Bundeswettbewerb Mathematik

Kortrijker Str. 1 • 53177 Bonn

Telefon: 0228 - 9 59 15-20 • Telefax: 0228 - 9 59 15-29

E-Mail: info@bundeswettbewerb-mathematik.de

www.bundeswettbewerb-mathematik.de

Korrekturkommission • Karl Fegert

Aufgaben und Lösungen

1. Runde 2011

Über Kommentare und Ergänzungen zu diesen Lösungsbeispielen freuen wir uns!

Anschrift oder Email–Adresse s.o.

Stand: 15. Mai 2011

Aufgabe 1: Zehn Schalen stehen im Kreis. Sie werden – irgendwo beginnend – im Uhrzeigersinn mit 1, 2, 3, ..., 9 bzw. 10 Murmeln gefüllt. In einem Zug darf man zu zwei benachbarten Schalen je eine Murmel hinzufügen oder aus zwei benachbarten Schalen – wenn sie beide nicht leer sind – je eine Murmel entfernen.

Kann man erreichen, dass nach endlich vielen Zügen in jeder Schale genau 2011 Murmeln liegen?

Anmerkung: Die Richtigkeit des Resultates ist zu beweisen.

Antwort: Nein, das kann man nicht erreichen.

1. Beweis (mit Invariante): Wir betrachten die Gesamtzahl der Murmeln in den 10 Schalen. Zu Beginn haben wir $1 + 2 + 3 + ... + 10 = 55$ Murmeln in den Schalen, das ist eine ungerade Zahl. Mit jedem Zug vergrößert sich die Gesamtzahl um zwei oder sie nimmt um zwei ab, d.h. die Gesamtzahl bleibt ungerade. Im gewünschten Endzustand möchte man insgesamt $10 \cdot 2011 = 20110$ Murmeln in den Schalen haben. Dies ist aber eine gerade Zahl, d.h. dieser Zustand kann nie eintreten.

Variante (man muss die konkrete Zahlenwerte gar nicht berechnen): Wir betrachten die Gesamtzahl der Murmeln in den 10 Schalen. Zu Beginn haben wir $1 + 2 + 3 + ... + 10$ Murmeln in den Schalen, das ist – es kommen genau 5 ungerade Summanden vor – eine ungerade Zahl. Mit jedem Zug vergrößert sich die Gesamtzahl um zwei oder sie nimmt um zwei ab, d.h. die Gesamtzahl bleibt ungerade. Im gewünschten Endzustand möchte man insgesamt $10 \cdot 2011$ Murmeln in den Schalen haben, d.h. das Produkt aus der geraden Zahl 10 mit einem ganzzahligen Faktor. Dies ist aber stets eine gerade Zahl, d.h. dieser Zustand kann nie eintreten.

Bemerkung: Damit haben wir sogar bewiesen, dass niemals in allen Schalen die gleiche Anzahl von Murmeln sein können.

2. Beweis (mit Invariante): Wir betrachten vor und nach jedem Zug die Gesamtzahl der Murmeln in der zweiten, vierten, sechsten, achten und zehnten Schale und subtrahieren davon die Gesamtzahl aller Murmeln in der ersten, dritten, fünften, siebten und neunten Schale. Die Berechnung vor dem ersten Zug ergibt $(2 + 4 + 6 + 8 + 10) - (1 + 3 + 5 + 7 + 9) = 5$. Nach jedem Zug hat sich entweder je genau eine Zahl in den beiden Klammern um 1 erhöht oder je genau eine Zahl in beiden Klammern um 1 erniedrigt, d.h. nach einem Zug erhalten wir durch unsere Rechnung die gleiche Zahl wie vor dem Zug. Wären zu irgendeinem Zeitpunkt in jeder Schale gleich viele Murmeln (so wie im gewünschten Endzustand), so wäre die berechnete Zahl aber 0, d.h. bei irgendeinem Zug hätte sich diese Zahl geändert. Das kann aber nicht sein.

Aufgabe 2: An einem runden Tische sitzen 16 Kinder. Nach der Pause setzen sie sich wieder an den Tisch. Dabei stellen sie fest: Jedes Kind sitzt entweder auf seinem ursprünglichen Platz oder auf einem der beiden benachbarten Plätze.

Wie viele Sitzordnungen sind auf diese Weise nach der Pause möglich?

Anmerkung: Die Richtigkeit des Resultates ist zu beweisen.

Antwort: Es gibt **2209** solche Sitzordnungen.

Gemeinsame Bezeichnungen: Eine Sitzordnung, bei der jedes Kind entweder auf seinem ursprünglichen Platz oder auf einem der beiden benachbarten Plätze sitzt, nennen wir *zulässig*.

Mit $K(n)$ sei die Anzahl der zulässigen Sitzordnungen für n nebeneinander im Kreis sitzende Kinder bezeichnet.

Mit dem Platz "*rechts (bzw. links) neben*" einem bestimmten Platz im Kreis ist der gegen dem (bzw. im) Uhrzeigersinn folgende Platz gemeint.

1. Beweis: Wir lösen die Aufgabe etwas allgemeiner, indem wir eine rekursive Formel angeben, die die Anzahl der zulässigen Sitzordnungen $K(n)$ für n = 1, 2, 3, ... Kinder berechnet. Als Hilfsmittel benötigen wir zusätzlich eine rekursive Formel für die Anzahl der zulässigen Sitzordnungen, wenn n Kinder *in einer Reihe* nebeneinander sitzen, diese Anzahl bezeichnen wir mit $R(n)$:

HS (1): $R(n)$ gehorcht der Rekursion $R(1) = 1$, $R(2) = 2$ und $R(n) = R(n-1) + R(n-2)$ für alle $n > 2$.

Beweis des HS (1): Die Richtigkeit von $R(1) = 1$, $R(2) = 2$ ist sofort klar; für $n > 2$ betrachten wir das ursprünglich ganz links in der Reihe sitzende Kind: Entweder sitzt es nach der Pause wieder ganz links, dann gibt es für die $n-1$ rechts von ihm in einer Reihe sitzenden Kinder $R(n-1)$ zulässige Sitzordnungen. Oder es sitzt auf dem zweiten Platz von links, dann muss das zweite Kind auf dem ersten Platz sitzen und für die restlichen $n-2$ Kinder gibt es noch $R(n-2)$ zulässige Sitzordnungen.

