BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK
Bildung & Begabung

Aufgaben und Lösungen

1. Runde 2012

Über Kommentare und Ergänzungen zu diesen Lösungsbeispielen freuen wir uns!

» KORREKTURKOMMISSION | KARL FEGERT

» BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK

Kortrijker Straße 1, 53177 Bonn | Postfach 20 02 01, 53132 Bonn | Tel.: (02 28) 9 59 15-20, Fax: (02 28) 9 59 15-29
info@bundeswettbewerb-mathematik.de, www.bundeswettbewerb-mathematik.de

Stand: 15. Mai 2012

GEFÖRDERT VOM

Bundesministerium für Bildung und Forschung

Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft

Aufgabe 1: Alex schreibt die sechzehn Ziffern 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 9, in beliebiger Reihenfolge nebeneinander und setzt dann irgendwo zwischen zwei Ziffern einen Doppelpunkt, so dass eine Divisionsaufgabe entsteht.

Kann das Ergebnis dieser Rechnung 2 sein?

Anmerkung: Die Richtigkeit des Resultates ist zu beweisen.

Antwort: Nein, das kann man nicht erreichen.

Vorbemerkung: Gelegentlich benützen wir die Bezeichnung "Zahl ..." an Stellen, an denen wir korrekterweise von der "Dezimaldarstellung der Zahl ..." sprechen müssten. Da im Rahmen der Aufgabe nur das Dezimalsystem zur Darstellung einer Zahl benützt wird, sind keine Missverständnisse zu befürchten.

Gemeinsame Bezeichnungen: Durch das Nebeneinanderschreiben der 16 Ziffern entsteht eine Zahl, die wir G nennen, durch das Setzen des Doppelpunktes entstehen zwei weitere Zahlen, von denen wir die linke mit L, die rechte mit R bezeichnen.

1. Beweis (durch Widerspruch, über die Untersuchung der Teilbarkeit durch 3): Wir benützen den aus dem Schulunterricht bekannten Hilfssatz:

HS: Eine Zahl ist genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch drei teilbar ist.

Die Zahl G hat die Quersumme $2 + 2 + 3 + 3 + ... + 9 + 9 = 88$; und da 88 nicht durch 3 teilbar ist, ist G selbst ebenfalls nicht durch 3 teilbar. Teilt man nun G durch irgendeine Zahl, so kann das Ergebnis nicht eine durch 3 teilbare ganze Zahl sein.

Nehmen wir an, die Division $L : R$ ginge auf und das Ergebnis wäre 2. Dann geht auch die Division $G : R$ auf und das Ergebnis ist 200...01 (wobei die Zahl der Nullen in unserer Argumentation keine Rolle spielt). Dies wird beim Betrachten des Divisionsalgorithmus sofort klar: Nach "Abarbeiten" der Ziffern von L ist die Division aufgegangen und es folgt nur noch die Division von R durch R, die natürlich ebenfalls aufgeht. Man kann es aber auch formal beweisen: Für eine geeignete ganze Zahl n ist $G : R = (10^n \cdot L + R) : R = 10^n \cdot L : R + R : R = 2 \cdot 10^n + 1 = 200…01$.

Diese Zahl hat die Quersumme 3, ist also durch 3 teilbar. Dies stellt einen Widerspruch dar.

2. Beweis: (durch Widerspruch, über die Betrachtung der Reste nach Division durch 3): Die Quersumme einer Zahl Z bezeichnen wir mit $QS(Z)$, den Rest nach Division durch 3 mit $DR(Z)$. Weiter verwenden wir zwei aus dem Schulunterricht bekannte Hilfssätze (dabei ist der erste eine Verschärfung des Hilfssatzes aus dem 1. Beweis):

HS 1: Bei Division durch 3 lässt die Quersumme einer Zahl den gleichen Rest wie die Zahl selbst.

HS 2: Summe (bzw. Produkt) zweier Zahlen haben bei Division durch 3 den gleichen Rest wie die Summe (bzw. das Produkt) der zugehörigen Dreierreste; d.h. $DR(a + b) = DR(DR(a) + DR(b))$ und $DR(a \cdot b) = DR(DR(a) \cdot DR(b))$.

Wir nehmen nun an, man könnte den Doppelpunkt doch in der geforderten Art setzen. Dann hätten wir die Beziehung $L = 2R$, also auch $DR(L) = DR(DR(2) \cdot DR(R)) = DR(2DR(R))$; die Zuordnung zwischen diesen beiden Werten stellen wir in folgender Wertetabelle dar:

$DR(R)$	0	1	2
$DR(L) = DR(2 \cdot DR(R))$	0	2	1

Andererseits werden für die beiden Zahlen L und R genau die 16 Ziffern 2, 2, 3, 3, ..., 9, 9 verwendet. Also ist $QS(L) + QS(R) = 2 + 2 + 3 + 3 + ... + 9 + 9 = 88$. Nach HS 1 und HS 2 ist also $DR(DR(L) + DR(R)) = DR(88) = 1$. Das heißt, $D(R)$ kann nur einen solchen Wert annehmen, für den in obiger Tabelle die Summe zweier übereinander stehender Werte den Wert 1 oder 4 hat. Dies ist offensichtlich nie der Fall, was den gewünschten Widerspruch darstellt.

Variante (kürzer durch Verwendung der Restklassenschreibweise): Wir nehmen an, man könnte den Doppelpunkt so setzen, dass $L : R = 2$, also $L = 2R$. Dann ist $L + R = 2R + R = 3R \equiv 0 \bmod 3$, was aber im Widerspruch zu $L + R \equiv QS(L) + QS(R) \equiv 2 + 2 + 3 + 3 + ... + 9 + 9 \equiv 88 \equiv 1 \bmod 3$ steht.

Bemerkung: Der Beweis kann in analoger Weise mit Betrachtungen des Neunerrestes geführt werden.

