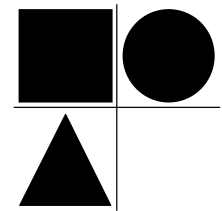


## **Bundeswettbewerb Mathematik**

Kortrijker Str. 1 • 53177 Bonn  
Telefon: 0228 - 9 59 15-20 • Telefax: 0228 - 9 59 15-29  
E-Mail: [info@bundeswettbewerb-mathematik.de](mailto:info@bundeswettbewerb-mathematik.de)  
[www.bundeswettbewerb-mathematik.de](http://www.bundeswettbewerb-mathematik.de)

**Korrekturkommission** • Karl Fegert



## **Aufgaben und Lösungen**

# **2. Runde 2011**

**Über Kommentare und Ergänzungen zu diesen Lösungsbeispielen freuen wir uns!**

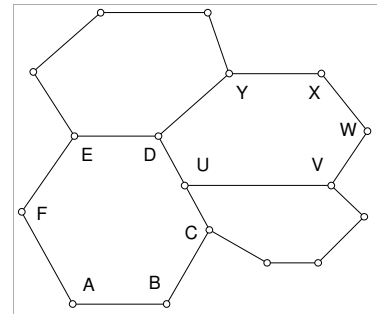
Anschrift oder Email-Adresse s.o.

Stand: 21. Oktober 2011



**Aufgabe 1:** Beweise, dass man ein Quadrat nicht in endlich viele Sechsecke zerlegen kann, deren Innenwinkel alle kleiner als  $180^\circ$  sind.

**1. Beweis** (durch Widerspruch unter Verwendung der Eulerscher Polyederformel): Wir nehmen an, es existiere eine solche Zerlegung. Diese erzeugt in kanonischer Weise einen planaren Graphen: Jedes Zerlegungssechseck bestimmt eine Fläche in diesem Graphen, jede Ecke einem Knoten und jede Seite bestimmt eine oder – wenn eine oder mehr Ecken eines anderen Zerlegungssechsecks auf einer Seite liegt – mehrere Kanten dieses Graphen. (Um Verwechslungen zu vermeiden, unterscheiden wir zwischen *Seiten* bzw. *Ecken* der Zerlegungssechsecke einerseits und andererseits *Kanten* bzw. *Knoten* des durch die Zerlegung erzeugten Graphen. Jedes Zerlegungssechseck hat so sechs Ecken und sechs Seiten, bestimmt im Graphen aber eine Fläche mit *mindestens* sechs Kanten und ebenso vielen Knoten. So bestimmt z.B. in der Figur das Zerlegungssechseck ABCDEF im graphentheoretischen Sinne das Siebeneck ABCUDEF.) In diesem Graphen bezeichnen wir wie üblich die Anzahl der Flächen mit  $f$ , die Anzahl der Kanten mit  $k$  und die Anzahl der Knoten mit  $e$ , ferner mit  $e_i$  die Anzahl der Knoten, von denen genau  $i$  Kanten ( $i = 2, 3, 4, \dots$ ) ausgehen. Schließlich sei die Anzahl derjenigen Knoten, die auf dem Rand des Quadrates liegen und nicht gleichzeitig Ecken des Quadrates sind, mit  $r$  bezeichnet.



Jede Ecke des Quadrates ist auch Ecke eines Zerlegungssechsecks, damit liegen nach Definition  $r + 4$  Knoten auf dem Rand des Quadrates und ebenfalls  $r + 4$  Kanten. Zählt man nun in jeder Zerlegungsfläche die Kanten, so werden alle Kanten genau zwei Mal gezählt mit Ausnahme der  $r + 4$  Kanten auf dem Rande des Quadrates; diese werden genau ein Mal gezählt. Da ferner jede Zerlegungsfläche sechs Ecken hat, die zugehörige Fläche des Graphen also mindestens sechs Knoten, gilt

$$(1) \quad 2k \geq 6f + r + 4.$$

Nun zählen wir über alle Knoten die Anzahl der von ihm ausgehenden Kanten: Wieder wird jede Kante doppelt gezählt, wir können also abschätzen:

$$2k = 2e_2 + 3e_3 + 4e_4 + 5e_5 + \dots \geq 3(e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + \dots) - e_2 = 3e - e_2 \text{ oder}$$

$$(2) \quad 4k \geq 6e - 2e_2.$$

Addition der Ungleichungen (1) und (2) ergibt zusammen mit der Nebenbedingung  $e + f = k + 1$

$$6k \geq 6f + r + 4 + 6e - 2e_2 = 6(e + f) + r + 4 - 2e_2 = 6(k + 1) + r + 4 - 2e_2, \text{ also}$$

$$e_2 \geq \frac{1}{2}r + 5 \geq 5.$$

Damit gibt es in dem von der Zerlegung erzeugten Graphen mindestens 5 Knoten, die Ausgangspunkt von genau zwei Kanten sind. Davon ist mindestens einer keine Ecke des Quadrates. Falls dieser Knoten auf dem Rand des Quadrates liegt, hat das zugehörige Sechseck an dieser Ecke einen Innenwinkel von  $180^\circ$ , falls dieser Knoten im Innern des Quadrates liegt, ist er Ecke (mindestens) eines Sechsecks mit einem Innenwinkel von mindestens  $180^\circ$ . Beides steht im Widerspruch zur Annahme.

**2. Beweis** (durch Widerspruch mit Betrachtung der Innenwinkelsummen): Wir nehmen an, es existiere eine solche Zerlegung. Die Anzahl der verwendeten Sechsecke sei mit  $f$  bezeichnet, die Anzahl der Eckpunkte, die auf dem Rande des Quadrates liegen und keine Eckpunkte des Quadrates sind, mit  $r$ , die Anzahl der Ecken, die im Innern des Quadrates und im Innern einer Seite eines anderen Sechsecks liegen (wie Ecke U in der Figur), mit  $m$  und schließlich die restlichen Eckpunkte im Innern des Quadrates mit  $i$ .