Durch Kopfrechnen lässt sich leicht rekursiv die Richtigkeit der folgenden Tabelle überprüfen (die Folge $(R(n))$ ist nach einer Indexverschiebung identisch mit der *Fibonacci*–Folge):

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$R(n)$	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597

Zur Berechnung von $K(n)$ benützen wir noch den weiter unten bewiesenen

HS (2): Es ist $K(1) = R(1)$, $K(2) = R(2)$ und $K(n) = R(n-1) + 2R(n-2) + 2$ für alle $n > 2$.

Damit und mit obiger Tabelle lässt sich sofort berechnen:

$$K(16) = R(15) + 2R(14) + 2 = 987 + 2\cdot 610 + 2 = \mathbf{\underline{2209}}.$$

Beweis des HS (2): Die Richtigkeit von $K(1) = R(1) = 1$ und $K(2) = R(2) = 2$ überprüft man durch einfaches Durchprobieren: Sowohl im Kreis als auch in der Reihe sind für $n = 1$ und $n = 2$ beliebige zwei Plätze benachbart, also ist jede Sitzordnung zulässig. So beträgt die Anzahl der zulässigen Sitzordnungen bei einem Kind $K(1) = 1! = 1 = R(1)$, bei zwei Kindern $K(2) = 2! = 2 = R(2)$.

Sei nun $n > 2$. Wir unterscheiden mehrere Fälle:

Fall 1: Das erste Kind sitzt wieder auf seinem ursprünglichen Platz: Dann können sich die ursprünglich neben ihm sitzenden Kinder nicht auf seinen Platz setzen, d.h. die Anzahl der zulässigen Sitzordnungen für die restlichen $n-1$ Kinder entspricht der Anzahl der zulässigen Sitzordnungen von $n-1$ nebeneinander in einer Reihe sitzenden Kindern, davon gibt es genau $R(n-1)$ Stück.

Fall 2: Das erste Kind sitzt rechts neben seinem ursprünglichen Platz und hat mit dem ursprünglich rechts neben ihm sitzenden Kind die Plätze getauscht: Für die restlichen $n-2$ Kinder gibt es entsprechend der Begründung im Fall 1 genau $R(n-2)$ zulässige Sitzordnungen.

Fall 3: Das erste Kind sitzt links neben seinem ursprünglichen Platz und hat mit dem ursprünglich links neben ihm sitzenden Kind die Plätze getauscht: Aus Symmetriegründen gibt es wie im Fall 2 genau $R(n-2)$ zulässige Sitzordnungen.

Fall 4: Keiner der Fälle 1 – 3 tritt ein, d.h. das erste Kind sitzt rechts oder links neben seinem ursprünglichen Platz und hat nicht seinen Platz mit seinem ursprünglichen rechten bzw. linken Nachbarn getauscht: Dann bleibt als einzige Möglichkeit, dass die Kinder alle einen Sitzplatz nach rechts bzw. nach links gerutscht sind. Dies sind 2 zulässige Sitzordnungen.

Die Addition der Anzahlen zulässiger Sitzordnungen ergibt sofort die zu beweisende Rekursion.

Variante: $K(n)$ kann auch ohne Kenntnis der Zahlen $R(n)$ und damit ohne die Erstellung obiger Tabelle berechnet werden: Die Anwendung der Rekursionsformel für $R(n)$ ergibt für $n > 4$ (man beachte, dass in der folgenden Herleitung der Term $R(n–4)$ auftaucht!) die Rekursionsformel

$$\begin{aligned}
K(n) &= R(n-1) && + 2R(n-2) && + 2\\
&= R(n-2) + R(n-3) + (2-2) && + 2[R(n-3) + R(n-4)] + (2-2) && + 2\\
&= R(n-2) + 2R(n-3) + 2 && + R(n-3) + 2R(n-4) + 2 && - 2\\
&= K(n-1) + K(n-2) - 2;
\end{aligned}$$

Zusammen mit $K(1) = 1$, $K(2) = 2$, $K(3) = 3! = 6$ (bei drei Kindern ist jeder Sitz jedem anderen benachbart, also ist jede Sitzordnung zulässig), $K(4) = 9$ (3, falls das erste Kind auf seinem Platz bleibt; je 3, wenn das erste Kind einen Platz nach rechts bzw. einen Platz nach links rutscht) lässt sich folgende Tabelle leicht durch Kopfrechnen verifizieren:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	**16**
$K(n)$	1	2	6	9	13	20	31	49	78	125	201	324	523	845	1366	**2209**

Bemerkung: $K(n) = R(n-1) + 2R(n-2) + 2 = R(n-1) + R(n-2) + R(n-2) + 2 = R(n) + R(n-2) + 2$ für alle $n > 2$ beschreibt die gleiche Rekursion in einer anderen Form.

Die Rekursion in der Variante schreiben wir in der Form $[K(n) - 2] = [K(n-1) - 2] + [K(n-2) - 2]$ für alle $n > 4$; d.h. die Anzahl der Sitzordnungen, die nicht nach Fall 4 entstehen, folgt mit den Startwerten 4 und 7 der Fibonacci-Rekursion. Dies ist – nach Indexverschiebung – die *Lucas*–Folge, $L(0) = 2$, $L(1) = 1$, $L(n+2) = L(n) + L(n+1)$. Deren vielfältige Eigenschaften können bei der Herleitung des Ergebnisses verwendet werden.

2. Beweis: Wir benennen die Plätze irgendwo beginnend gegen den Uhrzeigersinn der Reihe nach mit $P_1, P_2, ..., P_{16}$ und die Kinder so mit $K_1, K_2, ..., K_{16}$, dass vor der Pause jedes Kind K_i auf dem Platz P_i sitzt ($i = 1, 2, 3, ..., 16$).

Wenn nach der Pause irgend zwei benachbarte Kinder beide rechts neben ihrem ursprünglichen Platz sitzen, also z.B. K_1 auf P_2 und K_2 auf P_3, dann kann K_3 nur auf P_4, K_4 nur auf P_5 usw. sitzen, d.h. alle Kinder sitzen rechts neben ihrem ursprünglichen Platz. Entsprechendes gilt, wenn zwei benachbarte Kinder nach der Pause beide links neben ihrem ursprünglichen Platz sitzen. Diese beiden zulässigen Sitzordnungen entstehen also, indem nach der Pause alle Kinder einen Platz nach rechts oder alle Kinder um einen Platz nach links rutschen. Diese beiden zulässigen Sitzordnungen nennen wir *zyklisch*.

Das Entstehen aller anderen zulässigen Sitzordnungen können wir folgendermaßen beschreiben: Wir wählen aus den 16 Kindern k Paare von nebeneinander sitzenden Kindern aus, wobei kein Kind in zwei Paaren vorkommt, und lassen jedes Paar seine Sitze tauschen. Die Zahl k kann dabei alle ganzzahligen Werte $0 \le k \le 8$ annehmen; d.h. die identische Sitzordnung ist hier eingeschlossen.

