BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK

Bildung & Begabung

Aufgaben und Lösungen

2. Runde 2012

Über Kommentare und Ergänzungen zu diesen Lösungsbeispielen freuen wir uns!

» **KORREKTURKOMMISSION | KARL FEGERT**

» **BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK**

Kortrijker Straße 1, 53177 Bonn | Postfach 20 02 01, 53132 Bonn | Tel.: (02 28) 9 59 15-20, Fax: (02 28) 9 59 15-29
info@bundeswettbewerb-mathematik.de, www.bundeswettbewerb-mathematik.de

Stand: Oktober 2012

GEFÖRDERT VOM

Bundesministerium für Bildung und Forschung

Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft

Aufgabe 1: Aus der Menge $\{1, 2, 3, ..., 2n\}$ werden n Zahlen ausgewählt und in aufsteigender Reihenfolge mit $a_1, a_2, ..., a_n$ bezeichnet, danach werden die restlichen n Zahlen in absteigender Reihenfolge mit $b_1, b_2, ..., b_n$ benannt. Für diese $2n$ Zahlen gilt also $a_1 < a_2 < ... < a_n$ und $b_1 > b_2 ... > b_n$.

Beweise, dass dann stets gilt: $|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + ... + |a_n - b_n| = n^2$.

1. Beweis: Wir benützen einen Hilfssatz:

HS: In jeder der Differenzen $(a_i - b_i)$ ist genau eine der beiden Zahlen a_i und b_i ($i = 1, 2, ..., n$) aus der Menge $K := \{1, 2, ..., n\}$ und die andere aus der Menge $G := \{n + 1, n + 2, ..., 2n\}$.

Beweis des HS (durch Widerspruch): Wäre für irgend ein $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ sowohl $a_j \in K$ als auch $b_j \in K$, so wäre wegen der Konstruktion der a_i und b_i auch $a_i \in K$ für alle $i \le j$ als auch $b_i \in K$ für alle $i \ge j$. Es sind also j der Zahlen a_i in K und $n - j + 1$ der Zahlen b_i in K; da zudem alle a_i und b_i verschieden sind, sind so mindestens $j + (n - j + 1) = n + 1$ Zahlen in K, was offensichtlich einen Widerspruch darstellt. Dieser Widerspruch lässt sich in analoger Weise herleiten, wenn man annimmt, dass a_i und b_i beide in der Menge G liegen.

Variante für den Beweis des HS: Für alle Indices $i > k$ ist $a_i > a_k$ und für alle Indices $i \le k$ ist $b_i \ge b_k$. Ist also zusätzlich $b_k > a_k$, so sind $n–k$ der Zahlen a_i größer als a_k und k der Zahlen b_i größer als a_k. Zusammen sind dies, da keine zwei dieser Zahlen gleich sind, genau n Zahlen. Da zusätzlich die a_i und b_i die Menge $\{1, 2,...,2n\}$ bilden, ist $a_k \le n$. Für b_k schließen wir entsprechend, dass für $i > k$ stets $b_i < b_k$ und für $i \le k$ stets $a_i \le a_k$; d.h. falls zusätzlich $b_k > a_k$, sind $n–k$ der Zahlen b_i kleiner als b_k und k der Zahlen a_i kleiner als b_k, zusammen also n Zahlen; damit ist $b_k > n$. In analoger Weise folgt aus $b_k < a_k$, dass $a_k > n$ und $b_k \le n$.

Aus dem Hilfssatz folgt also, dass jedes $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ der Ausdruck $|a_i - b_i| = (g_i - k_i)$ für ein geeignetes $g_i \in G$ und ein geeignetes $k_i \in K$, wobei keine zwei der g_i und keine zwei der k_i identisch sind. Die n Zahlen g_i durchlaufen also alle Zahlen aus G, ebenso durchlaufen die n Zahlen k_i alle Zahlen aus K. Nach Kommutativgesetz ist also

$$\begin{aligned}
|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + ... + |a_n - b_n| &= (g_1 - k_1) + (g_2 - k_2) + ... + (g_n - k_n)\\
&= (g_1 + g_2 + ... + g_n) - (k_1 + k_2 + ... + k_n)\\
&= (n+1 + n+2 + ... + 2n) - (1 + 2 + ... + n)\\
&= \underbrace{n + n + ... + n}_{n\ Summanden}\\
&= n^2.
\end{aligned}$$

2. Beweis (nach Umordnung): Zu einer Auswahl W der Zahlen a_i $(i = 1, 2, 3, ..., n)$ sei $S_W := |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + ... + |a_n - b_n|$.