3. Beweis (mit Widerspruch über die Betrachtung der in L und in R vorkommenden Ziffern): Die Voraussetzung $L : R = 2$ ist äquivalent zu $L = 2R$. Aus einfachen Beobachtungen des Multiplikationsalgorithmus leiten wir einige Bedingungen über das (Nicht–)Vorkommen der einzelnen Ziffern in L und R her und zeigen, dass nicht alle diese Bedingungen gleichzeitig erfüllt werden können.

Mit den Variablen r_i (i = 2, 3, ..., 9) sei die Häufigkeit der Ziffer i in der Dezimaldarstellung der Zahl R bezeichnet. Wir erhalten so – wie weiter unten begründet – folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lll} \text{(I)} & 4 = & r_2 + r_3 + r_6 \\ \text{(II)} & 4 = & r_2 + r_4 + r_7 \\ \text{(III)} & 4 = & r_4 + r_8 + 2r_9 \\ \text{(IV)} & 8 = & r_3 + r_6 + 2r_7 + r_8 + 2r_9\,. \end{array}$$

Nun führt I – II + III – IV (man entschuldige die unpräzise, aber gebräuchliche Formulierung) zu

$$-4 = -3r_7,$$

was im Widerspruch zu $r_7 \in \{0, 1, 2\}$ steht.

Zur Begründung für die einzelnen Gleichungen: Da jede Ziffer genau zweimal verwendet wird, kann jedes der r_i nur einen der Werte 0, 1 oder 2 annehmen, und in der Dezimaldarstellung von L kommt jede Ziffer i genau $2 - r_i$ Mal vor.

Die Zahl R kann keine Ziffer 5 enthalten, weil beim Verdoppeln von R die entsprechende Ziffer in L den Wert 0 oder 1 hätte, was aber nach Voraussetzung nicht vorkommen darf. Es ist also $r_5 = 0$.

Jede der Ziffern 3 oder 8 in R erzeugt in L an den entsprechenden Stellen eine der beiden Ziffern 6 oder 7. Umgekehrt können die Ziffern 6 und 7 in L auch nur von Ziffern 3 oder 8 in R erzeugt werden. Also sind die Anzahl der Ziffern 3 und 8 in R und die Anzahl der Ziffern 6 und 7 in L gleich, d.h. es gilt $r_3 + r_8 = (2 - r_6) + (2 - r_7)$ oder äquivalent $4 = r_3 + r_6 + r_7 + r_8$. Entsprechendes gilt für die Ziffernpaare (1|6) in R und (2|3) in L, ebenso für (2|7) in R und (4|5) in L und auch (4|9) in R und (8|9) in L. Aus diesen drei Ziffernpaaren leiten wir durch analoge Rechnung unter Berücksichtigung von $r_5 = 0$ und der Tatsache, dass die Ziffer 1 überhaupt nicht vorkommt, die Gleichungen (I), (II) und (III) her.

Gleichung (IV) erhalten wir durch folgende Überlegung: Eine ungerade Ziffer in L kann nur durch einen Übertrag entstehen, d.h. wenn in R an der vorhergehenden Stelle eine Ziffer steht, die größer oder gleich 5 ist. Damit sind die Anzahl der ungeraden Ziffern in L und die Anzahl der "großen" Ziffern (d.h. solcher, die größer oder gleich 5 sind) gleich. Hieraus erhalten wir die Gleichung $(2 - r_3) + (2 - r_5) + (2 - r_7) + (2 - r_9) = r_5 + r_6 + r_7 + r_8 + r_9$ oder äquivalent (IV).

Aufgabe 2: Gibt es positive ganze Zahlen a und b derart, dass sowohl $a^2 + 4b$ als auch $b^2 + 4a$ Quadratzahlen sind?

Anmerkung: Die Richtigkeit des Resultates ist zu beweisen.

Antwort: Nein, es gibt kein solches Zahlenpaar (a,b).

1. Beweis (durch Widerspruch). Wir nehmen an, es gäbe doch ein solches Zahlenpaar. Wegen der Symmetrie der Ausdrücke können wir o.B.d.A. annehmen, dass $b \le a$. Dann gilt die Ungleichung

$$a^2 < a^2 + 4b \le a^2 + 4a < (a + 2)^2.$$

Nach Annahme ist $a^2 + 4b$ eine Quadratzahl, nach Schlussfolgerung liegt sie zwischen a^2 und $(a + 2)^2$. Die einzige Möglichkeit ist also $a^2 + 4b = (a + 1)^2$, hieraus folgt sofort $4b = 2a + 1$, also die Gleichheit zweier Zahlen verschiedener Parität. Dies stellt den gewünschten Widerspruch dar.

Bemerkung: Die Bedingung "$b^2 + 4a$ ist Quadratzahl" wird nur scheinbar nicht verwendet. Sie ist versteckt in "Wegen der Symmetrie der Ausdrücke ..."!

2. Beweis (eigtl. nur Variante des 1. Beweises): Wir betrachten zunächst nur den Ausdruck $a^2 + 4b$ und untersuchen, was aus der Bedingung "$a^2 + 4b$ ist Quadratzahl" folgt. Dabei benützen wir zwei Eigenschaften von Quadratzahlen: Die Quadratfunktion ist streng monoton auf der Menge der natürlichen Zahlen, d.h. es gilt stets $q^2 > a^2 \Leftrightarrow q > a$; ferner sind eine Zahl und ihr Quadrat stets von gleicher Parität, d.h. es sind stets beide gerade oder beide ungerade.