Die Summe aller Innenwinkel in den  $f$  Sechsecken beträgt bekanntlich  $f(6 - 2) \cdot 180^\circ = f \cdot 4 \cdot 180^\circ$ . Andererseits erhalten wir diese Summe auch, wenn wir an jeder Ecke die anliegenden Innenwinkel zusammenzählen: Die Eckpunkte des Quadrates sind sicher Eckpunkte von Zerlegungssechsecken, an ihnen liegen jeweils Innenwinkel von insgesamt  $90^\circ$  an. An den  $r$  Eckpunkten auf den Quadratseiten liegen ebenso wie an den  $m$  Punkten, die auf Sechseckseiten liegen, jeweils Innenwinkel von zusammen  $180^\circ$  an und an den restlichen  $i$  Punkten liegen jeweils Innenwinkel von zusammen  $360^\circ$  an. So erhalten wir



$$f \cdot 4 \cdot 180^\circ = 4 \cdot 90^\circ + r \cdot 180^\circ + m \cdot 180^\circ + i \cdot 360^\circ \text{ und hieraus } 4f = 2 + r + m + 2i \text{ oder}$$

$$6f = 3 + 1,5r + 1,5m + 3i \quad (*).$$

Nun zählen wir über alle der  $f$  Sechsecke die Kanten, wobei wir "Kante" im graphentheoretischen Sinne definieren, d.h. wenn eine Seite eines Sechsecks eine Ecke eines anderen Sechsecks enthält, so hat das Sechseck für jede solche Ecke eine zusätzliche Kante. Dabei wird jede Kante doppelt gezählt, wenn sie im Innern des Quadrates liegt und einfach, wenn sie auf dem Rand des Quadrates liegt. So erhalten wir

$$2k = 6f + m + r + 4.$$

Andererseits erhalten wir die doppelte Kantenzahl auch durch Addition der Anzahl aller von den einzelnen Ecken ausgehenden Kanten; dies können wir abschätzen: Von den 4 Ecken des Quadrates gehen mindestens 2 Kanten ab, von allen anderen Ecken mindestens 3. Somit gilt

$$2k \geq 8 + 3r + 3m + 3i, \text{ dies setzen wir zusammen zu}$$

$$6f + m + r + 4 \geq 8 + 3r + 3m + 3i \text{ oder}$$

$$6f \geq 4 + 2r + 2m + 3i,$$

was im Widerspruch zu (\*) steht.

**3. Beweis** (durch Widerspruch mit Betrachtung des arithmetischen Mittels aus allen Innenwinkeln): Wir nehmen an, es existiere eine Zerlegung mit solchen Sechsecken, d.h. in jedem Sechseck gebe es nur Winkel kleiner als  $180^\circ$ . Das arithmetische Mittel aus allen Innenwinkel aller Zerlegungssechsecke beträgt  $(6 - 2) \cdot 180^\circ : 6 = 120^\circ$ .

Zur weiteren Untersuchung der Innenwinkel unterscheiden wir nach Lage der zugehörigen Eckpunkte: Die Eckpunkte des Quadrates sind sicher auch Eckpunkte von Zerlegungssechsecken, damit gibt es in jeder Zerlegung mindestens vier Innenwinkel, von denen keiner größer als  $90^\circ$  ist; insbesondere ist ihr arithmetische Mittel nicht größer als  $90^\circ$ . Falls ein Eckpunkt im Innern einer Seite des Quadrates oder eines anderen Zerlegungssechsecks liegt, liegen an dieser Ecke mindestens zwei Innenwinkel an (andernfalls gäbe es einen Innenwinkel von  $180^\circ$ ) und das arithmetische Mittel aus diesen ist ebenfalls nicht größer als  $180^\circ : 2 = 90^\circ$ . In allen anderen Fällen liegen an der Ecke mindestens 3 Winkel an (andernfalls gäbe es einen Innenwinkel von mindestens  $180^\circ$ ), das arithmetische Mittel aus den anliegenden Innenwinkeln ist also höchstens  $360^\circ : 3 = 120^\circ$ .

Das arithmetische Mittel aus allen Innenwinkeln ergibt sich also als arithmetisches Mittel aus mindestens vier Zahlen, deren Mittel höchstens  $90^\circ$  ist und einigen weiteren Zahlen, deren Mittel höchstens  $120^\circ$  beträgt. Es ist also sicher kleiner als  $120^\circ$  im Widerspruch zur Feststellung im ersten Abschnitt.

**Bemerkung:** Verallgemeinerung dieses Beweises ergibt, dass ein  $n$ -Eck nur für  $n > 6$  in mehrere Sechsecke mit lauter Winkeln kleiner als  $180^\circ$  zerlegt werden kann.



**Aufgabe 2:** Beweise: Sind für eine positive ganze Zahl  $n$  sowohl  $3n + 1$  als auch  $10n + 1$  Quadratzahlen, dann ist  $29n + 11$  keine Primzahl.

**1. Beweis:** Wir definieren  $a$ ,  $b$  und  $c$  als diejenigen positiven Zahlen, für die  $a^2 = 3n + 1$ ,  $b^2 = 10n + 1$  und  $c = 29n + 11$ . Es genügt,  $c$  als Produkt zweier ganzzahliger Faktoren zu schreiben, deren Beträge beide größer als 1 sind. Hierzu suchen wir drei positive ganzen Zahlen  $x$ ,  $y$  und  $z$  mit der Eigenschaft, dass  $x^2 a^2 - y^2 b^2 = zc$  oder äquivalent  $c = \frac{(xa - yb)(xa + yb)}{z}$ . Da links eine ganze Zahl steht, kann der Bruch rechts gekürzt werden; da sicher  $0 < (xa - yb) < (xa + yb)$ , genügt dafür der Nachweis, dass der erste Faktor nicht zu 1 gekürzt wird, hierfür genügt wiederum der Nachweis, dass  $(xa - yb) > z$ .