Zunächst berechnen wir den Wert von $|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + ... + |a_n - b_n|$ für die spezielle Wahl W*, bei der $a_i := i$ $(i = 1, 2, 3, ..., n)$; nach Aufgabenstellung ergibt sich hieraus $b_i = 2n - i + 1$. Offensichtlich ist dies die einzige Wahl, bei der jedes der b_i größer als jedes der a_i ist und es gilt

$$\begin{aligned}
S_{W^*} &= |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + ... + |a_n - b_n|\\
&= ((2n–0) - 1) + ((2n–1) - 2) + ((2n–2) - 3) + ... + ((2n–(n–2)) - (n–1)) + ((2n–(n– 1) - n)\\
&= n \cdot 2n - (1 + 3 + 5 + ... 2n - 1) = 2n^2 - n^2\\
&= n^2.
\end{aligned}$$

Sei nun eine andere Auswahl W der a_i gegeben. Dann gibt es mindestens ein b_j, das kleiner als ein a_k ist; wir können sogar schärfer folgern, dass es ein Paar (b_j , a_k) gibt mit der Eigenschaft $b_j + 1 = a_k$. Durch Vertauschen der Zuweisung der Werte b_j und a_k konstruieren wir aus der Auswahl W eine neue Auswahl W', d.h. W' ist definiert durch $a'_i := a_i$ für alle $i \ne k$ und $a'_k := a_k - 1$; hieraus ergibt sich $b'_i = b_i$ für alle $i \ne j$ und $b'_j = b_j + 1$; insbesondere ist $a'_k = b_j$ und $b'_j = a_k$; ferner $|a'_i - b'_i| = |a_i - b_i|$ für alle $i \ne j$ und $i \ne k$. So können wir leicht $S_{W'}$ aus S_W bestimmen:

Falls $k = j$, ist $|a'_k - b'_k| = |b_j - a_j|$ und somit $S_{W'} = S_W$.

Falls $j < k$, ist $a'_j = a_j < a_k = b'_j = b_j + 1$, also $|a'_j - b'_j| = b'_j - a'_j = b_j +1 - a_j = | a_j - b_j| + 1$,
ferner $b'_k = b_k < b_j = a'_k = a_k - 1$, also
$|a'_k - b'_k| = a'_k - b'_k = a_k -1 - b_k = |a_k - b_k| - 1$,

d.h. die Veränderungen durch die neue Wahl der a_k und b_j heben sich auf, es ist wieder $S_{W'} = S_W$.

Falls $j > k$, ist analog $|a'_j - b'_j| = |a_j - b_j| - 1$ und $|a'_k - b'_k| = |a_k - b_k| + 1$ und wieder $S_{W'} = S_W$.

Falls $W' = W^*$, haben wir für W bewiesen, dass $S_W = n^2$. Falls $W' \neq W^*$ können wir obige Neukonstruktion wiederholen. Nach endlich vielen solchen Neukonstruktionen erreichen wir aber die Auswahl W*; dann ist $S_W = S_{W'} = S_{W''} = ... = S_{W^*} = n^2$.

Aufgabe 2: Auf einem Tisch sind n Schalen im Kreis angeordnet. Anja geht im Uhrzeigersinn um den Tisch und legt dabei nach folgender Regel Murmeln in die Schalen:

Sie legt in eine beliebige erste Schale eine Murmel, dann geht sie eine Schale weiter und legt dort eine Murmel hinein. Anschließend geht sie zwei Schalen weiter, bevor sie wieder eine Murmel legt, danach geht sie drei Schalen weiter usw. Wenn in jeder Schale mindestens eine Murmel liegt, hört sie auf.

Für welche n tritt dies ein?

Anmerkung: Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.

Antwort: Anja hört genau dann auf, wenn n eine Zweierpotenz ist, d.h. wenn es ein $t \in \mathbb{N}_0$ gibt, sodass $n = 2^t$.

Bezeichnungen: Um die Rechnungen einfacher zu gestalten, beginnen wir unsere Zählungen jeweils mit Null: Es seien die Schalen im Uhrzeigersinn fortlaufend mit 0, 1, 2, ..., $n-1$ so nummeriert, dass Anja ihre nullte Murmel in die Schale 0 legt, die erste in die Schale 1, die zweite in Schale 3 usw., wobei natürlich mit den Nummern der Schalen stets deren Restklasse mod n gemeint ist.