Falls $a^2 + 4b$ eine Quadratzahl ist, gibt es eine positive ganze Zahl q, für die $a^2 + 4b = q^2$. Da die Zahl $4b$ stets positiv ist, ist $q^2 = a^2 + 4b > a^2$, also auch $q > a$. Da zusätzlich die Zahl $4b$ stets gerade ist, sind a^2 und $a^2 + 4b$ von gleicher Parität, und damit auch a und q. Aus beiden Eigenschaften folgt schärfer $q \ge a + 2$ und somit die Ungleichungskette

$$a^2 + 4b = q^2 \ge (a + 2)^2 = a^2 + 4a + 4 > a^2 + 4a, \text{ und hieraus } b > a.$$

Wäre nun $b^2 + 4a$ ebenfalls Quadratzahl, so folgt mit analogen Überlegungen (man ersetze überall a durch b und umgekehrt) die Ungleichung $a > b$. Diese beiden Bedingungen können aber nicht gleichzeitig erfüllt sein, also können auch nicht beide Ausdrücke gleichzeitig eine Quadratzahl sein.

3. Beweis (durch Widerspruch): Wir nehmen an, es gebe zwei solche Zahlen a und b. Dann gelten für zwei geeignete positive ganze Zahlen d und e die beiden Gleichungen $a^2 + 4b = (a + d)^2$ und $b^2 + 4a = (b + e)^2$ oder äquivalent

$$(*) \quad 4b = 2ad + d^2 \quad \text{und} \quad (**) \quad 4a = 2be + e^2.$$

In der Gleichung (*) muss d eine gerade Zahl sein, weil andernfalls die rechte Seite insgesamt ungerade wäre im Gegensatz zur sicher geradzahligen linken Seite. Entsprechendes gilt für die Gleichung (**). Damit sind $d' := {}^d/_2$ sowie $e' := {}^e/_2$ positiv ganzzahlig und wir können die Gleichungen (*) und (**) vereinfachen zu (*) $b = ad' + d'^2$ und (**) $a = be' + e'^2$.

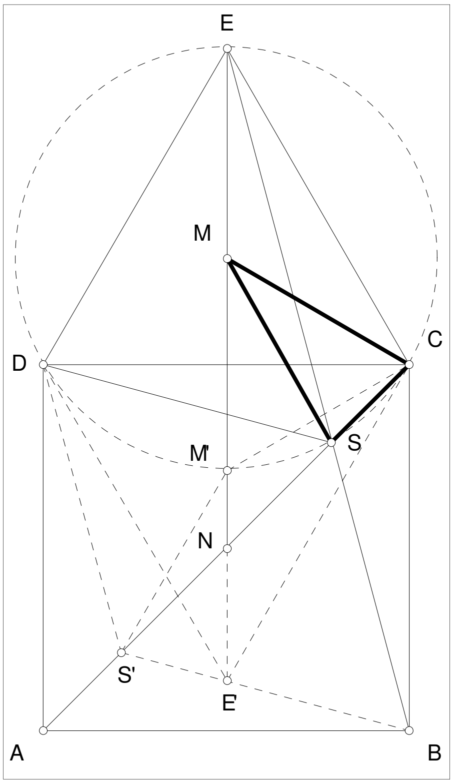
Nun setzen wir die erste Gleichung in die zweite ein und berücksichtigen, dass alle Variablen positiv ganzzahlig sind. Dies führt zu $a = ad'e' + d'^2e' + e'^2 > a$, also dem gewünschten Widerspruch.

Aufgabe 3: Einem Quadrat ABCD wird ein gleichseitiges Dreieck DCE aufgesetzt. Der Mittelpunkt dieses Dreiecks wird mit M bezeichnet und der Schnittpunkt der Geraden AC und BE mit S.

Beweise, dass das Dreieck CMS gleichschenklig ist.

Vorbemerkung: Die ursprüngliche Aufgabenstellung ging von 5 Punkten A, B, C, D und E in der Zeichenebene aus, von denen ABCD ein Quadrat bilden und CDE ein gleichseitiges Dreieck. Die Aussage des Satzes gilt für jede mögliche Lage. Durch die Formulierung "Das ... Dreieck wird ... aufgesetzt" wollten die Aufgabensteller die Lage "E im Innern des Quadrates" ausschließen und so eine Diskussion über Lagebeziehung vermeiden. Die vorgetragenen Beweise beziehen sich teilweise auf beide Lagen. Die angegebenen Beweise beschränken sich zunächst auf den Fall "E nicht im Innern des Quadrates" und geben als Anhang einen Kommentar, wie der Fall "E im Innern" zu behandeln ist.

1. Beweis (Nachweis, dass S und C auf dem gleichen Kreis um M liegen, Umfangswinkelsatz): Es ist



$\angle SDC = \angle CBS$ (Achsensymmetrie bez. AC)

$= \angle CBE$ (S liegt auf der Halbgeraden [BE)

$= \angle BEC$ (das Dreieck BCE ist gleichschenklig)

$= \angle SEC$ (S liegt auf der Halbgeraden [EB).

Hieraus folgt mit Umfangswinkelsatz, dass E und D auf dem gleichen Kreisbogen über der Sehne CS liegen. Insbesondere liegen die Eckpunkte des gleichseitigen Dreiecks EDC auf diesem Kreisbogen, er ist also Teil des Umkreises von Dreieck EDC, dieser hat M als Mittelpunkt. Hieraus folgt sofort $\overline{MS} = \overline{MC}$, was zu beweisen war.

Falls E im Innern des Quadrates liegt, liegt S ebenfalls auf der Halbgeraden [BE, aber so, dass E zwischen S und B liegt. Obige Überlegung kann somit bis zum letzten Gleichheitszeichen unverändert übernommen werden (wenn wir bei Winkelbezeichnungen den gegenläufigen Drehsinn akzeptieren), danach muss es heißen

$\angle S'DC = \ldots = 180° - \angle S'E'C$

(S' liegt auf E'B, E' zwischen S' und B).

Es ist also $\angle S'DC + \angle CE'S' = 180°$, somit ist das Viereck E'CDS' ein Sehnenviereck im Umkreis des Dreiecks CDE'. Hieraus folgt dann wie oben $\overline{M'S'} = \overline{M'C}$.

2. Beweis (ähnlich 1. Beweis, mit konkreter Winkelberechnung): Es ist $\angle DCB = 90°$ (Innenwinkel im Quadrat ABCD), er wird durch die Diagonale AC halbiert, also ist $\angle ACB = \angle BAS = 45°$. Weiter ist $\angle ECD = 60°$ (Innenwinkel im gleichseitigen Dreieck DCE).

