BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK

Bildung & Begabung

Aufgaben und Lösungen

1. Runde 2013

Über Kommentare und Ergänzungen zu diesen Lösungsbeispielen freuen wir uns!

» **KORREKTURKOMMISSION | KARL FEGERT**

» **BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK**

Kortrijker Straße 1, 53177 Bonn | Postfach 20 02 01, 53132 Bonn | Tel.: (02 28) 9 59 15-20, Fax: (02 28) 9 59 15-29
info@bundeswettbewerb-mathematik.de, www.bundeswettbewerb-mathematik.de

Stand: 21. Mai 2013

GEFÖRDERT VOM

Bundesministerium für Bildung und Forschung

Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft

Aufgabe 1: Kann man die Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis 21 so in Teilmengen zerlegen, dass in jeder dieser Teilmengen die größte Zahl gleich der Summe der übrigen Zahlen ist?

Anmerkung: Die Richtigkeit des Resultates ist zu beweisen.

Antwort: Nein, das kann man nicht erreichen.

1. Beweis (durch Widerspruch über die Parität der Gesamtsumme): Die Gesamtsumme der natürlichen Zahlen von 1 bis 21 ist $1 + 2 + ... + 21 = \frac{21 \cdot 22}{2} = 231$, dies ist eine ungerade Zahl.

Wäre nun eine solche Zerlegung in Teilmengen möglich, dann wäre in jeder solchen Teilmenge die Summe der Zahlen das Doppelte der größten Zahl in dieser Teilmenge, insbesondere wäre in jeder Teilmenge die Summe aller Zahlen gerade. Da jede der Zahlen 1, 2, ..., 21 in genau einer der Teilmengen vorkommt, ist die Gesamtsumme aller Zahlen identisch mit der Summe über die Summe in allen Teilmengen, also eine Summe gerader Zahlen und somit selbst eine gerade Zahl.

Dies steht aber im Widerspruch zu obiger Feststellung.

2. Beweis (durch Widerspruch über die Anzahl der ungeraden Zahlen): Wir nehmen an, es gäbe eine solche Zerlegung in Teilmengen. Bekanntlich ist der Wert einer Summe von ganzen Zahlen genau dann gerade, wenn die Anzahl ihrer ungeraden Summanden gerade ist.

Ist nun in einer solchen Teilmenge die größte Zahl gerade, so kommt unter den übrigen eine gerade Anzahl von ungeraden Zahlen vor; und ist die größte Zahl in einer solchen Teilmenge ungerade, so kommt unter den übrigen Zahlen ein ungerade Anzahl von ungeraden Summanden vor. In jedem Fall ist also die Gesamtzahl von ungeraden Zahlen in einer solchen Teilmenge gerade.

Da jede der betrachteten Zahlen in genau einer Teilmenge vorkommt, muss die Gesamtzahl der ungeraden Zahlen als Summe lauter geraden Zahlen selbst eine gerade Zahl sein.

Unter den betrachteten Zahlen 1, 2, ..., 21 gibt es aber genau 11 ungerade Zahlen; dies ist eine ungerade Zahl und ergibt so den gewünschten Widerspruch.

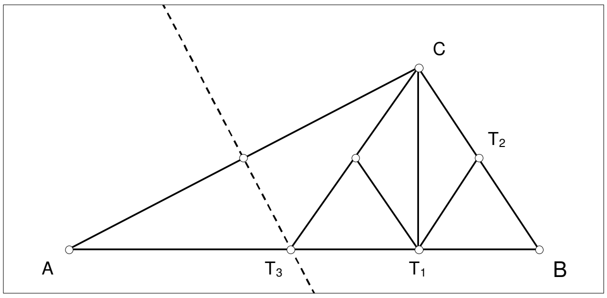
Aufgabe 2: Kann man jedes Dreieck in genau fünf gleichschenklige Dreiecke zerlegen?

Bemerkung: Bei allen betrachteten Dreiecken liegen die drei Eckpunkte nicht auf einer Geraden.
Anmerkung: Die Richtigkeit des Resultates ist zu beweisen.