1. Beweis: Mit $s(k)$ sei die Nummer der Schale bezeichnet, in die Anja beim k – ten Legen eine Murmel legt ($k = 0, 1, 2, ...$). Offensichtlich legt Anja genau dann mit dem k–ten Legen eine Murmel in die Schale s_k, wenn $s(k) \equiv 0 + 1 + 2 + ... + k \mod n$, d.h. wenn

$$s(k) \equiv \frac{1}{2}k(k+1) \mod n.$$

Zunächst leiten wir zwei Aussagen über den Zusammenhang von k, $s(k)$ und n her:

$$\begin{aligned} s(2n+k) &\equiv \frac{1}{2}(2n+k+1)(2n+k) \equiv 2n^2 + n\cdot k + k\cdot n + n + \frac{1}{2}(k+1)k \equiv \frac{1}{2}(k+1)k \\ &\equiv s(k) \mod n, \end{aligned}$$

d.h. die Zuweisung der Restklassen mod n zu den k ist periodisch und die Periode ist höchstens $2n$. Bei der Untersuchung der Frage, welche Restklassen mod n die $s(k)$ annehmen, genügt es also, die Werte $k \in \{1, 2, ..., 2n-1\}$ zu untersuchen. Weiter gilt

$$\begin{aligned} s(2n-(k+1)) &= \frac{1}{2}(2n-(k+1))(2n-k) = 2n^2 - n\cdot k - k\cdot n - n + \frac{1}{2}(k+1)k \\ &\equiv s(k) \mod n. \end{aligned}$$

Hieraus schließen wir: Nimmt ein $s(k)$ für ein $k \in \{n, n+1, ..., 2n-1\}$ den Wert einer bestimmten Restklasse mod n an, dann hat bereits ein $s(k)$ mit $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$ diesen Wert angenommen. Bei der Untersuchung der Frage, welche Werte von Restklassen mod n die $s(k)$ annehmen, können wir uns also sogar auf $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$ zu beschränken.

Es sind dann zwei Teilaussagen zu beweisen:

(1) Wenn n eine Zweierpotenz ist, dann durchlaufen die $s(k)$ alle Restklassen mod n.

(2) Wenn n keine Zweierpotenz ist, gibt es eine Restklasse $r \mod n$, die der Wert $s(k)$ für kein k annimmt.

1. Beweis von (1): Sei n eine Zweierpotenz, d.h. es gebe ein $t \in \mathbb{N}_0$, sodass $n = 2^t$. Es genügt zu zeigen, dass dann die zu den n Werten $k \in \{0,1, ..., n-1\}$ gehörenden n Restklassen $s(k)$ paarweise verschieden sind. Dies zeigen wir in einem Widerspruchsbeweis: Wir nehmen an, es gebe ein k und ein davon verschiedenes k' mit $0 \le k,k' < n$ und $s(k) \equiv s(k') \mod n$. Nun ist aber

$$s(k) \equiv s(k') \mod n \iff 2^t \mid \left(\frac{1}{2}k(k+1) - \frac{1}{2}k'(k'+1)\right) \iff 2^{t+1} \mid (k^2 + k - k'^2 - k')$$

$$\Leftrightarrow\ 2^{t+1} \mid (k^2 - k'^2 + k - k') \quad \Leftrightarrow\ 2^{t+1} \mid (k-k')(k+k') + (k-k')$$
$$\Leftrightarrow\ 2^{t+1} \mid (k-k')(k+k'+1);$$

falls k und k' von gleicher Parität sind, ist der zweite Faktor ungerade, falls k und k' von verschiedener Parität sind, ist der erste Faktor ungerade. Weil $t+1 > 0$ und damit 2^{t+1} gerade ist, gilt also entweder $2^{t+1} \mid (k-k')$ oder $2^{t+1} \mid (k+k'+1)$. Wegen $0 \le k, k' < n$ ist jedoch $1 \le k+k'+1 < 2n = 2^{t+1}$, d.h. der zweite Fall kann nicht eintreten. Aus $2^{t+1} \mid (k-k')$ folgt aber mit $-2^t < (k-k') < 2^t$ sofort $k-k' = 0$, also der Widerspruch $k = k'$.

2. Beweis von (1) (mit Induktion nach t): Sei n eine Zweierpotenz, d.h. es gebe ein $t \in \mathbb{N}_0$, sodass $n = 2^t$. Für $t = 0$ und $t = 1$ stimmt die Aussage offensichtlich. Nun nehmen wir an, dass die Aussage richtig ist für ein bestimmtes t, d.h. dass die $s(k)$ alle Restklassen $\bmod\ 2^t$ durchlaufen, wenn k alle Werte aus $\{0, 1, ..., 2^t-1\}$ durchläuft. Dann stellen wir fest:

$$\begin{aligned}
s(2^{t+1}-(k+1)) - s(k) &= \frac{1}{2}(2^{t+1}-(k+1))(2^{t+1}-k) - \frac{1}{2}k(k+1)\\
&= 2^{2t+1} - 2^t\cdot k - k\cdot 2^t - 2^t + \frac{1}{2}(k+1)k - \frac{1}{2}k(k+1) \quad = -k\cdot 2^{t+1} - 2^t\\
&\equiv 2^t \bmod 2^{t+1}\\
\text{und gleichzeitig } \dots &\equiv 0 \bmod 2^t.
\end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung nehmen die $s(k)$ jeden Wert der Restklassen $\bmod\ 2^t$ genau ein Mal an, wenn die Zahl k die Menge $\{0, 1, ..., 2^t-1\}$ durchläuft. Somit folgt aus obigem Ergebnis, dass die $s(k)$ jeden Wert der Restklassen $\bmod\ 2^t$ genau zwei Mal annehmen, wenn die Zahl k die Menge $\{0, 1, ..., 2\cdot 2^t - 1\}$ durchläuft; und weil diese beiden Werte sich bei Betrachtung $\bmod\ 2^{t+1}$ um 2^t unterscheiden, nehmen die $s(k)$ bei Betrachtung $\bmod\ 2^{t+1}$ jeden Wert genau einmal an.