Nach Konstruktion haben die Strecken BC und CE gleiche Länge, also ist das Dreieck BCE gleichschenklig mit Basis EB und Spitzenwinkel $\angle ECB = 90° + 60° = 150°$. Nach bekannter Formel haben die Basiswinkel die Weite $\angle CBE = \angle BEC = (180° - 150°) : 2 = 15°$.

Nun wenden wir den Außenwinkelsatz im Dreieck BSC an: Es ist

$$\angle CSE = \angle CBS + \angle SCB = \angle CBE + \angle SCB = 15° + 45° = 60° = \angle CDE;$$

d.h nach Umfangswinkelsatz liegen S und D auf dem gleichen Kreis über der Sehne CE, also dem Umkreis des Dreiecks DCE. Dieser hat M als Mittelpunkt, woraus sofort $\overline{MS} = \overline{MC}$ folgt. Dies war zu beweisen.

Falls E im Innern des Quadrates angenommen wird, können wir obige Argumentation übernehmen, wenn wir bei den Bezeichnungen der Winkel den gegenläufigen Drehsinn der Winkel akzeptieren und an geeigneten Stellen "+" durch "–" ersetzen: Es ist

$$\angle E'CB = \angle DCB - \angle DCE' = 90° - 60° = 30°,$$

nach bekannter Formel sind dann die Basiswinkel $\angle BE'C = \angle CBE' = (180° - 30°) : 2 = 75°$, also

$\angle S'BA = 90° - 75° = 15°$; und weiter mit der Innenwinkelsumme im Dreieck BS'C

$\angle CS'E' = 180° - 45° - 75° = 60° = \angle CDE'$;

damit liegt wieder S' auf dem Umkreis des Dreiecks DCE', woraus sofort die Behauptung folgt.

Bemerkung: Damit ist gezeigt, dass die Punkte E, C, S und D die Ecken 12, 4, 5 und 8 (bzw. 6, 7, 2 und 10) eines regelmäßigen 12–Ecks sind.

3. Beweis (konkrete Berechnung der Längen der Schenkel): Bei unserer Argumentation benützen wir noch den Mittelpunkt des Quadrates, den wir mit N bezeichnen. Aus Symmetriegründen liegt N auf den Geraden EM und AC, ferner ist EM || BC. Weiter wählen wir die Längeneinheit so, dass die Seiten des Quadrates und des gleichseitigen Dreiecks die Länge 1 haben. Bekanntlich hat die Höhe im gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge 1 die Länge $\frac{\sqrt{3}}{2}$, und der Schwerpunkt teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1. Damit wissen wir folgende Längen:

$$\overline{NE} = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \overline{ME} = \overline{MC} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3},\quad \overline{NM} = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3+\sqrt{3}}{6}.$$

Mit Strahlensatz (Zentrum S; NE || BC, S $\in$ AC, S $\in$ BE) folgt nun:

$$\frac{\overline{NS}}{\overline{CS}} = \frac{\overline{NE}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{NE}}{1} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\frac{\sqrt{3}}{6}}{\frac{\sqrt{3}}{6}} = \frac{\frac{3+\sqrt{3}}{6}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\overline{NM}}{\overline{EM}},$$

d.h. es ist MS || EC. Wieder mit Strahlensatz, dieses Mal mit Zentrum N, schließen wir auf das gewünschte Ergebnis:

$$\overline{MS} = \overline{EC}\cdot\frac{\overline{NM}}{\overline{NE}} = 1\cdot\frac{\frac{3+\sqrt{3}}{6}}{\frac{1+\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{(3+\sqrt{3})}{3}(1-\sqrt{3}))}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3-2\sqrt{3}-3}{-2} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \overline{MC}.$$

4. Beweis (über Nachweis von gleichen Basiswinkeln): Mit N sei der Mittelpunkt des Quadrates bezeichnet, o.B.d.A. habe die Seite des Quadrates sowie des gleichseitigen Dreiecks die Länge 1. Wir benützen die bekannten Symmetrieeigenschaften und Längenverhältnisse: N hat den Abstand 0,5 von der Quadratseite, M den Abstand $\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$ von der Dreieckseite und es ist $\overline{ME} = \overline{MC} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Es ist NE || BC und $\overline{BC} = \overline{CE}$, also gilt $\frac{\overline{NS}}{\overline{CS}} = \frac{\overline{NE}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{NE}}{\overline{CE}}$. S teilt also die Seite NC im Dreieck NEC im Verhältnis der anliegenden Seiten. Hieraus schließen wir, dass ES Winkelhalbierende im Dreieck NEC ist, also ist $\angle MES = \frac{1}{2}\angle MEC = \frac{1}{4}\angle DEC = 15°$. Weiter ist

$$\frac{\overline{NM}}{\overline{MC}} = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right):\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{3}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\right):1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right):1 = \frac{\overline{NE}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{NS}}{\overline{CS}},$$

hieraus schließen wir, dass MS Winkelhalbierende im Dreieck NMC ist, also $\angle NMS = \frac{1}{2}\angle NMC = 30°$ und weiter $\angle SME = 180° - 30° = 150°$.

Über die Innenwinkelsumme im Dreieck SME berechnen wir $\angle ESM = 180° - 150° - 15° = 15° = \angle MES$. Damit ist das Dreieck EMS gleichschenklig mit Basis ES und es ist $\overline{MS} = \overline{ME} = \overline{MC}$. Das war zu beweisen.