Die Anzahlen aller nichtzyklischen Sitzordnungen können wir auf verschiedene Weise bestimmen:

Variante 1: Wenn K_{16} und K_1 ein Tauschpaar sind, dann gibt es $\binom{14-k}{k}$ Möglichkeiten, genau k weitere Tauschpaare auszuwählen; und wenn K_{16} und K_1 kein Tauschpaar sind, gibt es $\binom{16-k}{k}$ Möglichkeiten, genau k Tauschpaare auszuwählen (Begründungen s. u.). Unter der Einbeziehung der beiden zulässigen zyklischen Sitzordnungen erhalten wir also (offensichtlich wurde keine Sitzordnung ausgelassen oder zwei Mal gezählt)

$$K(16) = \sum_{k=0}^{8}\binom{16-k}{k}+\sum_{k=0}^{7}\binom{14-k}{k}+2$$

$$= [1+15+91+286+495+462+210+36+1] + [1+13+66+165+210+126+28+1] + 2$$

$$= 1597 + 610 + 2 = \underline{\mathbf{2209}}.$$

Begründung für die Formel: Sei eine Auswahl von k Tauschpaaren gegeben, wobei K_{16} und K_1 kein Paar bilden. In Gedanken entfernen wir jeweils den linken Tauschpartner (also K_1 sicher nicht); auf diese Art wird obiger Auswahl bijektiv eine Auswahl von k Kindern als rechter Tauschpartner aus $16-k$ Kindern zugeordnet, dafür gibt es $\binom{16-k}{k}$ Auswahlmöglichkeiten. Ähnlich argumentieren wir im anderen Fall: Zusätzlich zum Tauschpaar K_{16} und K_1 gebe es k weitere Tauschpaare, von diesen weiteren Paaren entfernen wir wieder den linken Partner; dieses Mal wird bijektiv eine Auswahl von k Kinder als rechter Tauschpartner aus insgesamt $14-k$ Kindern zugeordnet, dafür gibt es $\binom{14-k}{k}$ Möglichkeiten.

Variante 2: Wir betrachten zunächst den Fall, dass es mindestens ein Tauschpaar gibt, d.h. dass $1 \le k \le 8$. Dann wählen wir eines dieser Tauschpaare aus, entfernen es und betrachten die restlichen 14 Kinder, die nun in einer Reihe nebeneinander sitzen. Die $k-1$ Tauschpaare und die $14-2(k-1)$ einzelnen Kinder betrachten wir als $k-1+14-2(k-1) = 15-k$ "Sitzgruppen". Diese anzuordnen gibt es $\binom{15-k}{k-1}$ verschiedene Möglichkeiten. Da das ausgewählte Tauschpaar auf insgesamt 16 Stellen sein kann und wir eines von k Tauschpaaren ausgewählt haben, ist die Anzahl an Anordnungsmöglichkeiten mit $k \ge 1$ Tauschpaaren $\frac{16}{k}\binom{15-k}{k-1}$. Summation und Berücksichtigung von einer Anordnung mit 0 Tauschpaaren sowie von zwei zyklischen Sitzordnungen ergibt

$$K(16) = 3+\sum_{k=1}^{8}\frac{16}{k}\binom{15-k}{k-1} = 3+16+104+352+660+672+336+64+2 = \underline{\mathbf{2209}}.$$

Bemerkung: Die Summanden sind identisch mit den Summanden in Variante 3! Eine Umformung führt aber auch auf den Term von Variante 1:

$$K(16) = 3+\sum_{k=1}^{8}\frac{16}{k}\binom{15-k}{k-1} = 1+\sum_{k=1}^{8}\frac{(16-k)}{k}\binom{15-k}{k-1}+\sum_{k=1}^{8}\frac{k}{k}\binom{15-k}{k-1}+2$$

$$= 1+\sum_{k=1}^{8}\binom{16-k}{k}+\sum_{k=0}^{7}\binom{14-k}{k}+2 = \sum_{k=0}^{8}\binom{16-k}{k}+\sum_{k=0}^{7}\binom{14-k}{k}+2.$$

Variante 3: Wir stellen $16-k$ Sitzgelegenheiten um den Tisch: nämlich k Zweierbänke und $16-2k$ Einzelstühle ($k \in \{0,1,2,...,8\}$). Nach der Pause tauschen die Kinder auf den Zweierbänken ihren Platz, die Kinder auf den Einzelstühlen bleiben auf dem gleichen Sitz. Damit ist eine bijektive Zuordnung zwischen der Menge der Anordnungen von Zweierbänken und Einzelstühlen und der Festlegung von k Tauschpaaren unter den 16 Kindern gegeben.

Unterscheiden wir zunächst die Zweierbänke untereinander und auch die Einzelstühle untereinander, so gibt es 16 Möglichkeiten, die erste Sitzgelegenheit aufzustellen. Für die restlichen $16-2k+k-1 = 16-k-1$ Sitzgelegenheiten gibt es $(16-k-1)!$ Möglichkeiten der Aufstellung; nach Zählprinzip also insgesamt $16 \cdot (16-k-1)!$ Möglichkeiten. Da man aber die k Zweierbänke untereinander nicht unterscheiden kann, ebenso wenig die $(16-2k)$ Einzelstühle, müssen wir diese Anzahl noch durch $k! \cdot (16-2k)!$ dividieren. Unter Berücksichtigung der beiden nichtzyklischen Sitzordnungen ergibt sich

$$K(16) = \sum_{k=0}^{8}\left(\frac{16(16-k-1)!}{k!(16-2k)!}\right)+2 = 1+16+104+352+660+672+336+64+2+2 = \underline{\mathbf{2209}}.$$

Bemerkung: Die Summanden in Variante 2 beschreiben die Anzahl der Möglichkeiten, genau k Tauschpaare zu bestimmen, ebenso die Summe zweier entsprechender Summanden in Variante 1. Tatsächlich haben diese jeweils den gleichen Wert: 16 = 15 + 1, 104 = 91 + 13, 352 = 286 + 66, usw.