Beweis von (2): Sei n keine Zweierpotenz. Dann ist $n = p\cdot 2t$ für ein geeignetes ungerades ganzzahliges $p \ge 3$ und ein geeignetes $t \in \mathbb{N}_0$. Nach der Vorbemerkung genügt es, zu zeigen, dass für $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$ die $s(k)$ den Wert von mindestens einer Restklasse $\bmod\ n$ nicht annehmen, hierzu genügt es wiederum zwei verschieden Zahlen k und k' mit $0 \le k,k' < n$ zu finden, für die $s(k) \equiv s(k') \bmod n$ ist. Dies gelingt folgendermaßen: Es ist

$$\begin{aligned}
s(k) \equiv s(k') \bmod n \quad &\Leftrightarrow\ p\cdot 2^t \mid \left(\frac{1}{2}k(k+1) - \frac{1}{2}k'(k'+1)\right) \ \Leftrightarrow\ p\cdot 2^{t+1} \mid (k^2 + k - k'^2 - k')\\
&\Leftrightarrow\ p\cdot 2^{t+1} \mid (k^2 - k'^2 + k - k') \ \Leftrightarrow\ p\cdot 2^{t+1} \mid (k-k')(k+k') + (k-k')\\
&\Leftrightarrow\ p\cdot 2^{t+1} \mid (k-k')(k+k'+1).
\end{aligned}$$

Falls $p \le 2^{t+1} - 1$, wählen wir k und k' so, dass $(k-k') = p$ und $k + k' + 1 = 2^{t+1}$; dies ist für $k = 2^t + \frac{p-1}{2}$ und $k' = 2^t - \frac{p+1}{2}$ erfüllt.

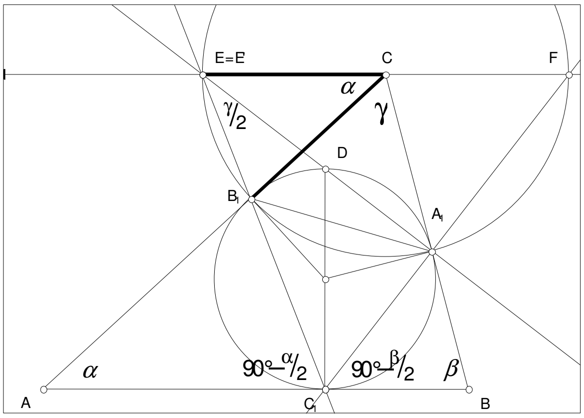
In allen anderen Fällen ist, weil p ungerade ist, sogar $p \ge 2^{t+1} + 1$. Dann wählen wir k und k' so, dass $k + k' + 1 = p$ und $(k-k') = 2^{t+1}$; dies ist für $k = 2^t + \frac{p-1}{2}$ und $k' = \frac{p+1}{2} - 2^t$ erfüllt.

Offensichtlich sind k und k' in beiden Fällen verschieden und $k' < k$, ferner ist im ersten Fall $k = 2^t + \frac{p-1}{2} < 2^t + 2^t = 2\cdot 2^t < p\cdot 2^t = n$, ebenso wie im zweiten Fall: hier ist $k = 2^t + \frac{p-1}{2} \le \frac{p-1}{2} + \frac{p-1}{2} < p < n$.

Aufgabe 3: Der Inkreis des Dreiecks ABC berührt die Seiten BC, CA und AB in den Punkten A_1, B_1 bzw. C_1. Der Punkt D sei das Bild des Punktes C_1 bei der Spiegelung am Mittelpunkt des Inkreises. Schließlich sei E der Schnittpunkt der Geraden B_1C_1 und A_1D.

Beweise, dass die Strecken CE und CB_1 gleiche Länge haben.

1. Beweis (Winkeljagd): Bekanntlich sind die Tangentenabschnitte von einem Punkt außerhalb eines Kreises gleich lang, somit ist das Dreieck C_1AB_1 gleichschenklig mit Basiswinkel $\angle B_1C_1A = 90° - \frac{\alpha}{2}$.