5. Beweis (mit kartesischer Koordinatenrechnung, ausschließlich Stoff Kl. 9: Beschreibung der Verbindungsgeraden vorgegebener Punkte im Koordinatensystem als Graph einer linearen Funktion, Bestimmung der Koordinaten von Schnittpunkten, Bestimmungen der Entfernung zweier Punkte mittels Satz von Pythagoras):

Aus dem Unterricht ist bekannt (bzw. mit Pythagoras und Satz vom Schwerpunkt im Dreieck schnell hergeleitet): Die Höhe im gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge a hat die Länge $a\frac{\sqrt{3}}{2}$, der Schwerpunkt hat den Abstand $a\frac{\sqrt{3}}{6}$ von der Grundseite.

Wir legen über die Figur ein rechtwinkliges Koordinatensystem so, dass der Ursprung auf A, die positive x–Achse auf der Halbgeraden [AB und die positive y–Achse auf der Halbgeraden [AD zu liegen kommt. Um Bruchzahlen zu vermeiden, wählen wir die Längeneinheiten so, dass die Quadratseiten die Länge 6 erhalten. Somit können wir die Lage der vorkommenden Punkte folgendermaßen mit Koordinaten beschreiben:

$$A(0 \mid 0),\ B(6 \mid 0),\ C(6 \mid 6),\ D(0 \mid 6),\ E(3 \mid 6 \pm 3\sqrt{3}),\ M(3 \mid 6 \pm \sqrt{3}).$$

dabei gilt immer das obere Rechenzeichen, wenn E außerhalb des Quadrates liegt, und das untere, wenn E im Innern des Quadrates liegt. Der Rest ist einfache Schulmathematik gepaart mit Beharrlichkeit:

Die Gerade AC ist die 1. Winkelhalbierende, sie kann also beschrieben werden als Graph der Funktion

$$g:\ y = x.$$

Die Gerade BE geht durch die Punkte $B(6 \mid 0)$ und $E(3 \mid 6 \pm 3\sqrt{3})$, hat also die Steigung $\Delta y : \Delta x = (0 - (6 \pm 3\sqrt{3})) : (6 - 3) = -(2 \pm \sqrt{3})$; ihren y – Achsenabschnitt erhält man durch die Verdoppelung der y–Koordinate von E; somit lässt sie sich beschreiben als Graph der Funktion

$$h:\ y = -(2 \pm \sqrt{3})x + (12 \pm 6\sqrt{3})$$

(Anstatt der Herleitung genügt auch der Nachweis der Richtigkeit durch Einsetzen von $x_B = 6$ und $x_E = 3$ in die Funktionsgleichung: einfaches Kopfrechnen ergibt die y–Koordinate von B bzw. E).

Die x–Koordinate des Schnittpunktes S erhalten wir als Lösung der Gleichung $g(x_s) = h(x_s)$:

$$x_S = -(2 \pm \sqrt{3})x_S + (12 \pm 6\sqrt{3}),\ \text{also}$$

$$x_S = \frac{12 \pm 6\sqrt{3}}{3 \pm \sqrt{3}} \cdot \frac{(3 \mp \sqrt{3})}{(3 \mp \sqrt{3})} = \frac{36 \mp 12\sqrt{3} \pm 18\sqrt{3} - 18}{9 - 3} = 3 \pm \sqrt{3};$$

und da S auf der ersten Winkelhalbierenden liegt, ist $y_s = x_s$.

Damit bleibt noch zu zeigen, dass die Strecken MS und MC mit $S(3 \pm \sqrt{3} \mid 3 \pm \sqrt{3})$ die gleiche Länge haben; es genügt bereits, die Gleichheit der Quadrate davon zu zeigen. Tatsächlich ist

$$\overline{MC}^2 = (6-3)^2 + (6 - (6 \pm \sqrt{3}))^2 = 3^2 + 3 = 12, \quad \text{ebenso wie}$$

$$\overline{MS}^2 = (3 \pm \sqrt{3} - 3)^2 + ((3 \pm \sqrt{3}) - (6 \pm \sqrt{3}))^2 = 3 + 3^2 = 12.$$

Aufgabe 4: Von den Eckpunkten eines regelmäßigen 27–Ecks werden sieben beliebig ausgewählt.

Beweise, dass es unter diesen sieben Punkten drei Punkte gibt, die ein gleichschenkliges Dreieck bilden, oder vier Punkte, die ein gleichschenkliges Trapez bilden.

Vorbemerkungen: Die Aussage des Satzes kann auf zwei Arten verschärft werden:

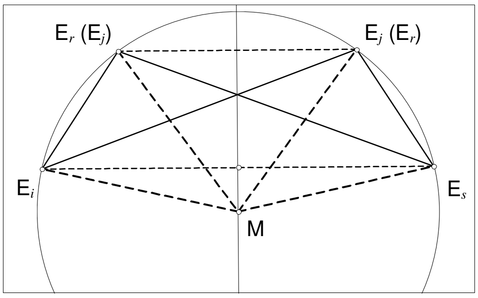
(1) Die Behauptung des Satzes ist bereits erfüllt, wenn nur sechs Eckpunkte ausgewählt wurden.
(2) Unter sieben ausgewählten Eckpunkten gibt es immer vier Eckpunkte, die ein gleichschenkliges Trapez bilden.

Da zwei Beweisvarianten nur die schwächere Behauptung liefern, wurde die Aufgabe in der schwächeren Formulierung beibehalten.

Um nachzuweisen, dass ein Viereck ein gleichschenkliges Trapez ist, wird üblicherweise folgende charakteristische Eigenschaft verwendet: (1) "*Ein Viereck ist genau dann ein gleichschenkliges Trapez, wenn es ein Paar gegenüberliegender Seiten hat, die parallel sind, und die beiden anderen Seiten gleich lang sind oder mit einer der parallelen Seiten den gleichen Innenwinkel einschließen.*"

Gegenstand der "Viereckslehre" in der Mittelstufe des Gymnasiums ist (bzw. war es früher), äquivalente charakteristische Eigenschaften zu finden und beim Nachweis der Äquivalenz mit den Schülern das Beweisen zu üben. Deswegen finden sich auch folgende charakteristische Eigenschaften in Lehrbüchern: (2) *"Ein Viereck ist genau dann ein gleichschenkliges Trapez, wenn es achsensymmetrisch bez. der Mittelsenkrechten einer Seite ist.*" Gelegentlich findet man auch die Charakterisierung (3) "*…, wenn es einen Umkreis besitzt und zwei gegenüberliegende Seiten oder die zwei Diagonalen gleiche Länge haben.*" Dass beim Vorliegen dieser Eigenschaft tatsächlich ein gleichschenkliges Trapez vorliegt, schließen wir aus folgendem Hilfssatz:

HS: Die Endpunkte zweier verschiedener gleichlanger Sehnen in einem Kreis bestimmen ein gleichschenkliges Dreieck oder ein gleichschenkliges Trapez.