Tatsächlich gestaltet sich diese Suche recht einfach: Die Gleichung  $x^2 a^2 - y^2 b^2 = zc$  ist genau dann erfüllt, wenn  $3x^2 - 10y^2 = 29z$  und  $x^2 - y^2 = 11z$ ; dies führt uns zum linearen Gleichungssystem mit den Variablen  $\frac{x^2}{z}$  und  $\frac{y^2}{z}$  (die Lösungen mit  $z = 0$  sind uninteressant)

$$3 \frac{x^2}{z} - 10 \frac{y^2}{z} = 29 \quad \text{und} \quad \frac{x^2}{z} - \frac{y^2}{z} = 11.$$

Über die Determinanten  $D = -3 + 10 = 7$ ,  $D_1 = -29 + 110 = 81$ ,  $D_2 = -33 + 29 = 4$  erhalten wir schnell die Lösungen  $\frac{x^2}{z} = \frac{81}{7}$  und  $\frac{y^2}{z} = \frac{4}{7}$  und hieraus z.B.  $x = 9$ ,  $y = 2$  und  $z = 7$ .

(Alternativ: Die zweite Gleichung liefert die notwendige Bedingung  $(x + y)(x - y) = 11z$ ; was den Ansatz  $(x + y) = 11$  nahelegt. Kurzes Probieren liefert die positiven ganzen Zahlen  $x = 9$ ,  $y = 2$  und  $z = 7$ .)

Also ist  $9^2 \cdot (3n + 1) - 2^2 \cdot (10n + 1) = 243n + 81 - 40n - 4 = 203n + 77 = 7(29n + 11)$ , und somit

$$29n + 11 = \frac{(xa - yb)(xa + yb)}{z} = \frac{(9a - 2b)(9a + 2b)}{7}.$$

Der erste Faktor im Zähler lässt sich abschätzen:

$$\begin{aligned} 9a - 2b &= 9\sqrt{3n+1} - 2\sqrt{10n+1} > 9\sqrt{3n} - 2\sqrt{11n} = 9\sqrt{3n} - 2\sqrt{11n} = \sqrt{243n} - \sqrt{44n} \\ &> (15 - 7)\sqrt{n} \geq 8 > z. \end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt.

**Bemerkung:** Dieser Beweis benützt nicht die Tatsache, dass die Zahl 7 eine Primzahl ist.

**2. Beweis:** Wir definieren  $a$  und  $b$  als diejenigen positiven ganzen Zahlen, für die  $a^2 = 3n + 1$  und  $b^2 = 10n + 1$ . Nun beobachten wir, dass  $a^2 b^2 = (3n + 1)(10n + 1) = 30n^2 + 13n + 1 = 29n^2 + 11n + (n + 1)^2$  und folgern hieraus

$$a^2 b^2 - (n + 1)^2 = (ab - (n + 1))(ab + (n + 1)) = n(29n + 11).$$

Wäre nun die Zahl  $29n + 11$  eine Primzahl, so wäre sie Teiler von mindestens einem der beiden Faktoren in der Mitte der Gleichung; insbesondere wäre  $29n + 11 \leq (ab + (n + 1))$ . Hieraus folgt aber  $ab \geq 28n + 10$  und hieraus der Widerspruch  $30n^2 + 13n + 1 = a^2 b^2 \geq (28n + 10)^2 = 784n^2 + 560n + 100$ . ( $n$  ist positiv!)

**Bemerkung:** Probieren mit Derive ergibt, dass 8, 96, 3960, 46376, 1908816, 22353240 und 920045456 die sieben kleinsten Werte von  $n$  sind, für die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind.

Weiter liefert die Rekursion  $a_{n+1} = 22a_n - a_{n-1}$ ,  $b_{n+1} = 22b_n - b_{n-1}$  mit den Startwerten  $a_0 = 5$ ,  $a_1 = 109$ ,  $b_0 = 9$  und  $b_1 = 199$  lauter Werte  $a$  und  $b$ , für es ein  $n$  gibt, sodass gleichzeitig  $a^2 = 3n + 1$  und  $b^2 = 10n + 1$ . Die Startwerte  $a_0 = 17$ ,  $a_1 = 373$ ,  $b_0 = 9$  und  $b_1 = 199$  liefern weitere Werte. Der Nachweis hierfür sei dem geeigneten Leser als Übungsaufgabe überlassen.



**Aufgabe 3:** Bei einer Wettbewerbsvorbereitung mit mehr als zwei teilnehmenden Mannschaften spielen je zwei von ihnen höchstens einmal gegeneinander. Bei Betrachtung des Spielplans stellt sich heraus:

- (1) Wenn zwei Mannschaften gegeneinander spielen, dann gibt es keine weitere Mannschaft, die gegen sie beide spielt.
- (2) Wenn zwei Mannschaften nicht gegeneinander spielen, dann gibt es stets genau zwei andere Mannschaften, die gegen sie beide spielen.

Beweise, dass alle Mannschaften die gleiche Anzahl von Spielen bestreiten.

**Bezeichnungen:** Die Anzahl der teilnehmenden Mannschaften sei  $n$ , sie seien mit  $m_i$  bezeichnet ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), die Menge der Mannschaften, die gegen  $m_i$  spielen, sei mit  $G_i$  bezeichnet.