Analog schließen wir $\angle BC_1A_1 = 90° - \frac{\beta}{2}$; und da diese beiden Winkel kleiner als 90° sind, bleibt

$$\angle A_1C_1B_1 = 180° - (90° - \frac{\alpha}{2}) - (90° - \frac{\beta}{2})$$

$$= \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90° - \frac{\gamma}{2}.$$

Übrigens liegen deswegen auch B_1 und A_1 in verschiedenen Halbebenen bezüglich der Geraden C_1D.

Weil die Strecke C_1D Durchmesser des Inkreises ist, ist das Dreieck C_1A_1D rechtwinklig bei A_1, da ferner E auf C_1B_1 liegt, auch das Dreieck C_1A_1E. Hieraus berechnen wir

$$\angle B_1EA_1 = \angle C_1EA_1 = 180° - 90° - (\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}) = \frac{\gamma}{2}.$$

Im Dreieck B_1CA_1 sind die Seiten B_1C und A_1C gleichlang, weil sie Tangentenabschnitte an den Inkreis vom gleichen Punkt C sind. Damit ist B_1A_1 eine Sehne im Kreis um C durch B_1 und A_1, und der Mittelpunktswinkel zu dieser Sehne hat die Weite γ. Weil die Punkte E und C in der gleichen Halbebene bez. der Geraden A_1B_1 liegen und $\angle B_1EA_1 = \frac{\gamma}{2}$, liegt E auch auf diesem Kreis; hieraus folgt sofort, dass CE und CB_1 die gleiche Länge haben. Das war zu zeigen.

2. Beweis: Wir bezeichnen den Schnittpunkt der Geraden C_1B_1 mit der Parallelen zur Geraden AB mit E'. Dann haben die Strecken CB_1, CA_1 und CE' gleiche Länge: Die ersten beiden, weil sie gleiche Tangentenabschnitte von C an den Inkreis von Dreieck ABC sind, die letzten beiden, weil sie Bilder der gleichlangen Tangentenabschnitte AC_1 und AB_1 von A an den Inkreis des Dreiecks ABC bei der zentrischen Streckung mit Zentrum B_1 sind, die A in C und C_1 in E' überführen.

Also ist das Dreieck $E'CB_1$ gleichschenklig. Weil EC || AB, ist $\angle ECA_1 = \alpha + \gamma$, somit ist $\angle CA_1E' = \frac{1}{2}(180° - (\alpha + \gamma)) = \frac{1}{2}\beta$.

Weil die Strecke C_1D Durchmesser des Inkreises ist und E auf der Halbgeraden $[A_1E$ liegt, ist $\angle EA_1C_1 = 90°$. Ferner sind auch die Strecken BC_1 und BA_1 gleichlang, weil auch sie Tangentenabschnitte vom gleichen Punkt, nämlich B, an den Inkreis des Dreiecks ABC sind. Somit ist $\angle C_1A_1B = 90° - \frac{1}{2}\beta$ und

$$\angle CA_1E = \angle CA_1B - \angle EA_1C_1 - \angle C_1A_1B = 180° - 90° - (90° - \frac{1}{2}\beta) = \frac{1}{2}\beta = \angle CA_1E',$$

Damit ist E= E'; dies war zu zeigen.

Bemerkung (Feuerbachkreis): Mit M sei der Inkreismittelpunkt von Dreieck ABC bezeichnet. Die Konstruktion des Punktes E kann analog "auf der anderen Seite" durchgeführt werden: F sei der Schnittpunkt von C_1A_1 mit B_1D. Dann sind im Dreieck C_1EF die Punkte A_1 und B_1 die Fußpunkte der Höhen von E bzw. F; damit ist D der Höhenschnittpunkt und M der Mittelpunkt des oberen Höhenabschnittes der Höhe von C_1 im Dreieck C_1EF. Also ist der Umkreis von Dreieck B_1MA_1 der Feuerbachkreis im Dreieck C_1EF; mit einigen Zusatzüberlegungen schließt man, dass dieser Kreis auch den Punkt C enthält und C die Mitte der Seite EF ist.

Aufgabe 4: In ein rechtwinkliges Koordinatensystem soll ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b mit $a \le b$ so gelegt werden, dass sich kein Punkt mit ganzzahligen Koordinaten in seinem Inneren oder auf seinem Rand befindet.

Unter welcher notwendigen und zugleich hinreichenden Bedingung für a und b ist dies möglich?

Anmerkung: Die Richtigkeit des Resultates ist zu beweisen.
Unter "Punkt mit ganzzahligen Koordinaten" wird ein Punkt verstanden, bei dem beide Koordinaten ganzzahlig sind.

Bezeichnung: Die Lage eines Rechtecks im Koordinatensystem heiße *zulässig*, wenn es in seinem Innern und auf seinem Rand keinen Punkt enthält, bei dem beide Koordinaten ganzzahlig sind.