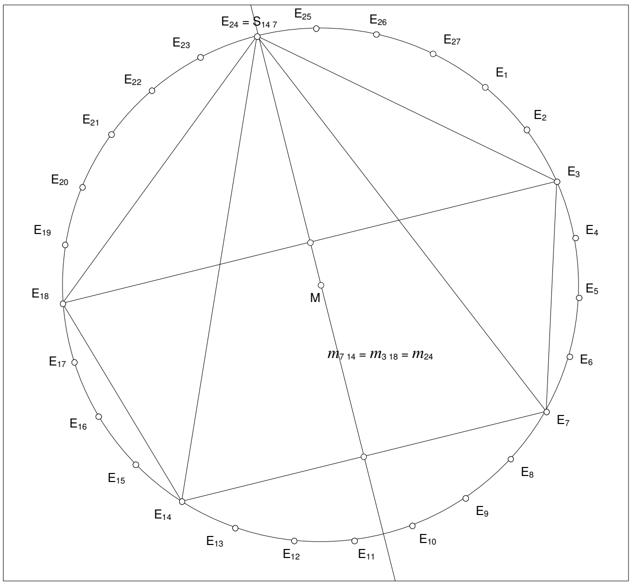
Beweis des HS: Seien E_iE_j und E_rE_s die beiden verschiedenen Sehnen gleicher Länge; dabei können die Bezeichnungen so gewählt werden, dass $E_i \neq E_s$ ist und dass die Punkte E_j und E_r auf dem gleichen Bogen von E_i nach E_s liegen (wobei die Reihenfolge unerheblich ist und evtl. $E_j \neq E_r$). Ab hier können wir verschieden argumentieren:

Variante 1 (über Symmetrie): Zu gleich langen Sehnen gehören gleich weite Mittelpunktswinkel, also ist $\angle E_iME_j = \angle E_rME_s$ bei gleichem Drehsinn. Damit bildet die Spiegelung an der Mittelsenkrechten der Strecke E_iE_s nicht nur E_i auf E_s ab, sondern auch $\angle E_iME_j$ auf $\angle E_sME_r$, insbesondere also auch E_j auf E_r. Damit ist die Figur mit den Eckpunkten E_i, E_r, E_j und E_s – unabhängig von der Reihenfolge der Punkte – achsensymmetrisch bez. der Mittelsenkrechten der Seite E_iE_s, d.h. im Fall $E_j = E_r$ liegt ein gleichschenkliges Dreieck vor, in allen anderen Fällen ein gleichschenkliges Trapez.

Variante 2 (über Parallelität und Winkel): Falls nun $E_j = E_r$, sind die Schenkel E_iE_j und $E_jE_s = E_rE_s$ im Dreieck $E_iE_jE_s$ gleich lang, es liegt also ein gleichschenkliges Dreieck vor. Falls $E_j \neq E_r$, bilden die vier Punkte ein Sehnenviereck, in dem nach Voraussetzung zwei gegenüberliegende Seiten gleich lang sind oder die beiden Diagonalen gleich lang sind. In beiden Fällen sind nach Umfangswinkelsatz die Winkel über der gemeinsamen Sehne E_jE_r bei E_i und bei E_s gleich, ebenso die beiden Winkel bei E_i und bei E_s über den gleichlangen Sehnen E_rE_s und E_iE_j. Zusätzlich sind die gleichlangen Sehnen entweder beide Seiten des Sehnenvierecks oder beide Diagonalen. Nach Kongruenzsatz *wsw* sind also die beiden "Basis"–Dreiecke über der Seite E_iE_s kongruent, insbesondere sind also die beiden Basisinnenwinkel des Sehnenvierecks bei E_i und E_s gleich und die beiden an diesen Ecken angrenzenden Seiten gleich lang. Da sich zudem die gegenüberliegenden Winkel zu 180° ergänzen, treten zwei Stufenwinkelpaare (F–Winkel) auf; die Seiten E_iE_s und E_jE_r sind also auch parallel; das war zu zeigen.

Für den eigentlichen Beweis der Behauptung bezeichnen die Ecken des 27–Ecks fortlaufend z.B. im UZS mit $E_1, E_2, ..., E_{27}$.

1. Beweis (über Symmetrieachsen): Jedes Paar (E_i,E_j) von Eckpunkten $(i \neq j)$ bestimmt im Umkreis des 27–Ecks eine Sehne, deren Mittelsenkrechte wir mit m_{ij} bezeichnen. Nach bekannten Sätzen geht diese Mittelsenkrechte durch den Mittelpunkt des Umkreises; ferner ist sie Achse einer Spiegelung, die die Strecke E_iE_j auf sich selbst abbildet. Zusätzlich bemerken wir, dass – da 27 ungerade und das 27–Eck regulär ist – auf jeder dieser Mittelsenkrechten m_{ij} stets genau ein Eckpunkt des 27–Ecks liegt; diesen nennen wir *Spitze von* E_i *und* E_j und bezeichnen ihn mit S_{ij}. Umkehrt geht durch jeden Eckpunkt genau eine solche Symmetrieachse, die dann allerdings Mittelsenkrechte zu genau 13 weiteren Sehnen bzw. Eckpunktepaaren ist (in der Figur ist nur eine weitere eingezeichnet). Offensichtlich ist m_{ij} Symmetrieachse des Dreiecks $E_iS_{ij}E_j$; und wenn ein m_{ij} Mittelsenkrechte zu zwei Punktepaaren ist, dann bilden diese beiden Punktepaare ein achsensymmetrisches, also gleichschenkliges Trapez.