**1. Beweis:** Aus (1) und (2) folgt, dass es mindestens ein Spiel gibt. O.B.d.A. sei  $m_1$  eine Mannschaft, für die die Anzahl der Gegner maximal ist, d.h. es ist  $|G_1| \geq 1$  und  $|G_1| \geq |G_i|$  für alle  $i = 1, 2, \dots, n$ . Wir stellen fest, dass keine zwei Mannschaften von  $G_1$  gegeneinander spielen, weil diese zwei Mannschaften sonst beide gegen  $m_1$  spielen würden, was im Widerspruch zu (1) steht.

Nun betrachten wir eine beliebige andere Mannschaft  $m_j$  ( $j \neq 1$ ) und unterscheiden folgende beide Fälle:

Fall 1:  $m_1$  spielt gegen  $m_j$ , d.h.  $m_j \in G_1$ : Wir benennen die Mannschaften, gegen die  $m_1$  spielt (also die Mannschaften aus  $G_1$ ) mit  $m_j := g_1, g_2, \dots, g_r$ ; dabei bezeichnet  $r$  die Anzahl der Spiele, die  $m_1$  bestreitet. Weil  $g_1$  gegen keine der Mannschaften  $g_2, \dots, g_r$  spielt, gibt es nach (2) zu jeder Mannschaft  $g_j \in G_1$  ( $j = 2, 3, \dots, r$ ) zwei Mannschaften, die gegen  $g_1$  und  $g_j$  spielen. Eine Mannschaft davon ist  $m_1$ , die zweite nennen wir  $c_j$ . Da  $g_j$  gegen  $m_1$  spielt und auch gegen  $c_j$  spielen wegen (1)  $c_j$  und  $m_1$  nicht gegeneinander.

Wäre nun  $c_i = c_j$  für irgend ein Paar  $(i, j)$  mit  $i \neq j$ , so hätten  $c_i$  und  $m_1$  drei verschiedene gemeinsame Gegner, nämlich  $g_1, g_i$  und  $g_j$ . Dies steht aber – weil  $c_i$  nicht gegen  $m_1$  spielt – im Widerspruch zu (2). Damit spielt  $m_j = g_1$  gegen  $m_1$  und gegen die Mannschaften  $c_2, c_3, \dots, c_r$ , hat also mindestens  $r$  Spiele; und da  $r$  maximal gewählt war, genau  $r$  Spiele, also gleich viele wie  $m_1$ .

Fall 2: Nicht Fall 1, also  $m_1$  spielt nicht gegen  $m_j$ , d.h.  $m_j \notin G_1$ : Nach (2) gibt es eine Mannschaft  $d$ , die sowohl gegen  $m_1$  als auch gegen  $m_j$  spielt. Dann hat nach den Überlegungen im Fall 1 die Mannschaft  $m_1$  die gleiche Anzahl von Spielen wie  $d$ , und  $d$  hat die gleiche Anzahl von Spielen wie  $m_j$ .

Damit ist alles gezeigt.

**2. Beweis:** Wir wählen eine beliebige Mannschaft  $m$  aus; die Menge der Mannschaften, gegen die  $m$  spielt sei mit  $G$  bezeichnet und es sei  $|G| = r$ ; die Menge der Mannschaften, gegen die  $m$  nicht spielt, sei mit  $S$  bezeichnet und es sei  $|S| = s$ . Damit ist  $n = 1 + r + s$ .

Aus (1) folgt, dass beliebige zwei Mannschaften aus  $G$  nicht gegeneinander spielen. Also gibt es zu jedem Paar von Mannschaften aus  $G$  – es gibt genau  $\frac{r(r-1)}{2}$  solche Paare – genau zwei Mannschaften, gegen die beide spielen. Eine davon ist  $m$ , die andere muss in  $S$  sein. Auf diese Weise erhalten wir eine Abbildung von der Menge der Paare in  $G$  in die Menge  $S$ .

Umgekehrt spielt keine Mannschaft von  $S$  gegen  $m$ . Also spielt nach (2) jede Mannschaft von  $S$  gegen genau zwei Mannschaften, die gegen  $m$  spielen. Diese müssen in  $G$  sein, bilden dort also ein Paar. Auf diese Weise ist eindeutig die Umkehrabbildung der oben beschriebenen Abbildung beschrieben (für Formalisten: weil "spielt gegen" eine symmetrische Relation ist!). Diese Zuordnung zwischen Mannschaften aus  $S$  und Paaren aus  $G$  ist also bijektiv, also ist die Anzahl der Paare in  $G$  und die Anzahl der Elemente in  $S$  gleich. Damit folgt  $s = \frac{r(r-1)}{2}$  und  $n = 1 + r + \frac{r(r-1)}{2} = 1 + \frac{r(r+1)}{2}$ , was

sich auflösen lässt zu  $r = \frac{-1 \pm \sqrt{8n-7}}{2}$ . Da  $r$  nicht negativ sein kann, ist  $r$  nach Vorgabe von  $n$  eindeutig bestimmt; und da  $m$  beliebig gewählt war, ist  $r$ , also die Anzahl der Gegner einer Mannschaft, für alle Mannschaften gleich.



**Bemerkung:** Die Aufgabenstellung stellt natürlich die Einkleidung einer graphentheoretischen Aufgabe dar: Die Mannschaften werden durch Knoten dargestellt, die genau dann durch eine Kante verbunden sind, wenn sie gegeneinander spielen. Der beschriebene Graph stellt dann einen Spezialfall eines "streng regulären Graphen" dar. Deren Eigenschaften und Theorie findet man im Internet z.B. unter <http://mathworld.wolfram.com/StronglyRegularGraph.html>. Dort werden auch außer dem einfachen Beispiel für vier Knoten (alle vier Knoten sind paarweise verbunden außer  $m_1$  mit  $m_2$  und  $m_3$  mit  $m_4$ ) noch weitere Beispiele angegeben, z.B. für 16 Knoten ("Clebsch-Graph") und 56 Knoten ("Gerwitz-Graph").