Ein Punkt, bei dem beide Koordinaten ganzzahlig sind, heiße *Gitterpunkt*; eine Gerade durch einen Gitterpunkt, die parallel zur x–Achse oder parallel zur y–Achse ist, heiße *Gitterlinie*.

Wir sagen "Die Fläche F überdeckt den Punkt P", wenn P ein Punkt von F einschließlich des Randes von F ist.

Antwort: Ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b mit $a \le b$ kann genau dann zulässig gelegt werden, wenn die Bedingung

$$a < 1 \text{ oder } b < \sqrt{2} \qquad (*)$$

erfüllt ist.

Bemerkung: Die Bedingung "$\lfloor a \rfloor b < \sqrt{2}$" ist ebenfalls eine korrekte Antwort. Eine Formulierung wie "$\min(a,b) < 1$ oder $\max(a,b) < \sqrt{2}$" benötigt nicht die zusätzliche Einschränkung $a \le b$.

Beweis:

Teil 1: Die Bedingung ist hinreichend:

Für den Fall $a < 1$ betrachten wir den Streifen A der Breite a, dessen Mittelachse durch die Gerade $x = \frac{1}{2}$ gegeben ist. Offensichtlich überdeckt dieser Streifen keinen Gitterpunkt. Wenn die Mittelachse des Rechtecks, die zur Seite b parallel ist, auf die Mittelachse dieses Streifens gelegt wird, bedeckt das Rechteck offensichtlich nur Punkte des Streifens und damit auch keine Gitterpunkt.

Falls $a \le b < \sqrt{2}$ betrachten wir das Quadrat, das durch die Geraden $y = -x$, $y = -x + 2$, $y = x + 1$, $y = x - 1$ bestimmt ist, d.h. das die Ecken $(-0{,}5|\,0{,}5)$, $(0{,}5|\,1{,}5)$, $(1{,}5|\,0{,}5)$ und $(0{,}5|\,-0{,}5)$ hat. Offensichtlich überdeckt dieses Quadrat höchstens Gitterpunkte, bei denen beide Koordinaten Werte aus dem Intervall [–0,5: 1,5} annehmen, also höchstens 0 oder 1; zusätzlich liegen diese Gitterpunkte auf dem Rand des Quadrates. Damit enthält es im Innern keine Gitterpunkte. Es hat die Kantenlänge $\sqrt{2}$; somit kann jedes Rechteck, bei dem beide Kanten kürzer als $\sqrt{2}$ sind, so gelegt werden, dass es vollständig im Innern dieses Quadrates liegt und somit keine Gitterpunkte überdeckt; z.B. wenn man es so legt, dass seine Seiten parallel zu den Seiten des Quadrates sind und der Mittelpunkt des Rechtecks auf den Mittelpunkt des Quadrates zu liegen kommt.

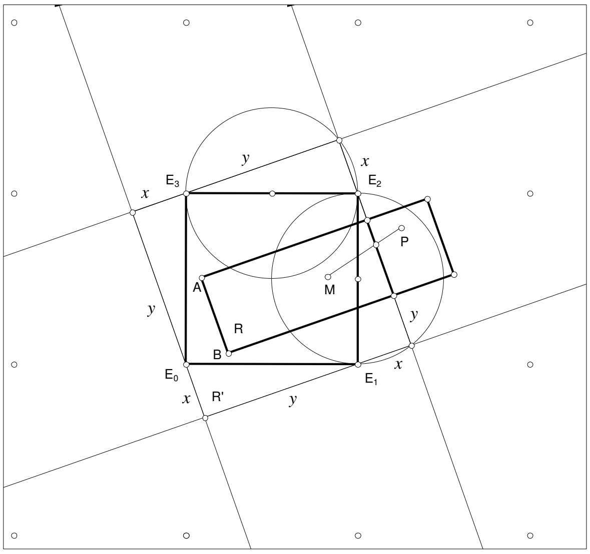
Teil 2: Die Bedingung ist notwendig:

1. Beweis von Teil 2: Sei R ein Rechteck, das zulässig im Achsenkreuz liegt; seinen Mittelpunkt nennen wir M. Mit E sei dasjenige Einheitsquadrat bezeichnet, das die Eckpunkte $E_0(0|0)$, $E_1(1|0)$, $E_2(1|1)$ und $E_3(0|1)$ hat. Wir können o.B.d.A annehmen, dass M im Innern oder auf dem Rand des Quadrates E, dessen Ecken die Gitterpunkte sind.

