Zahlen aus $\mathbb{N}_0$ definiert, ihre Werte sind nicht negativ und es gibt für alle $m \in \mathbb{N}_0$ ein $i \in \{0;1;2\}$ so, dass

$$f^{(m)}(x) = f^{(i)}(f^{(3[\frac{m}{3}])}(x)) = f^{(3[\frac{m}{3}])}(f^{(i)}(x)) = p^{([\frac{m}{3}])}(f^{(i)}(x)) = f^{(i)}(x) + [\frac{m}{3}]\cdot c .$$

Insbesondere ist für $f^{(m)}(x) \geq c$ für alle $m \geq 3$. (*)

Nun betrachten wir die drei Mengen

$F_0 := \{x \in \mathbb{N}_0 \mid$ es existiert kein $y \in \mathbb{N}_0$ mit $f(y) = x\}$,

$F_1 := \{x \in \mathbb{N}_0 \mid$ es existiert ein $y \in F_0$ mit $f(y) = x\}$, sowie

$F_2 := \{x \in \mathbb{N}_0 \mid$ es existiert ein $y \in F_1$ mit $f(y) = x\}$.

Nach Konstruktion haben keine zwei dieser Mengen gemeinsame Elemente. Gleichzeitig bestimmt die Funktion f eine Bijektion zwischen diesen Mengen, sie habe also gleiche Mächtigkeit.

Wenn $x \geq c$, so ist $x \in p(\mathbb{N}_0)$, d.h. es existiert ein $y \in \mathbb{N}_0$, sodass $x = p(y) = f^{(3)}(y)$; also ist x in keiner der Mengen F_0, F_1 oder F_2 enthalten. Umgekehrt folgt aus $x < c$, dass x in einer dieser Mengen enthalten ist: andernfalls gäbe es ein $x \in \mathbb{N}_0$ mit $f^{(3)}(x) < c$; dies steht im Widerspruch zu (*).

Damit stellen die Mengen F_0, F_1 und F_2 eine Zerlegung der Menge $\{0; 1; 2, ..; c-1\}$ in drei gleichmächtige Mengen dar; damit folgt in diesem Fall aus der Existenz einer zulässigen Funktion f, dass c durch 3 teilbar ist. Das war zu zeigen.

zu (2): Wir konstruieren für alle anderen Polynome eine solche Funktion f; dabei unterscheiden wir folgende Fälle:

Fall 1: $p(x) = c$ für ein $c \in \mathbb{N}_0$ und alle $x \in \mathbb{N}_0$ oder

$p(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{N}_0$:

Dann erfüllt die Funktion $f: x \mapsto p(x)$ offensichtlich die Voraussetzungen: f ist für jedes $x \in \mathbb{N}_0$ definiert, die Funktionswerte sind ebenfalls aus $\mathbb{N}_0$ und es ist $f^{(k)}(x) = c$ bzw. $f(^{(k)}(x) = x$ für alle $k,x \in \mathbb{N}_0$, insbesondere ist $f^{(3)}(x) = p(x)$ für alle $x \in \mathbb{N}_0$.

Fall 2: $p(x) = x + c$ für eine durch 3 ohne Rest teilbare Zahl $c \in \mathbb{N}_0$:

Dann ist $\frac{c}{3} \in \mathbb{N}_0$, die Funktion $f: x \mapsto x + \frac{c}{3}$ ist für jedes $x \in \mathbb{N}_0$ definiert, jeder Funktionswert ist aus $\mathbb{N}_0$ und es ist $f^{(3)}(x) = x + 3 \cdot \frac{c}{3} = x + c = p(x)$; also erfüllt f die geforderten Voraussetzungen.

Fall 3: $p(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i$, wobei alle $a_i \in \mathbb{N}_0$, $a_1 \geq 2$ oder $a_i > 0$ für irgend ein $i > 1$.

Dann ist $p(x+1) \geq p(x) + 1$ für alle $x \geq 0$ und somit $p(x)$ streng monoton wachsend, insbesondere injektiv, und die Menge $\mathbb{N}_0 \setminus p(\mathbb{N}_0)$ hat abzählbar unendlich viele Elemente; diese können wir der Größe nach geordnet mit $m_0, m_1, m_2, ...$ bezeichnen.

Weiter betrachten wir die Menge $G := \{x \in \mathbb{N}_0 \mid x = p(x)\}$. Weil zusätzlich $p(x+1) \geq p(x) + 2$ für alle $x \geq 1$, ist entweder $G = \{\}$ oder $G = \{0\}$ oder $G = \{0;1\}$. Nun definieren wir f (der Pfeil $\mapsto$ beschreibe diese Zuordnung):

Für $x \in G$ ordnen wir zu $x \mapsto x$, ferner

$m_0 \mapsto m_1 \mapsto m_2 \mapsto p(m_0) \mapsto p(m_1) \mapsto p(m_2) \mapsto p^{(2)}(m_0) \mapsto p^{(2)}(m_1) \mapsto p^{(2)}(m_2) \mapsto p^{(3)}(m_0) \mapsto p^{(3)}(m_1)$ ...

$m_3 \mapsto m_4 \mapsto m_5 \mapsto p(m_3) \mapsto p(m_4) \mapsto p(m_5) \mapsto p^{(2)}(m_3) \mapsto p^{(2)}(m_4) \mapsto p^{(2)}(m_5) \mapsto p^{(3)}(m_3) \mapsto$ ...

$m_6 \mapsto m_7 \mapsto m_8 \mapsto p(m_6) \mapsto p(m_7)$ ...

$\vdots$

Es ist noch zu zeigen:

Jeder Zahl aus $\mathbb{N}_0$ wird so mittels f eine Zahl zugeordnet: Falls $z \in \mathbb{N}_0 \setminus p(\mathbb{N}_0)$ oder $z \in$ G, ist in obigem Schema eine Vorschrift direkt enthalten. Falls $z \in p(\mathbb{N}_0)$ ist, gibt es ein m_i und ein k, sodass $m_i = p^{(-k)}(z)$, damit kann man in obigem Schema in der Zeile von m_i ablesen, dass $f(z) = f^{(3k+1)}(m_i)$.

Die Zuordnung ist wohldefiniert, d.h. keine Zahl kommt in obigem Zuordnungsschema doppelt vor: Aus $p^{(r)}(x) = p^{(s)}(y)$ (o.B.d.A. sei $r \geq s$) folgt entweder $x = y \in$ G oder (wegen der Injektivität von p) $p^{(r-s)}(x) = p^{(0)}(y) = y$; das heißt aber, dass $y \in \mathbb{N}_0 \setminus p(\mathbb{N}_0)$. Hieraus folgt $r - s = 0$, also $r = s$ und hieraus $p^{(0)}(x) = p^{(0)}(y)$ also $x = y$.

Bemerkungen: Diese Konstruktion von p kann auch angewendet werden, wenn $\mathbb{N}_0 \setminus p(\mathbb{N}_0)$ endlich ist und $|\mathbb{N}_0 \setminus p(\mathbb{N}_0)|$ durch drei teilbar ist, d.h. für den Fall $p(x) = x + c$ mit 3|c.

Der Beweis benützt die Tatsache, dass es in F_0 ein Element gibt. Dessen Existenz muss eigens nachgewiesen werden.