**Aufgabe 4:** In einem Tetraeder ABCD, das nicht entartet und nicht notwendig regulär ist, haben die Seiten AD und BC die gleiche Länge  $a$ , die Seiten BD und AC die gleiche Länge  $b$ , die Seite AB die Länge  $c_1$  und die Seite CD die Länge  $c_2$ . Es gibt einen Punkt P, für den die Summe der Abstände zu den Eckpunkten des Tetraeders minimal ist.

Bestimme diese Summe in Abhängigkeit von den Größen  $a$ ,  $b$ ,  $c_1$  und  $c_2$ .

**Anmerkung:** Die Richtigkeit des Resultates ist zu beweisen.

**Antwort:** Die minimale Summe der Entfernungen beträgt  $\sqrt{2(a^2 + b^2 + c_1 c_2)}$ .

### Bezeichnungen:

Mit  $M_{XY}$  sei der Mittelpunkt der Strecke XY bezeichnet.

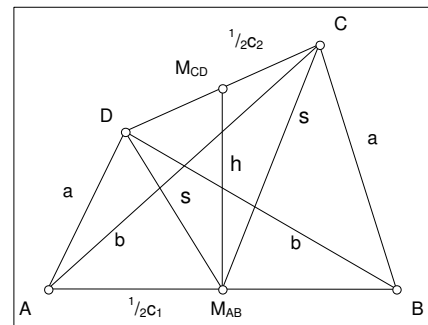
Mit  $S_P(A, B, C, \dots)$  sei die Summe der Entfernungen von P zu den Punkten A, B, C, ... bezeichnet.

### 1. Beweis (elementargeometrisch):

Wir leiten zunächst einige Hilfssätze her:

**HS 1:** Wenn in einem Tetraeder ABCD die Seiten AD und BC die gleiche Länge haben und ebenso die Seiten BD und AC, dann steht die Gerade  $M_{AB}M_{CD}$  senkrecht auf AB und senkrecht auf CD.

Beweis (vgl. Figur, räumliche Skizze!): Nach Voraussetzung sind die Dreiecke ABD und BCA kongruent nach  $sss$ , insbesondere haben auch die Seitenhalbierenden  $M_{AB}D$  und  $M_{AB}C$  gleiche Länge. Also ist das Dreieck  $DM_{AB}C$  gleichschenkelig und dessen Seitenhalbierende  $M_{AB}M_{CD}$  ist gleichzeitig Höhe. Entsprechendes gilt im Dreieck  $AM_{CD}B$ .



**HS 2:** Die Strecke  $M_{AB}M_{CD}$  hat die Länge  $h := \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - (c_1^2 + c_2^2)}$

Beweis:  $CM_{AB}$  und  $DM_{AB}$  sind Seitenhalbierende in den kongruenten Dreiecken ABD und ABC, also gleichlang, ihre Länge sei mit  $s$  bezeichnet. Damit ist das Dreieck  $CM_{AB}D$  gleichschenkelig, die Länge seiner Höhe  $M_{AB}M_{CD}$  kann also mit Pythagoras berechnet werden:

$$h^2 = s^2 - \left(\frac{c_2}{2}\right)^2.$$

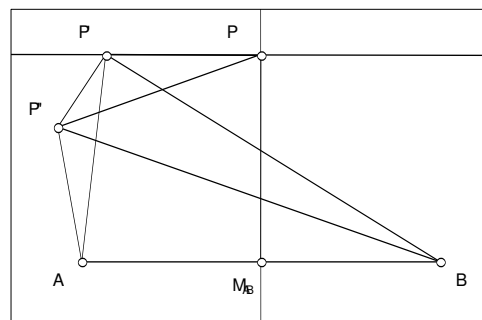
Im Dreieck  $ADM_{AB}$  gilt nach cos-Satz  $a^2 = s^2 + (1/2c_1)^2 - 2 \cdot 1/2sc_1 \cos(\angle DM_{AB}A)$ , im Dreieck  $DM_{AB}B$  gilt  $b^2 = s^2 + (1/2c_1)^2 - 2 \cdot 1/2sc_1 \cos(180^\circ - \angle DM_{AB}A)$ . Addition beider Gleichungen ergibt  $a^2 + b^2 = 2s^2 + 1/2c_1^2$

und somit  $s^2 = \frac{1}{2}$

$$\left(a^2 + b^2 - \frac{c_1^2}{2}\right);$$

Einsetzen liefert sofort  $h^2 = \frac{1}{4}$

$$\left(a^2 + b^2 - \frac{c_1^2}{2}\right) - \left(\frac{c_2}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} (2(a^2 + b^2) - (c_1^2 + c_2^2)).$$



**HS 3:** Wenn in einem Tetraeder die Gerade  $M_{AB}M_{CD}$  senkrecht auf AB und senkrecht auf CD steht und der Punkt P so gewählt wurde, dass  $S_P(A, B, C, D)$  minimal ist, dann liegt P auf  $M_{AB}M_{CD}$ .