Variante 4: Jede solche Auswahl und damit jede Sitzordnung können wir beschreiben als eine 16–stellige Zahl, die nur Ziffern 0 und 1 hat; dabei bedeutet eine "1" an der i–ten Stelle, dass das Kind K_i nach der Pause mit dem Kind K_{i+1} den Platz tauscht, eine "0" bedeutet, dass es – je nach Verhalten des Kindes K_{i-1} – sich auf den gleichen Platz setzt oder mit dem Kind K_{i-1} den Platz tauscht. (Wie üblich betrachten wir die Indices mod 16, d.h. die Index 17 und 1 werden als identisch betrachtet, ebenso 0 und 16.) Wir bemerken noch, dass zu verschiedenen zulässigen Sitzordnungen auch verschiedene Zahlen gehören. Wenn wir von unserer Zahl zusätzlich fordern, dass keine zwei Ziffern 1 aufeinander folgen und auch nicht die erste und letzte Ziffer gleichzeitig den Wert 1 haben, gehört auch umgekehrt zu jeder solchen Zahl eine zulässige Sitzordnung, wobei die Zuordnung bijektiv ist. Die Anzahl der zulässigen nicht–zyklischen Sitzordnungen ist als identisch mit der Anzahl dieser Zahlen. Um sie zu bestimmen, benützen wir ein 16–zeiliges Schema mit zwei Spalten, in das wir einen Baum einzeichnen:

Z. 1	1	0
Z. 2	0	1 0
Z. 3	1 0	0 1 0
Z. 4	0 1 0	1 0 0 1 0
Z. 5	1 0 0 1 0	0 1 0 1 0 0 1 0
Z. 6	0 1 0 1 0 0 1 0	1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0
....	....	.....
....	....	....

Erläuterung: In Zeile i ($1 \le i \le 16$) werden die möglichen Werte für die i–te Ziffer eingetragen. In Zeile 1 beginnen wir mit einer 1 in der linken Spalte und einer 0 in der rechten Spalte. In der nächsten Zeile kommen die möglichen Fortsetzungen, d.h. in Zeile i+1 ($1 \le i \le 14$) stehen unter einer 1 die Ziffer 0, und unter einer 0 die Ziffern 0 oder 1. Schließlich steht in Zeile 16 in der linken Spalte unter jeder Ziffer nur eine Ziffer 0, weil sonst die zugehörige Zahl an der 16. und an der 1. Stelle unerlaubterweise gleichzeitig eine 1 hätte; das Eintragen von Ziffern in die rechte Spalte erfolgt nach dem bisherigen Schema. Wir verbinden nun übereinander stehende Einträge mit einem "Ast", dieser verzweigt sich an jeder 0 in den Zeilen 1 bis 15. Jeder durchgehende Ast beschreibt damit eine Zahl mit 16 Ziffern 0 oder 1, die den oben beschrieben Anforderungen genügt; jeder Eintrag in Zeile 16 lässt sich zusammen mit dem zu ihm führenden Ast in eineindeutiger Weise den zulässigen nichtzyklischen Sitzordnungen zuordnen.

Die Anzahl der Einträge in Zeile i bezeichnen wir mit $Z(i)$ und berechnen diesen Wert rekursiv:

In der gesamten Zeile 1 steht eine 0 und eine 1, ebenso in der linken Spalte von Zeile 3. Da die Einträge in einer Zeile durch die Einträge der vorherigen Zeile eindeutig bestimmt sind, stehen also in der linken Spalte in Zeile i ($3 \le i \le 15$) die gleichen Einträge wie in der gesamten Zeile $i - 2$. Analog schließen wir für die rechte Spalte: Die Einträge in der gesamten Zeile 1 wiederholen sich in der rechten Spalte von Zeile 2, also stehen in der rechten Spalte in Zeile i ($2 \le i$ 15) die gleichen Einträge wie in der gesamten Zeile $i - 1$. Damit gilt $Z(i) = Z(i-2) + Z(i-1)$ für alle $3 \le i \le 15$. Zusammen mit $Z(1) = 2$ und $Z(2) = 3$ erhalten wir die folgende, leicht durch Kopfrechnen zu verifizierende Tabelle (sie stellt nach geeigneter Indexverschiebung die Fibonaccifolge dar):

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$Z(n)$	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597

Nun zu Zeile 16: In der linken Spalte steht unter jeder Ziffer nur eine Ziffer 0, also gibt es dort gleich viele Einträge wie in der linken Spalte der Zeile 15, also gleich viele Einträge wie in der Zeile 13 insgesamt. In der rechten Spalte von Zeile 16 stehen so viele Einträge wie in der Zeile 15 insgesamt. So erhält man unter Einbeziehung der zwei zyklischen zulässigen Sitzordnungen

$K(16) = Z(13) + Z(15) + 2 = 610 + 1597 + 2 = \mathbf{\underline{2209}}$.

Bemerkungen: Bei entsprechender Modifikation kann man aus dieser Darstellung allgemein die Anzahl der zulässigen Sitzordnungen $K(n)$ für alle $n > 3$ berechnen: es gilt $K(n) = Z(n-3) + Z(n-1) + 2$.

Zahlenfolgen (z_i) mit $z_i \in \{0;1\}$ und $z_i \cdot z_{i+1} = 0$ und ihr Zusammenhang mit den *Fibonacci*folgen werden in der Literatur behandelt unter dem Namen "*Zeckendorf*-Sequenzen"; weitere interessante Zusammenhänge und Ergebnisse sind unter diesem Stichwort *googlebar* im Internet.

In der Variante 1 addiert man Binomialkoeffizienten, bei denen die Summe aus oberer und unterer Zahl konstant ist. Diese findet man im *Pascal*–Dreieck auf einer schräg aufwärts führenden Diagonalen. Somit wird das allgemein bekannte Ergebnis bestätigt: Addiert man die Zahlen auf der n–ten schräg aufwärts führenden Diagonalen im *Pascal*–Dreieck, so erhält man die n–te *Fibonacci*–Zahl.

3. Beweis (knapp formulierte Skizze): Es gibt zwei zulässige Sitzordnungen, bei denen alle Kinder nach der Pause um einen Sitz nach rechts oder um einen Sitz nach links rutschen; diese nennen wir zyklische Sitzordnung. Wie im zweiten Beweis zeigen wir, dass alle anderen zulässigen Sitzordnungen durch Tausch von zwei benachbarten Kindern entstehen, wobei jedes Kind höchstens einmal tauscht. Um diese zu zählen, teilen wir die Kinder in 4 Gruppen zu je 4 benachbarten Kindern ein. Jede zulässige nichtzyklische Sitzordnung entsteht durch Tausch innerhalb einer solchen Vierergruppe und / oder Tausch an den "Grenzen". (Die identische Sitzordnung, d.h. der Fall, dass kein Tausch stattfindet, sei jeweils eingeschlossen.)