Unter den ausgewählten 7 Eckpunkten gibt es $\binom{7}{2} = 21$ Paare, die 21 evtl. zusammenfallende Mittelsenkrechten m_{ij} und damit auch 21 evtl. zusammenfallende Spitzen S_{ij} bestimmen. Für die weitere Argumentation unterscheiden wir zwei Fälle:

Fall1: Von den 21 Spitzen fallen keine zwei aufeinander: Da $27 - 7 = 20 < 21$, ist mindestens eine dieser Spitzen S_{ij} ein ausgewählter Eckpunkt. Damit ist m_{ij} Symmetrieachse eines Dreiecks $E_iS_{ij}E_j$, das nur ausgewählte Punkte als Eckpunkten hat. Damit haben wir ein gleichschenkliges Dreieck nachgewiesen.

Fall 2: Es gibt zwei Spitzen $S_{ij} = S_{kl}$, die identisch sind: Dann sind auch die beiden dazugehörenden Symmetrieachsen m_{ij} und m_{kl} identisch. Dann sind die beiden Punktepaare (E_i,E_j) und (E_k,E_l) sogar disjunkt. Das Viereck mit den Eckpunkten E_i, E_j, E_k und E_l besitzt also eine Symmetrieachse, die zwei Seiten jeweils auf sich selbst abbildet, es ist mithin ein gleichschenkliges Trapez.

Bemerkung: Ein Dreieck ist gleichschenklig, wenn wenigstens eine der Mittelsenkrechten durch die gegenüberliegende Ecke geht. Im obigen Beweis wurde jeweils nur eine der drei Mittelsenkrechte auf diese Eigenschaft untersucht; man kann also vermuten, dass die Aussage verschärft werden kann.

Variante: Mit $A_1, A_2, \ldots, A_7$ seien die ausgewählten Ecken bezeichnet, mit m_k die Gerade E_kM, wobei M der Mittelpunkt des Umkreises des 27–Ecks ist. Jeder Ecke wird so eindeutig ein m_k zugeordnet, und – da 27 ungerade und das 27–Eck regulär ist – ist diese Zuordnung sogar eineindeutig, d.h zu verschiedenen E_k gehören auch verschieden m_k. Insbesondere ist m_k also Achse einer Spiegelung, die genau eine der 27 Ecken auf sich selbst abbildet; ferner ist sie auch Mittelsenkrechte von genau 13 der Verbindungsstrecken E_iE_j $(i \neq j)$ und damit ebenfalls Achse einer Spiegelung, die jede dieser Strecken jeweils auf sich selbst abbildet. Jeder Verbindungsstrecke wird so ebenfalls eindeutig eine der m_k zugeordnet, wobei diese Zuordnung anders als oben nicht eineindeutig ist. Es sei noch bemerkt, dass offensichtlich keine der Ecken E_i und E_j mit E_k zusammenfallen kann, entsprechen sind auch bei zwei verschiedenen Verbindungsstrecken E_iE_j mit gleichem zugeordneten m_k alle vier Ecken verschieden.

Nun betrachten wir $A := \{A_1, A_2, \ldots, A_7, A_1A_2, A_1A_2, \ldots, A_6A_7\}$, d.h. eine Menge, die zwei Typen von Elementen enthält: die ausgewählten Ecken und alle Verbindungsstrecken zwischen diesen Ecken. Diese Menge enthält $\binom{7}{1} + \binom{7}{2} = 28$ Elemente, denen mittels oben beschriebener Zuordnung jeweils eines von 27 Elementen zugeordnet wird. Nach Schubfachprinzip gibt also zwei Elemente aus A, denen das gleiche m_k zugeordnet wird. Dabei können nicht beide dieser Elemente eine Ecke sein, weil zu verschiedenen E_k auch verschieden m_k gehören.

Nun ist entweder eines dieser beiden Elemente eine Ecke A_k, das andere eine Verbindungsstrecke A_iA_j, oder beide Elemente sind Verbindungsstrecken. Im ersten Fall sind dabei nach obigen Ausführungen drei verschiedene Punkte beteiligt; diese bilden ein achsensymmetrisches, also gleichschenkliges Dreieck. Im zweiten Fall sind nach obigen Ausführungen vier verschiedene Punkte beteiligt; diese bilden ein achsensymmetrisches Viereck, bei denen die Symmetrieachse Mittelsenkrechte zweier Seiten ist, also ein gleichschenkliges Trapez.

2. Beweis (durch Widerspruch, über Längen von Seiten):

Nach unserem Hilfssatz genügt es, zwei gleich lange Sehnen zwischen den ausgewählten Eckpunkten nachzuweisen. Mit Elementarbogen bezeichnen wir den kürzeren Bogen auf dem Umkreis des regelmäßigen 27–Ecks zwischen zwei aufeinander folgenden Eckpunkten. Zwei durch Eckpunkte des 27–Ecks gegebene Sehnen haben genau dann gleiche Länge, wenn der kürzere Bogen des Umkreises zwischen den Endpunkten der Sehnen die gleiche Anzahl von Elementarbögen enthalten. Zusätzlich stellen wir fest, dass diese Zuordnung monoton ist; d.h. zu einer längeren Strecke gehört eine größere Anzahl von Elementarbögen und umgekehrt.

Wären nun unter den ausgewählten 7 Eckpunkten keine zwei Paare, deren Verbindungsstrecken gleiche Länge besitzen, dann wären auch unter den Verbindungsstrecken aufeinander folgender Eckpunkte keine zwei gleicher Länge, d.h. die ausgewählten Eckpunkte würden den Umkreis in 7 Teilbögen unterteilen, von denen keine zwei die gleiche Anzahl Elementarbögen enthielten. Die kleinste Gesamtzahl an Elementarbögen wäre somit $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$; dies führt aber zu einem Widerspruch, da es nur 27 Elementarbögen gibt.