Beweis (vgl. Figur, räumliche Skizze!): Wir betrachten einen beliebigen Punkt P", der nicht auf  $M_{AB}M_{CD}$  liegt und den Fußpunkt P des Lotes von P" auf die Gerade  $M_{AB}M_{CD}$ . Wir werden zeigen, dass sowohl

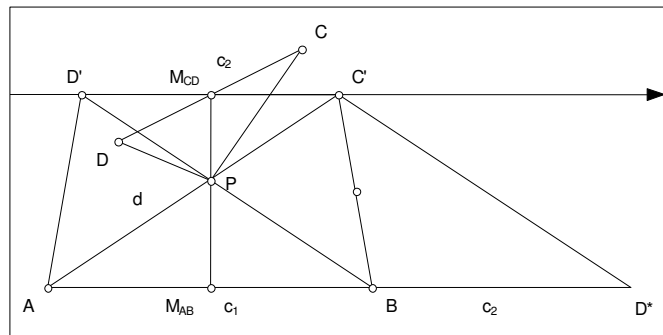


$S_P(A,B) \leq S_{P''}(A,B)$  als auch  $S_P(C,D) \leq S_{P''}(C,D)$ , wobei höchstens einmal Gleichheit vorliegt; hieraus folgt dann  $S_P(A,B,C,D) < S_{P''}(A,B,C,D)$  und somit die Behauptung.

Dazu benützen wir einen weiteren Hilfspunkt  $P'$ , der der Fußpunkt des Lotes von  $P''$  auf die von  $AB$  und der Geraden  $M_{AB}M_{CD}$  bestimmten Ebene ist. Es sind dann – wenn  $P''$  nicht schon in der betr. Ebene liegt –  $P''A$  und  $P''B$  Hypotenusen in den bei  $P'$  rechtwinkligen Dreiecken  $P''P'A$  bzw.  $P''P'B$  und damit länger als die Katheten  $P'A$  bzw.  $P'B$ . Nach Konstruktion liegt  $P'$  auf der Parallelen durch  $P$  zu  $M_{AB}M_{CD}$ , und – wie aus dem Schulunterricht bekannt – ist  $S_{P'}(A,B) \geq S_P(A,B)$  für alle von  $P$  verschiedenen Punkte  $P'$  auf dieser Parallelen (Beweis z.B. über Spiegeln von  $B$  an dieser Geraden). Somit haben wir  $S_P(A,B) \leq S_{P'}(A,B) \leq S_{P''}(A,B)$ . Gleichheit liegt hier nur vor, falls  $P''$  auf der Strecke  $AB$  liegt. Mit entsprechender Schlussweise erhalten wir auch  $S_P(C,D) \leq S_{P''}(C,D)$ ; da  $P''$  nicht auf beiden Strecken  $AB$  und  $CD$  liegen kann, kann auch nicht beides Mal Gleichheit vorliegen.

Variante: Die Menge aller Punkte  $P$ , für die  $S_P(A,B) = S_{P''}(A,B)$  ist, liegen auf einem Rotationsellipsoid mit Brennpunkten  $A$  und  $B$  durch  $P''$ . Aus Symmetriegründen schneidet dieses Rotationsellipsoid die Gerade  $M_{AB}M_{CD}$  in einem Punkt  $Q$  mit  $QM_{AB} > PM_{AB}$ . Also ist  $P$  innerer Punkt dieses Rotationsellipsoids und damit  $S_P(A,B) < S_{P''}(A,B)$ ; mit entsprechender Schlussweise erhalten wir  $S_P(C,D) < S_{P''}(C,D)$ .

Zur endgültigen Berechnung drehen wir nun das Dreieck  $CPD$  soweit um die Gerade  $M_{AB}M_{CD}$ , dass es in die von  $AB$  und der Geraden  $M_{AB}M_{CD}$  bestimmten Ebene zu liegen kommt. Es entsteht so ein achsensymmetrisches Trapez  $ABC'D'$  mit  $M_{AB}M_{CD}$  als Symmetrieachse; die Längen der beiden Diagonalen bezeichnen wir mit  $d$ . Da der Punkt  $P$  bei dieser Drehung fest bleibt, ist  $S_P(A,B,C,D) = S_P(A,B,C',D')$ . Der Punkt  $P$  fällt mit dem Schnittpunkt der Diagonalen zusammen, weil für jede andere Lage von  $P$  auf  $M_{AB}M_{CD}$  die Dreiecksungleichung sofort ein größeres  $S_P(A,B,C,D)$  liefert.

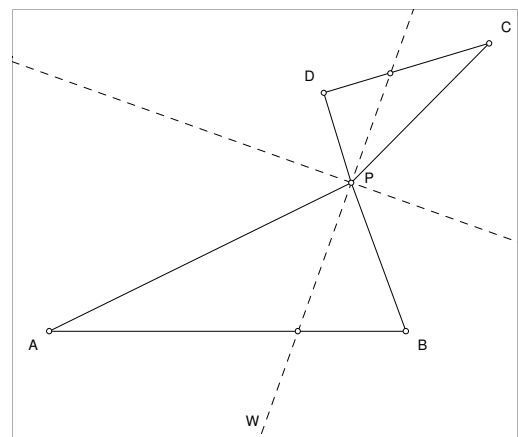


Eine Punktspiegelung der Figur an  $M_{BC'}$  liefert ein gleichschenkeliges Dreieck, dessen Basis die Länge  $c_2 + c_2$  und dessen Schenkel die Länge  $d$  hat; also ist

$$\begin{aligned} S_P(A,B,C,D) &= 2d = 2 \cdot \sqrt{h^2 + \left(\frac{c_1 + c_2}{2}\right)^2} = 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{4} \left(2(a^2 + b^2) - (c_1^2 + c_2^2)\right) + \left(\frac{c_1 + c_2}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{2(a^2 + b^2 + c_1 c_2)}. \end{aligned}$$

**2. Beweis:** Zuerst leiten wir einige Eigenschaften des Punktes  $P$  her, die für beliebige Tetraeder gelten. Bekanntlich ist die Menge aller Punkte  $Q$ , für die  $S_Q(A,B) = S_P(A,B)$  konstant ist, ein Rotationsellipsoid durch  $P$ , dessen Rotationsachse durch die Brennpunkte  $A$  und  $B$  geht, ein solcher Raumkörper sei mit  $REP_{AB;P}$  bezeichnet. Für alle Punkte  $Q$  innerhalb  $REP_{AB;P}$  ist  $S_Q(A,B) < S_P(A,B)$ , für alle Punkte  $Q$  außerhalb ist  $S_Q(A,B) > S_P(A,B)$ .