Tauschen die Kinder nur innerhalb einer solchen Vierergruppe ihre Sitzplätze, so gibt es in jeder solchen Vierergruppe genau 5 Sitzordnungen, wie man durch systematisches Probieren nachprüft: (1,2,3,4), (2,1,3,4), (1,2,4,3), (1,3,2,4) und (2,1,4,3). Tauscht genau ein Kind (z.B. Kind 4) mit einem Partner aus der benachbarten Vierergruppe, so bleiben innerhalb der Vierergruppe noch 3 Sitzordnungen, nämlich (1,2,3), (2,1,3) und (1,3,2). Tauschen beide Kinder am Rand mit einem Partner aus der Nachbargruppe, so bleiben innerhalb der Vierergruppe noch 2 Sitzordnungen, nämlich (2,3) und (3,2).

Nun schreiben wir alle Möglichkeiten systematisch auf (die Zahlen in den eckigen Klammern bedeuten die Nummern von Kindern, die noch tauschen können, die Zahlen außerhalb bedeuten Nummern von Kindern, die fest gesetzt sind) und bestimmen jeweils die Anzahl Möglichkeiten nach dem Zählprinzip:

a) 4 Vierergruppen, Vertauschungen finden an keiner Grenze zwischen den Vierergruppen statt (also – wenn überhaupt – nur innerhalb der Vierergruppen, d.h. die identische Sitzordnung mitgezählt): In jeder Vierergruppe gibt es genau 5 Sitzordnungen, es gibt in diesem Fall also $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$ Möglichkeiten.

[1,2,3,4] , [5,6,7,8] , [9,10,11,12] , [13,14,15,16]

b) 4 Vierergruppen, an genau einer Grenze zwischen den Vierergruppen findet eine Vertauschung statt: Die Grenze, an der Vertauschungen stattfinden, kann an 4 Stellen gewählt werden; in den beiden Gruppen rechts und links dieser Grenze gibt es jeweils 3 Sitzordnungen, in den restlichen beiden jeweils 5, es gibt in diesem Fall also $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 900$ Sitzordnungen.

[1,2,3], 5, 4, [6,7,8] , [9,10,11,12] , [13,14,15,16]

c) 4 Vierergruppen, an genau zwei Grenzen findet eine Vertauschung statt, und zwar an zwei Grenzen, die zur gleichen Vierergruppen gehören: Die zwei Grenzen können auf 4 Arten gewählt werden, in der Gruppe zwischen den Grenzen gibt es genau 2 Sitzordnungen, in den benachbarten Gruppen je 3 und in der letzten Gruppe genau 5, es gibt in diesem Fall also $4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 360$ Sitzordnungen

[1,2,3], 5, 4, [6,7], 9, 8, [10,11,12] , [13,14,15,16]

d) 4 Vierergruppen, an genau zwei Grenzen findet eine Vertauschung statt, und zwar an Grenzen, die nicht zur gleichen Vierergruppe gehören: Die zwei Grenzen können auf 2 Arten gewählt werden, in jeder Gruppe gibt es genau 3 Sitzordnungen, es gibt in diesem Fall also $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 162$ Sitzordnungen.

[1,2,3], 5, 4, [6,7,8] , [9,10,11], 13, 12, [14,15,16]

e) 4 Vierergruppen, an genau drei Grenzen findet eine Vertauschung statt: Die Grenzen können auf 4 Arten gewählt werden, in zwei Gruppen gibt es genau 3 Sitzordnungen, in zwei Gruppen genau 2 Sitzordnungen, es gibt in diesem Fall also $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 144$ Sitzordnungen.

[1,2,3], 5, 4, [6,7], 9, 8, [10,11], 13, 12, [14,15,16]

f) alle sonstigen Fälle, d.h. 4 Vierergruppen, an jeder Grenze findet eine Vertauschung statt: Die Grenzen können nur auf eine Art gewählt werden, in jeder Gruppe gibt es genau 2 Sitzordnungen, es gibt in diesem Fall also $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ Sitzordnungen.

16, [2,3], 5, 4 [6,7], 9, 8, [10,11], 13, 12, [14,15], 1

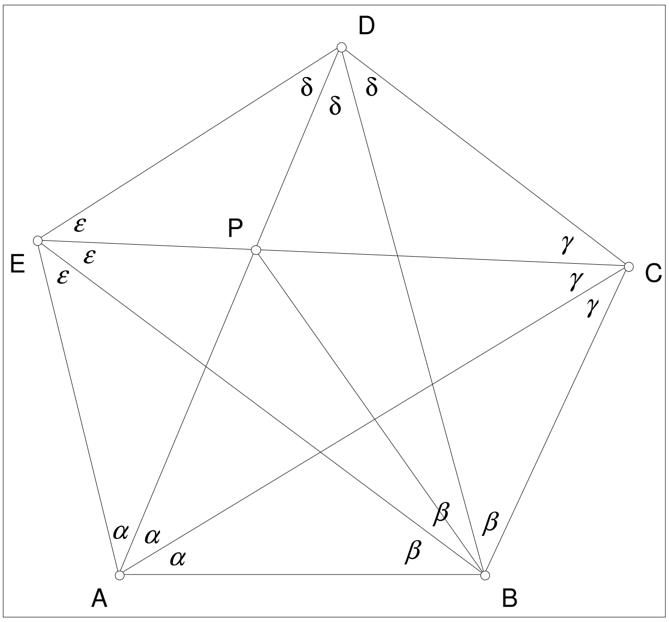
Die Gesamtzahl zulässiger Sitzordnungen beträgt also unter Berücksichtigung der beiden zyklischen Sitzordnungen insgesamt 625 + 900 + 360 + 162 + 144 + 16 + 2 = **2209**.

Bemerkung: Einige Teilnehmer hatten die drei in unseren Lösungsbeispielen als "zyklisch" bezeichneten Sitzordnungen als identisch betrachtet und so das Ergebnis 2207 erhalten. Eine solche Lösung wurde ebenfalls als richtig gewertet, wenn die Arbeit eine entsprechende Bemerkung enthielt.

Aufgabe 3: Die Diagonalen eines konvexen Fünfecks teilen jeden seiner Innenwinkel in drei gleich große Teile. Folgt hieraus, dass das Fünfeck regelmäßig ist?

Anmerkung: Die Richtigkeit des Resultates ist zu beweisen.

Antwort: Ja, das Fünfeck ist dann in jedem Fall regelmäßig.



Gemeinsame Bezeichnungen: Nach Voraussetzung werden durch die Diagonalen an der Ecke A, B, C, D und E jeweils drei gleich weite Winkel bestimmt; deren Weite bezeichnen wir mit α, β, γ, δ bzw. ε (vgl. Figur).