Zu R und E konstruieren wir nun ein Rechteck R' auf folgende Art: Durch jede der Ecken E_i von E zeichnen wir die Parallele zu einer der Seiten von R, und zwar wählen wir die Seite so, dass die Parallele keine inneren Punkte von E enthält. Die gewählten Parallelen stehen zueinander senkrecht bzw. sind parallel und bestimmen so ein Rechteck. Diese Konstruktion ist immer möglich, da die

Seiten von R senkrecht aufeinander stehen; und falls die Seiten von R parallel bzw. senkrecht zu den Seiten von E stehen, sei R' identisch mit dem Quadrat E.

R' hat nun folgende Eigenschaften:



R' überdeckt E vollständig; insbesondere enthält R' auch den Mittelpunkt M.

Die Ecken von R' liegen auf dem nach außen errichteten Thaleskreisbögen über den Seiten E_iE_{i+1} des Quadrates E. Ferner wird R' wird von der Figur, bestehend aus dem Quadrat E und den Thaleskreisbögen über den Seiten von E vollständig überdeckt. Damit überdeckt R' außer den Gitterpunkten $E_0(0|0)$, $E_1(1|0)$, $E_2(1|1)$ und $E_3(0|1)$ keine weiteren Gitterpunkte; und die genannten Gitterpunkte liegen auf dem Rand von R'.

Aus Symmetriegründen ist R' sogar ein Quadrat; dabei unterteilt der Gitterpunkt E_0 eine der Seiten von R' in zwei Teile, deren Längen wir mit x und y bezeichnen. Wegen der Symmetrieeigenschaften der Gesamtfigur wird jede der Seiten von R' von einem der Gitterpunkt in zwei Strecken der Länge x bzw. y unterteilt.

Nun unterscheiden wir zwei Fälle:

Fall 1: Es gibt einen Punkt P von R', der außerhalb oder auf dem Rand von R' liegt.

Da R konvex ist und M ein von E überdeckter Punkt, wird die Verbindungsstrecke PM ganz von R überdeckt. Da P nicht innerhalb von R' liegt und M innerhalb von R' liegt, hat die Verbindungsstrecke PM mit dem Rand von R' einen gemeinsamen Punkt, den wir Q nennen. Q kann – als von R überdeckter Punkt – auch keine der Ecken E_i sein. Da die Seiten von R' und von R parallel sind bzw. senkrecht aufeinander stehen, schneidet das Rechteck R aus derjenigen Seite von R', die den Punkt Q enthält, ein gemeinsames Stück aus, dessen Länge der Länge einer der Seiten von R entspricht. Nach Voraussetzung kann diese Strecke aber nicht einen der Gitterpunkte enthalten, hat demnach eine Länge, die kleiner als x oder kleiner als y ist.

Fall 2: Nicht Fall1, d.h. es gibt keinen Punkt P von R, der außerhalb oder auf dem Rand von R liegt.

Dann liegt das Rechteck R vollständig im Innern des Quadrates R'. Da die Seiten von R und R' jeweils parallel sind, sind sowohl Länge als auch Breite von R kleiner als die Seitenlänge des Quadrates R', also kleiner als $x + y$.

Nun schätzen wir x, y und $x + y$ ab: Nach Pythagoras gilt $x^2 + y^2 = 1$, also sicher $x \le 1$ und $y \le 1$. Ferner folgt $y^2 = 1 - x^2$, also und $x^2y^2 = x^2(1 - x^2) = -(x^2 - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} \ge \frac{1}{4}$. Zusammen mit $x^2 + y^2 = 1$ und $x,y \ge 0$ folgt $x^2 + 2xy + y^2 = 1 + 2xy$, also $(x + y)^2 \le 1 + 2\cdot\frac{1}{2}$, also $x + y \le \sqrt{2}$.

Also ist im Fall 1 eine der beiden Seiten von R kürzer als 1 und im Fall 2 sind beide Seiten von R kürzer als $\sqrt{2}$. Das war zu zeigen.

Variante: Teile der Abschätzung können auch mit Kenntnissen über Beziehungen zwischen quadratischem und arithmetischem Mittel hergeleitet werden: Es ist

$$x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

d.h. das quadratische Mittel aus x und y hat den Wert $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Bekanntlich gilt stets AM ≤ QM, also

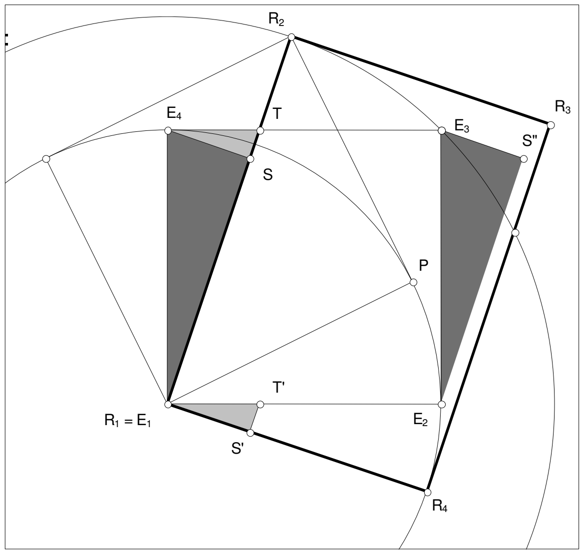
$$\frac{x^2+y^2}{2} \le \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ und damit } x+y \le \sqrt{2}.$$