Sei nun  $P$  einer der Punkte, für die  $S_P(A,B,C,D)$  minimal ist. Dann liegt  $P$  auf dem  $REP_{AB;P}$  und auf dem  $REP_{CD;P}$ . Die beiden REPs berühren sich in  $P$ , weil sie andernfalls einen gemeinsamen inneren Punkt  $P^*$  mit kleinerem  $S_{P^*}(A,B,C,D) = S_{P^*}(A,B) + S_{P^*}(C,D)$  hätten, im Widerspruch zur Minimal-Eigenschaft von  $P$ . Also haben die beiden REPs eine gemeinsame Tangentialebene; die Normale auf diese Tangentialebene durch  $P$  nennen wir  $w$  (vgl. Figur, Schrägbild einer räumlichen Skizze!). Wir bemerken noch, dass von den beiden REPs höchstens einer zu einer Strecke entartet sein kann und dass auch in diesem Fall die getroffenen Aussagen mit leichter Abänderung der Argumentation sinngemäß gelten.





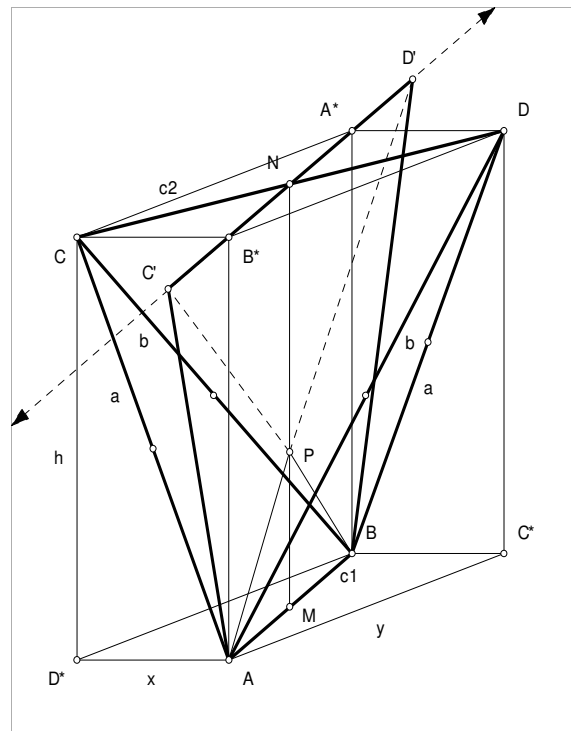
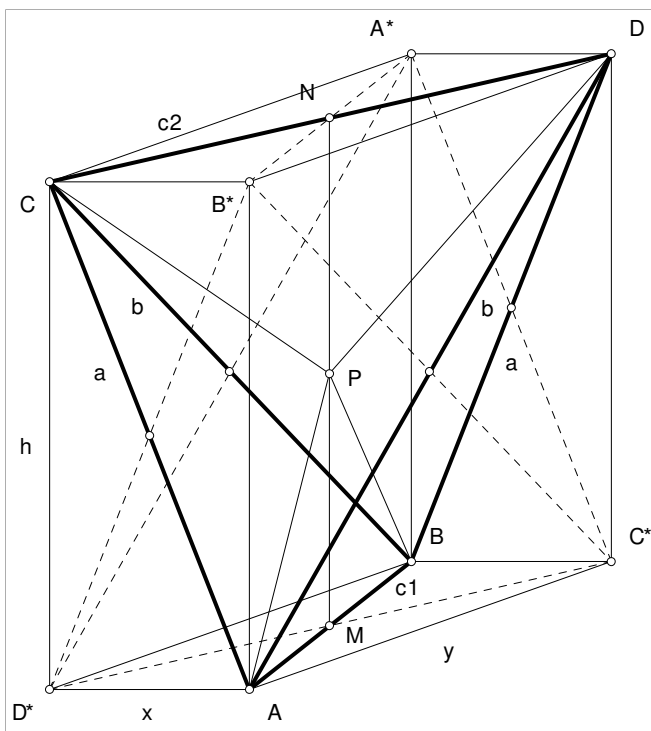


Aus Symmetriegründen geht  $w$  durch die Rotationsachse von  $REP_{AB,P}$ , also  $AB$ . Weiter schneidet die Ebene  $ABP$  aus dem  $REP_{AB,P}$  und der Tangentialebene eine Ellipse und eine Tangente an die Ellipse aus; nach bekannten Sätzen ist die Senkrechte auf diese Tangente, also  $w$ , die Winkelhalbierende im Dreieck  $ABP$  in der Ecke  $P$ . Gleiches gilt für das Dreieck  $CDP$ . Die Winkelhalbierenden in den Dreiecken  $ABP$  und  $CDP$  durch die Punkte  $P$  haben also die gleiche Trägergerade.

Weiter gilt  $\angle BPA = \angle DPC$ ; andernfalls könnten wir den Punkt  $P$  zu einem Punkt  $P^*$  auf  $w$  so verschieben, bis beide Winkel gleich wären. Dann wäre aber nach bekannten Sätzen  $S_{P^*}(A,D) < S_P(A,D)$  und auch  $S_{P^*}(B,C) < S_P(B,C)$ , also  $S_{P^*}(A,B,C,D) < S_P(A,B,C,D)$  im Widerspruch zur Minimal-Eigenschaft von  $P$ . Hieraus folgt, dass die Winkelhalbierende im Dreieck  $BPC$  durch  $P$  senkrecht auf  $w$  steht, analoges gilt für die anderen Dreiecke und Winkelhalbierenden von  $P$ . (Zum besseren Verständnis kann man das Dreieck  $CPD$  um  $w$  soweit drehen, dass es in die durch die von  $w$  und  $AB$  bestimmte Ebene kommt. Die Entfernungen von  $P$  zu  $A$ ,  $B$  und  $C$  bleiben dabei gleich.)