1. Beweis (Winkeljagd): Es genügt zu zeigen, dass alle Seiten gleich lang sind und dass alle Innenwinkel gleich groß sind.

Bekanntlich beträgt die Innenwinkelsumme in jedem Dreieck 180°. Dies lesen wir in einigen Teildreiecken ab und erhalten folgende fünf Gleichungen (um die anschließende Auflösung dieses Gleichungssystems leichter zu gestalten, multiplizieren wir die beiden Seiten der dritten und fünften Gleichung mit –4, die beiden Seiten der vierten Gleichung mit 11):

im 3–Eck ABC:	$\alpha + 3\beta + \gamma$	$= 180°$
im 3–Eck BCD:	$\beta + 3\gamma + \delta$	$= 180°$
im 3–Eck CDE:	$-4\gamma - 12\delta - 4\varepsilon$	$= -4 \cdot 180°$
im 3–Eck DEA:	$11\alpha + 11\delta + 33\varepsilon$	$= 11 \cdot 180°$
im 3–Eck EAB:	$-12\alpha - 4\beta - 4\varepsilon$	$= -4 \cdot 180°$

Nun werden die linken bzw. rechten Seiten aller fünf Gleichungen addiert und man erhält $25\,\varepsilon = 5 \cdot 180°$, also $\varepsilon = 180° : 5 = 36°$. Da das Gleichungssystem sich nicht verändert, wenn man die Winkelweiten zyklisch vertauscht (also α durch β, β durch γ, ..., ε durch α ersetzt), haben alle anderen Winkel ebenfalls die Weite 36°.

Damit haben alle betrachteten Dreiecke zwei gleiche Winkel, d.h. sie sind alle gleichschenklig, somit gilt $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EA}$. Also sind alle Seiten des Fünfecks gleich lang, zusätzlich haben alle Innenwinkel des Fünfecks die gleiche Weite 3 · 36°. Das war zu zeigen.

Variante 1 zur Auflösung des Gleichungssystems: Die Innenwinkelsumme im Fünfeck ABCDE liefert

$$3\alpha + 3\beta + 3\gamma + 3\delta + 3\varepsilon = (5-2) \cdot 180°° = 3 \cdot 540°;$$

die Addition der Innenwinkelsumme in den Dreiecken ΔABC, ΔABD, ΔBCE und ΔBDE liefert

$$\begin{aligned} 4 \cdot 180° &= (\alpha + 3\beta + \gamma) + (2\alpha + 2\beta + \delta) + (2\beta + 2\gamma + \varepsilon) + (\beta + 2\delta + 2\varepsilon) \\ &= 3\alpha + 8\beta + 3\gamma + 3\delta + 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Subtraktion der Seiten beider Gleichungen liefert sofort $5\beta = (4-3) \cdot 180°$, also $8\beta + = 36°$; zyklisches Vertauschen liefert $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \varepsilon = 36°$.

Variante 2 zur Auflösung des Gleichungssystems: Eine erste Lösung des Gleichungssystems ist $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \varepsilon = 36°$, was man "sofort sieht" und z.B. durch Kopfrechnen sofort verifiziert. Dies ist aber auch die einzige Lösung, da die Determinante dieses linearen Gleichungssystems von Null verschieden ist (zur Berechnung wenden wir den Gauss-Algorithmus an):

$$\det\begin{pmatrix}1&3&1&0&0\\0&1&3&1&0\\0&0&1&3&1\\1&0&0&1&3\\3&1&0&0&1\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1&3&1&0&0\\0&1&3&1&0\\0&0&1&3&1\\0&-3&-1&1&3\\0&-8&-3&0&1\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1&3&1&0&0\\0&1&3&1&0\\0&0&1&3&1\\0&0&8&4&3\\0&0&21&8&1\end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix}1&3&1&0&0\\0&1&3&1&0\\0&0&1&3&1\\0&0&0&-20&-5\\0&0&0&-55&-20\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1&3&1&0&0\\0&1&3&1&0\\0&0&1&3&1\\0&0&0&-20&-5\\0&0&0&0&-6{,}25\end{pmatrix} = 1\cdot1\cdot1\cdot(-20)\cdot(-6{,}25)$$

$$= 125 \neq 0.$$

2. Beweis (Winkeljagd): Es genügt zu zeigen, dass alle Seiten gleich lang sind und dass alle Innenwinkel gleich groß sind.

Bekanntlich hat jedes n – Eck eine Innenwinkelsumme von $(n-2)\cdot 180°$. Somit liefert das Fünfeck ABCDE die Gleichung $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon = {}^1/_3\cdot(5-2)\cdot 180° = 180°$, also

$$\alpha+\beta+\gamma = 180° - (\delta+\varepsilon), \qquad \text{und das Dreieck ABC liefert}$$

$$\alpha+3\beta+\gamma = 180°.$$

Durch Subtraktion der linken bzw. der rechten Seiten erhalten wir hieraus die notwendige Bedingung $2\beta = \delta+\varepsilon$. O.B.d.A. nehmen wir nun an, dass kein Innenwinkel größer als β ist, d.h. dass insbesondere $\beta \geq \delta$ und $\beta \geq \varepsilon$ ist. Wäre nun $\beta \neq \delta$, also $\beta > \delta$, erhielte man mit $\varepsilon = 2\beta - \delta > \beta$ einen Widerspruch.

Also ist auch kein Innenwinkel größer als δ. Nach zyklischer Vertauschung der Benennungen (d.h. man ersetzt α durch γ, β durch δ, ..., ε durch β) kann man auf gleiche Weise argumentieren und erhält, dass auch kein Innenwinkel größer als α ist. Mehrfache Anwendung dieses Kalküls ergibt $\alpha=\beta=\gamma=\delta=\varepsilon$.

Damit liegen nach der Umkehrung des Umfangswinkelsatzes die Ecken D und E auf dem Umkreis des Dreiecks ΔABC; ferner sind die Seiten als Sehnen unter den gleich großen Winkeln gleich lang. Das war zu zeigen. (Oder: Das Dreieck ABC ist gleichschenklig mit Basis AC, also sind die Seiten AB und BC gleichlang. Analog schließen wir auf die Gleichheit der anderen Seiten.)

Variante zum Nachweis, dass alle Winkel gleich groß sind: Die Betrachtung der Innenwinkelsumme in den Dreiecken ΔABD und ΔABC liefert $2\alpha+2\beta+\delta = 180°$ sowie $\alpha+3\beta+\gamma = 180°$.