Bemerkung: In diesem Beweis werden nur die Entfernungen zwischen aufeinanderfolgenden ausgewählten Eckpunkten betrachtet. Man darf daher vermuten, dass der Satz verschärft werden kann.

3. Beweis (mit zwei möglichen Verschärfungen der Aussage): Verbindet man eine beliebig ausgewählte Ecke des regelmäßigen 27–Ecks mit allen übrigen Ecken, so entstehen 26 Strecken, von denen jeweils zwei achsensymmetrisch bez. des Durchmessers des Umkreises durch die ausgezeichnete Ecke liegen, insbesondere also gleiche Länge haben. Wählt man eine andere Ecke für diese Überlegung aus, erhält man wegen der Rotationssymmetrie das gleiche Ergebnis mit den gleichen Längen. Es gibt also höchstens (tatsächlich sogar genau) 13 verschiedene Längen, die die Verbindungsstrecken von Ecken annehmen können. Von hier können wir verschieden argumentieren und dabei die Aussage verschärfen:

Variante 1: Wählt man nun k Eckpunkte aus, so gibt es nach Schubfachprinzip unter den $\binom{k}{2}$ möglichen Verbindungsstrecken sicher dann zwei von gleicher Länge, wenn $\binom{k}{2} > 13$. Wie man schnell nachrechnet, ist $\binom{6}{2} = 15 > 13$, d.h. die Bedingung ist bereits für $k \geq 6$ erfüllt. Falls die zu zwei der gleichlangen Strecken gehörenden Paare von Eckpunkten nicht disjunkt sind, also genau einen Eckpunkt gemeinsam haben, bestimmen sie ein Dreieck mit zwei gleich langen Seiten; falls sie disjunkt sind, bestimmen sie ein Kreisviereck mit gleichlangen Schenkeln oder gleichlangen Diagonalen, mithin ein gleichschenkliges Trapez. Dies war zu beweisen.

Variante 2: Wählt man nun 7 Eckpunkte aus, so gibt es $\binom{7}{2} = 21$ mögliche Verbindungsstrecken, von denen jede eine der 13 verschiedene Längen hat. Es gibt also Mehrfachheiten von Strecken gleicher Länge. Wir werden zeigen, dass es darunter zwei Strecken gleicher Länge gibt, die keine gemeinsamen Endpunkte haben, d.h. deren Endpunkte ein gleichschenkliges Trapez bestimmen. Hierzu treffen wir ein Fallunterscheidung nach der maximalen Anzahl von Strecken, die die gleiche Länge haben:

Fall 1: Es gibt nur Längen, die von höchstens zwei Strecken angenommen werden: Wir können davon nach Schubfachprinzip (mindestens) $21 - 13 = 8$ Paare gleich langer Strecken auswählen, wobei die Strecken verschiedener Paare stets verschiedene Länge haben. Falls wir hierunter ein Paar mit gemeinsamem Endpunkte finden, sind wir fertig; andernfalls haben alle 8 Paare je einen gemeinsamen Endpunkt; nach Konstruktion ist dieser jeweils einer der ausgewählten 7 Eckpunkte. Damit gibt es nach Schubfachprinzip zwei dieser 8 Paare, die verschiedene Länge und den gleichen Eckpunkt gemeinsam haben. Aus Symmetriegründen bilden dann die vier freien Endpunkte der beiden Streckenpaare ein achsensymmetrisches, mithin gleichschenkliges Trapez.

Fall 2: Es gibt eine Länge, die von genau 3 Strecken angenommen wird, aber keine, die von vier (oder mehr) Strecken angenommen wird: Falls wir unter den drei Strecken zwei von gleicher Länge ohne gemeinsamen Endpunkt finden, sind wir fertig; andernfalls bilden diese drei einen Streckenzug $A_1A_2A_3A_4$. Falls $A_1 \neq A_4$, haben wir mit A_1A_3 und A_2A_4 zwei Strecken gleicher Länge ohne gemeinsamen Endpunkt nachgewiesen. Falls $A_1 = A_4$, bilden die drei Strecken ein gleichseitiges Dreieck, d.h. dieser Fall kann nur für die Streckenlänge vorkommen, die zum gleichseitigen Dreieck im Umkreis des 27−Ecks gehört. Dann betrachten wir die restlichen 18 Verbindungsstrecken, die jeweils eine von den restlichen 12 Streckenlängen annehmen: Falls es hierunter drei Strecken gleicher Länge gibt, so bestimmt diese Streckenlänge nicht nochmals ein gleichseitiges Dreieck und es gibt es nach der ersten Überlegung im Fall 2 unter ihnen vier Endpunkten mit zwei gleichlange Verbindungsstrecken. Falls es nur Paare gleichlanger Strecken gibt, so sind dies nach Schubfachprinzip mindestens $18 - 12 = 6$ Paare. Falls es unter diesen 6 Paaren zwei mit gleichem gemeinsamen Endpunkt gibt, schließen wir wie in Fall 1 auf zwei gleichlange Strecken. Falls es keine zwei Paare mit gleichem Endpunkt gibt, muss eines der Paare einen gemeinsamen Endpunkt haben, der auch Ecke des gleichseitigen Dreiecks ist, d.h. von diesem ausgewählten Eckpunkt geht noch ein Paar weiterer gleichlanger Strecken aus. Wieder kann wie im Fall 1 auf ein Paar gleichlanger Strecken ohne gemeinsamen Endpunkt geschlossen werden.

Fall 3: Es gibt eine Länge, die von mindestens vier Strecken angenommen wird: Von einem Punkt können höchstens zwei gleichlange Strecken ausgehen, also gibt es unter vier gleichlangen Verbindungsstrecken sicher zwei ohne gemeinsame Endpunkte.