Zur weiteren Berechnung unterwerfen wir jede Kante des Tetraeders derjenigen Parallelverschiebung, die die Mitte der Kante auf die Mitte der gegenüberliegenden Kante abbildet. Da das Tetraeder nicht entartet ist, haben die Bilder der Kanten  $AB$ ,  $AC$  und  $AD$  genau einen Punkt gemeinsam. Diesen nennen wir  $D^*$ ; in analoger Weise seien  $A^*$ ,  $B^*$  und  $C^*$  definiert. Durch die Abbildung erhalten wir so 6 Parallelogramme in der Art, dass jede Kante des Tetraeders Diagonale eines dieser 6 Parallelogramme ist.

Ab hier verwenden wir die besonderen Eigenschaften des vorgegebenen Tetraeders: Da  $AB$  und  $CD$  gleich lang sind, hat das Parallelogramm  $AB^*CD^*$  gleichlange Diagonalen, ist also ein Rechteck. Analog schließen wir, dass auch  $A^*BC^*D$ ,  $AC^*DB^*$  und  $A^*CD^*B$  Rechtecke sind, während  $A^*CB^*D$  und  $AC^*BD^*$  Parallelogramme mit Diagonalen der Länge  $c_1$  und  $c_2$  sind. Damit ist  $AC^*BD^*B^*DA^*C$  ein senkrechtiges Prisma mit rechteckigen Seitenflächen und Parallelogrammen als Grund- und Deckfläche (= eine leicht zerdrückte Hülle einer Streichholzschachtel). Insbesondere steht die Verbindungslinie der Schnittpunkte der Diagonalen in Grund- und Deckfläche (wir nennen diese  $M$  und  $N$ ) senkrecht auf diesen Flächen und somit auch auf den Geraden  $CD$  und  $C^*D^*$ .



Aus dem 1. Beweis übernehmen wir die Begründung dafür, dass der Punkt  $P$  sich auf der Strecke  $MN$  befinden muss. Damit sind die Dreiecke  $APB$  und  $CPD$  gleichschenkelig, da zusätzlich  $\angle APB = \angle CPD$ , sind diese Dreiecke ähnlich. Weiter können wir das Dreieck  $CPD$  so um die Achse  $MN$  drehen, dass  $D$  und  $C$  in die Ebene  $APB$  kommen (Fig. 2), so erhalten wir das achsensymmetrische Trapez  $ABD'C^*$  mit den parallelen Seiten der Länge  $c_1$  und  $c_2$  und der Höhe  $h := \overline{MN}$  erhalten. Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke  $APB$  und  $CPD$  ist  $\angle APD' = 180^\circ$ , und wir erhalten eine Berechnungsgrundlage für den gesuchten Wert: Es ist  $S_P(A,B,C,D) = \overline{AD'} + \overline{BC'} = 2 \overline{AD'}$ .



Dieser Wert lässt sich nun leicht ausrechnen (die Kantenlängen  $AD^*$ ,  $AC^*$  und  $AB^*$  seien mit  $x$ ,  $y$  bzw.  $h$  bezeichnet):

Nach Parallelogramm-Satz gilt

$$c_1^2 + c_2^2 = 2(x^2 + y^2),$$

nach Pythagoras gilt

$$h^2 + x^2 = a^2 \text{ und } h^2 + y^2 = b^2,$$

dies setzen wir zusammen zu

$$2h^2 = (a^2 + b^2) - (x^2 + y^2) = (a^2 + b^2) - \frac{1}{2}(c_1^2 + c_2^2).$$

Eine Punktspiegelung des Trapezes  $ABD'C'$  am Mittelpunkt der Strecke  $BD'$  liefert ein gleichschenkliges Dreieck  $AD'C''$ , dessen Basis die Länge  $c_1 + c_2$  und dessen Schenkel die gesuchte Länge  $\overline{AD'}$  hat; also ist

$$\begin{aligned} S_P(A,B,C,D) &= 2 \overline{AD'} = 2 \cdot \sqrt{h^2 + \left(\frac{c_1 + c_2}{2}\right)^2} = 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c_1^2 + c_2^2}{4}\right) + \left(\frac{c_1 + c_2}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{2(a^2 + b^2 + c_1 c_2)}. \end{aligned}$$

**Bemerkungen:** Jeder Tetraeder kann also so in ein orthogonales Achsenkreuz gelegt werden, dass jede Achse ein Paar von gegenüberliegenden Kanten schneidet und jede Achse gleichzeitig Winkelhalbierende in den beiden Dreiecken ist, die vom Ursprung und den beiden von der Achse geschnittenen Kanten gebildet werden; der Ursprung ist dann der Punkt  $P$  mit minimalem  $S_P(A,B,C,D)$  ist.

Die Aufgabenstellung "Finde alle Punkte, von dem aus die Summe der Entfernungen zu  $n$  Punkten  $P_1, P_2, \dots, P_n$  minimal ist" ist für  $n = 2$  und  $n = 3$  einfach zu lösen: Für  $n = 2$  erhält man die Menge der Punkte auf der Strecke  $P_1 P_2$ , für spitzwinklige Dreiecke den sog. Fermatpunkt. Für  $n = 4$  ist es relativ einfach zu zeigen, dass es bei allgemeiner Lage der 4 Punkte exakt einen solchen Punkt gibt. Zu einer weiteren Charakterisierung des Punktes findet sich überraschenderweise kaum Literatur.