Subtraktion liefert $\alpha-\beta = \gamma-\delta$; zyklisches Vertauschen zusätzlich $\alpha-\beta = \gamma-\delta = \varepsilon-\alpha$. Wären nicht alle Winkel gleich, so könnten wir o.B.d.A. annehmen, dass α der größte der fünf Winkel ist und zusätzlich $\alpha-\beta > 0°$. Daraus folgt aber sofort $\varepsilon-\alpha > 0°$, also der Widerspruch $\varepsilon > \alpha$..

3. Beweis: Mit P bezeichnen wir den Schnittpunkt der Geraden AD und CE. Nach Voraussetzung sind die drei Winkel bei A gleich groß, damit ist die Gerade AC Winkelhalbierende des Winkels ∠BAD und ebenso auch Winkelhalbierende von ∠ECB. Die Spiegelung an der Geraden AC überführt die Geraden AB, BC und den Punkt B in die Geraden AD bzw. CE und den Punkt P. Aus den Eigenschaften der Spiegelung folgt, dass BP⊥AC und dass die Strecke BP durch AC halbiert wird. Damit sind die beiden Dreiecke ΔBAP und PCB gleichschenklig, jeweils mit Basis BP, d.h. es ist $\overline{AB} = \overline{AP}$ und $\overline{BC} = \overline{PC}$

Nun betrachten wir das Dreieck ΔEBD: In ihm sind EC und DA Winkelhalbierende, also ist ihr Schnittpunkt P der Inkreismittelpunkt; damit ist BP die dritte Winkelhalbierende, sie halbiert den Winkel ∠DBE und damit auch den Winkel ∠CBA im Dreieck ΔCBA. Da sie gleichzeitig senkrecht auf AC steht, ist auch das Dreieck ΔCBA gleichschenklig mit Basis AC, insbesondere ist $\overline{AB} = \overline{BC}$. Zusammen mit $\overline{PC} = \overline{BC}$ folgt, das das Viereck ABCP ein Rhombus ist; insbesondere ist AB||PC sowie BC||AP.

Durch zyklische Vertauschung erhalten wir, dass alle Seiten des Fünfecks gleich lang sind und dass jede Diagonale parallel zur nicht-anliegenden Seite ist. Damit ist die Gerade BP nicht nur senkrecht auf AC, sondern auch auf ED, also ist das Dreieck ΔDBE ebenfalls gleichschenklig und somit $\overline{EB} = \overline{ED}$. Wieder mit zyklischer Vertauschung folgt, dass alle Diagonalen gleichlang sind. Schließlich folgt nach Kongruenzsatz "*sss*", dass alle Randdreiecke kongruent und somit auch alle Innenwinkel gleich groß sind. Das war zu zeigen.

Bemerkung: Leider hatten etliche Teilnehmer übersehen, dass der Nachweis, dass alle Innenwinkel gleich sind, nicht ausreicht. Gelegentlich wurde auch zu den Gleichungssystemen mit den Winkelweiten nur eine Lösung angegeben, ohne dass ein Nachweis der Eindeutigkeit der Lösung erfolgte.

Aufgabe 4: Es seien a und b positive ganze Zahlen. Bekanntlich liefert die Division mit Rest von $a{\cdot}b$ durch $(a + b)$ eindeutig bestimmte ganze Zahlen q und r mit $a{\cdot}b = q(a + b) + r$ und $0 \le r < a + b$.

Bestimme alle Paare (a,b), für die $q^2 + r = 2011$ gilt.

Anmerkung: Die Richtigkeit des Resultates ist zu beweisen.

Ergebnis: Die Bedingungen der Aufgabe erfüllen genau die $2 \cdot 45$ Zahlenpaare (a,b), für die es ein ganzzahliges q mit $0 \le q \le 44$ gibt, sodass $a = 2011 + q$ und $b = 1 + q$ ist, oder für das $a = 1 + q$ und $b = 2011 + q$ ist. (Die Variable q ist hier aus der Aufgabenstellung übernommen; es wird damit über die Fragestellung hinaus beantwortet, welchen Wert die Variable q in der Aufgabenstellung abhängig vom Zahlenpaar (a,b) annimmt.)

Variante: Die gesuchten Zahlenpaare sind genau die 90 Paare (a,b), die von der Form $(a,b) = (z\,; z + 2010)$ oder $(a,b) = (z + 2010\,; z)$ mit positivem ganzzahligem $z \in [1;45]$ sind.

1. Beweis: Wir betrachten zunächst nur Paare (a,b) mit $a \ge b$. Da die Aufgabenstellung symmetrisch in a und b ist (d.h. sie bleibt die gleiche, wenn wir a und b vertauschen), erhalten wir das korrekte Ergebnis, wenn wir zu jedem Lösungspaar (a,b) mit $a > b$ auch noch das Paar (b,a) in die Lösungsmenge aufnehmen.

Zuerst leiten wir eine **notwendige** Bedingung für a, b, q und r her: Da a und b beide positiv sind, ist $q \ge 0$, und da $0 \le q^2 = 2011 - r \le 2011$, ist $0 \le q \le \sqrt{2011} < 45$.

Aus $a{\cdot}b = q(a + b) + r$ folgt $r = a{\cdot}b - q(a + b)$; zusammen mit $r = 2011 - q^2$ folgt $2011 = a{\cdot}b - q(a + b) + q^2$ oder äquivalent $2011 = (a - q)(b - q)$; d.h. 2011 ist das Produkt der Zahlen $(a - q)$ und $(b - q)$; diese sind als Differenzen ganzer Zahlen ebenfalls ganze Zahlen.

Hieraus folgt $(a - q) = 2011$ und $(b - q) = 1$, alle anderen Möglichkeiten scheiden aus: Es ist 2011 eine Primzahl (auf einen Nachweis wird hier verzichtet), sodass nur die ganzzahligen Faktoren ± 1 und ± 2011 mit jeweils gleichem Vorzeichen in Frage kommen. Sowohl $(a - q) = 1$, $(b - q) = 2011$ als auch $(a - q) = -2011$, $(b - q) = -1$ stehen im Widerspruch zu $a \ge b$; das letzte Paar $(a - q) = -1$ und $(b - q) = -2011$ erfüllt nicht die Bedingung $b > 0$. Damit ist das Paar (a,b) notwendigerweise eines der 45 Zahlenpaare der Form $(a,b) = (2011 + q\,; 1 + q)$ mit $0 \le q \le 44$, q ganzzahlig.