2. Beweis von Teil 2: Es genügt zu zeigen, dass ein Rechteck mit Seitenlängen $a = 1$ und $b = \sqrt{2}$ bei jeder Lage im Achsenkreuz mindestens einen Gitterpunkt überdeckt. Hierzu benützen wir zwei unmittelbar einsichtige Hilfssätze:

HS 1: Jedes Einheitsquadrat, das achsenparallel im Koordinatensystem liegt, überdeckt mindestens einen Gitterpunkt.

HS 2: Jedes Flächenstück, das einen Gitterpunkt überdeckt, überdeckt auch nach Verschiebung um eine Einheit parallel zu einer der Koordinatenachsen wieder einen Gitterpunkt.

Sei also R ein Rechteck mit den Seitenlängen $a = 1$ und $b = \sqrt{2}$. Wenn R so im Achsenkreuz liegt, dass seine Seiten parallel zu den Achsen sind, so schneidet sicher eine Gitterlinie die beiden langen Seiten von R; und R überdeckt von dieser Gitterlinie eine Teilstrecke der Länge 1, also auch sicher einen Gitterpunkt.



Wenn R nicht parallel zu den Gitterlinien liegt, argumentieren wir folgendermaßen (vgl. Figur): Seien R_1 und R_2 zwei Eckpunkte des Rechtecks R, die eine Seite von R der Länge $\sqrt{2}$ einschließen. Wir betrachten dann das Quadrat, dessen Diagonale mit R_1R_2 zusammenfällt; mit Pythagoras folgt sofort, dass seine Seite die Länge 1 hat; ebenso folgt, dass die beiden anderen Ecken den Abstand $\frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ von dieser Diagonalen haben. Insbesondere liegt eine der beiden anderen Ecken dieses Quadrates im Innern von R; diese Ecke sei mit P bezeichnet.

Nun drehen wir dieses Quadrat um R_1, bis seine Seiten parallel zu den Achsen des Koordinatensystems sind. Dabei wählen wir die Drehrichtung so, dass sich der Punkt R_2 zunächst ins Innere von R bewegt. Solange der Drehwinkel höchstens 45° ist, bleiben bei dieser Drehung die Punkte P und R_2 vom Rechteck R überdeckt.

Diese Operation kann man in analoger Weise auch mit Drehpunkt R_2 durchführen, man erkennt, dass die beiden so beschriebenen Drehwinkel sich zu 90° ergänzen. Da man in den Argumentationen R_1 und R_2 vertauschen können, können wir also o.B.d.A annehmen, dass der Drehwinkel bei Drehung um R_1 höchstens 45° beträgt, d.h. dass die Punkte P und R_2 nach der Drehung von R überdeckt sind. (Der Drehwinkel ist sogar kleiner als 45°, da die Seiten von R nicht achsenparallel liegen.)

Das Bild des Quadrates bei der beschriebenen Drehung nennen wir E, die Eckpunkte seien gemäß Zeichnung bezeichnet: $E_1 = R_1$, E_2 als Bild von P, E_3 als Bild von R_2 und als vierte Ecke E_4.

Die Ecke E_4 liegt – da R nicht achsenparallel liegt – außerhalb von R; der Schnittpunkt von E_4E_3 mit R_1R_2 heiße T (da R nicht achsenparallel liegt, ist T eindeutig definiert), der Fußpunkt des Lotes von E_4 auf R_1R_2 sei S. Da das Dreieck E_1E_4T nach Konstruktion rechtwinklig bei E_4 ist, ist S ein innerer Punkt der Strecke E_1T, d.h. das Dreieck E_1E_4T wird durch E_4S in zwei Teildreiecke zerlegt. Das Teildreieck E_1SE_4 unterwerfen wir der Parallelverschiebung $\overrightarrow{E_1E_2}$, das Teildreieck E_4ST der Parallelverschiebung $\overrightarrow{E_4E_1}$. Einfache Kongruenzüberlegungen ergeben, dass diese Dreiecke nach der Verschiebung von R vollständig überdeckt werden.

Nun sind wir fertig: Nach HS 1 enthält E sicher einen Gitterpunkt. Falls dieser nicht von vorneherein von R überdeckt ist, liegt er in einem der beiden zu verschiebenden Teildreiecke. Dann enthält aber nach HS 2 eines der beiden verschobenen Teildreiecke einen Gitterpunkt, dieser wird wie das verschobene Teildreieck von R überdeckt.