Diese Bedingung ist aber auch **hinreichend**: Sei (a,b) von der Form $(a,b) = (2011 + q\,,\, 1 + q)$ mit $0 \le q \le 44$. Dann ist nämlich $a = 2011 + q > 1 + q = b$, ferner

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (2011 + q)\cdot(1 + q) = 2011 + 2012q + q^2 = 2011 + q((2011 + q) + (1 + q)) - q^2 \\ &= q(a + b) + 2011 - q^2 = q(a + b) + r \end{aligned}$$

mit $r = 2011 - q^2$; diese Zahl r erfüllt auch die Bedingung aus dem Divisionsalgorithmus, weil mit $0 \le q \le 44$ stets

$$\begin{aligned} 0 &\le 75 = 2011 - 44^2 \le 2011 - q^2 \\ &= r < (2011 + q) + (1 + q) = a + b; \end{aligned}$$

schließlich ist nach Definition von r auch $q^2 + r = 2011$ erfüllt.

Variante:

Es ist $a{\cdot}b = q(a + b) + r \;\Leftrightarrow\; a{\cdot}(b - q) = bq + r \;\Leftrightarrow\; a{\cdot}(b - q) = (b - q)\cdot q + q^2 + r \;\Leftrightarrow\; a = q + \dfrac{2011}{b-q}$.

(Die Division durch $(b-q)$ ist erlaubt, weil mit $(b - q) = 0$ in der vorletzten Gleichung der Widerspruch $0 = q^2 + r = 2011$ folgen würde.) Es ist also $(b-q)$ ein Teiler von 2011, und da 2011 eine Primzahl ist, ist $(b-q) \in \{1; -1; -2011; 2011\}$.
Der Rest erfolgt wie im 1. Beweis.

2. Beweis: Zuerst leiten wir eine **notwendige** Bedingung her: Aus $q^2 + r = 2011$, also $r = 2011 - q^2$, und $a \cdot b = q(a+b) + r$ folgt sofort $a \cdot b = q(a+b) + 2011 - q^2$, was wir äquivalent umformen zur quadratischen Gleichung $q^2 - q(a+b) + a \cdot b - 2011 = 0$. Mit bekannter Lösungsformel erhalten wir die notwendige Bedingung

$$q_{1,2} = \frac{a+b \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4ab + 4 \cdot 2011}}{2} = \frac{a+b \pm \sqrt{(a-b)^2 + 4 \cdot 2011}}{2}.$$

Links steht nach Voraussetzung eine ganze Zahl, also muss der Wurzelausdruck auf der rechten Seite rational sein. Da gleichzeitig der Radikand eine ganze Zahl ist, muss nach bekanntem Satz der Radikand selbst eine Quadratzahl sein. Es gibt also ein ganzzahliges m mit $m^2 = (a-b)^2 + 4 \cdot 2011$ oder gleichbedeutend $(m + |a-b|) \cdot (m - |a-b|) = 4 \cdot 2011$.

Beide Faktoren auf der linken Seite sind offensichtlich ganzzahlig und man überprüft leicht, dass sie stets gleiche Parität haben, d.h. sie sind beide gerade oder beide ungerade. Da außerdem rechts eine durch 4 teilbare Zahl steht, sind die Faktoren links beide gerade; es ist also $\frac{m+|a-b|}{2} \cdot \frac{m-|a-b|}{2} = 2011$ und die beiden Brüche auf der linken Seite stellen ganze Zahlen dar. Da 2011 Primzahl ist (auf einen Nachweis wird hier verzichtet), müssen diese beiden Faktoren aus der Menge $\{-2011; -1; 1; 2011\}$ sein; und da zusätzlich der linke Faktor sicher größer ist als der rechte, kann man sogar schärfer schließen, dass

$$\left(\frac{m+|a-b|}{2}, \frac{m-|a-b|}{2}\right) = (2011;1) \text{ oder } \left(\frac{m+|a-b|}{2}, \frac{m-|a-b|}{2}\right) = (-1, -2011).$$

Diese Bedingung entspricht zwei Gleichungssystemen. Aus beiden Systemen erhalten wir durch einfache "Subtraktion der Gleichungen" $|a-b| = 2010$. Damit sind Lösungspaare (a,b) notwendigerweise von der Form $(a,b) = (z; z + 2010)$ oder $(a,b) = (z + 2010; z)$ mit positivem ganzzahligem z.

In beiden Fällen ist $a + b = 2z + 2010$; dies setzen wir in die Gleichung für q ein und erhalten

$$q_{1,2} = \frac{a+b \pm \sqrt{(a-b)^2 + 4 \cdot 2011}}{2} = \frac{2z + 2010 \pm \sqrt{2010^2 + 2 \cdot 2010 \cdot 2 + 2^2}}{2} = z + 1005 \pm 1006,$$

also $q_1 = z - 1$, $q_2 = z + 2011$ mit positivem ganzem z.

Schließlich berücksichtigen wir noch die Bedingung $q^2 + r = 2011$ und $r \geq 0$. Hieraus folgt sofort $q^2 \leq 2011$, also $q \leq \sqrt{2011} < 45$; die Lösung q_2 entfällt also und in $q_1 = z - 1$ kann z nur die Werte 1, 2, ..., 45 annehmen.

Alle Lösungspaare (a,b) sind damit notwendigerweise von der Form $(a,b) = (z, z + 2010)$ oder $(a,b) = (z + 2010, z)$ mit positivem ganzzahligem $z \in [1;45]$.

Nun zeigen wir noch, dass diese Bedingung auch **hinreichend** ist, d.h. dass alle diese Zahlenpaare tatsächlich die Bedingungen der Aufgabe erfüllen: Es ist für $q := z - 1$ und $r := (2011 - (z-1)^2)$

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (z + 2010) \cdot z = z^2 + 2010z \\ &= 2z^2 - 2z + 2010z - 2010 \qquad - z^2 + 2z - 1 + 2011 \\ &= (z-1)(2z + 2010) \qquad + (2011 - (z-1)^2) \\ &= q(a+b) + r, \end{aligned}$$

und da $1 \leq z \leq 45$, gilt auch

$$\begin{aligned} 0 &\leq 75 = 2011 - 44^2 \leq 2011 - (z-1)^2 \\ &= r \leq 2011 < 2010 + 2z \quad = a + b. \end{aligned}$$

Schließlich ist nach Definition auch $q^2 + r = (z-1)^2 + (2011 - (z-1)^2) = 2011$.

Bemerkung: Leider hatten etliche Teilnehmer nur die notwendige Bedingung hergeleitet und nicht nachgewiesen, dass diese auch hinreichend ist.