Antwort: Ja, zu jedem Dreieck gibt es eine Zerlegung in genau 5 gleichschenklige Dreiecke.

Zur Beschreibung der Zerlegungsalgorithmen benützen wir einige Hilfssätze (die Figur zu HS 1 bis HS 3 zeigt bereits eine Zerlegung für ein Dreieck, was nicht gleichschenklig-rechtwinklig ist):

HS 1: Man kann jedes Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegen.



Beweis von HS 1: Wir bezeichnen o.B.d.A die Ecken des zu zerlegenden Dreiecks so mit A, B und C, dass $\overline{AB} \geq \overline{AC} \geq \overline{BC}$. Bekanntlich ist dann $\gamma \geq \beta \geq \alpha$ und insbesondere $\alpha \leq \beta < 90°$; damit verläuft die Höhe von C im Innern des Dreiecks ABC. Der Fußpunkt dieser Höhe – er sei mit T_1 bezeichnet – liegt also im Innern der Strecke AB. Die Strecke CT_1 zerteilt damit das Dreieck ABC in die beiden bei T_1 rechtwinkligen Dreiecke AT_1C und CT_1B.

HS 2: Man kann jedes rechtwinklige Dreieck in zwei gleichschenklige Dreiecke zerteilen.

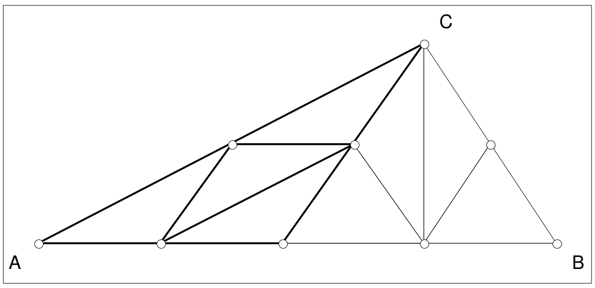
Beweis von HS 2 (vgl. Figur zum Beweis von HS 1): Wir bezeichnen die Ecken des betrachteten Dreiecks mit B, T_1 und C, wobei der rechte Winkel bei T_1 liegt. Nach Satz von der Innenwinkelsumme gilt $\angle CBT_1 + \angle T_1CB = 90°$. Wir können also durch T_1 eine Schnittlinie legen, die den rechten Winkel bei T_1 in einen Winkel der Weite $\angle CBT_1$ (anliegend an T_1B) und einen Winkel der Weite $\angle T_1CB$ (anliegend an T_1C) aufteilt. Diese Schnittlinie trifft BC in einem Punkt, den wir T_2 nennen, sie teilt das Dreieck in zwei Teildreiecke auf, von denen eines zwei Innenwinkel der Weite $\angle CBT_1$, das andere zwei Innenwinkel der Weite $\angle T_1CB$ hat; beide sind damit gleichschenklig.

Variante: Bekanntlich ist der Umkreisradius eines rechtwinkligen Dreiecks so groß wie die Länge der halben Hypotenuse, und der Umkreismittelpunkt ist der Mittelpunkt der Hypotenuse, in unserem Fall also T_2. Offensichtlich verläuft der Radius zur Ecke mit dem rechten Winkel, in unserem Fall T_2T_1, im Innern des Dreiecks, zerteilt es also in die beiden gleichschenkligen Dreiecke T_1T_2B und T_1T_2C.

HS 3 (vgl. Figur zum Beweis von HS 1): Man kann jedes rechtwinklige Dreieck in zwei Dreiecke zerteilen, von denen das eine rechtwinklig und das andere gleichschenklig ist.

Beweis von HS 3: Wir bezeichnen die Ecken des rechtwinkligen Dreiecks so mit A, T_1 und C, dass der rechte Winkel bei T_1 liegt und $\overline{AT_1} \geq \overline{T_1C}$. Die Mittelsenkrechte auf der Hypotenuse AC schneidet dann die Kathete AT_1 in einem Punkt, den wir T_3 nennen. Falls nun T_1 und T_3 identisch sind, d.h. wenn das Dreieck AT_1C gleichschenklig–rechtwinklig ist, zerschneidet diese Mittelsenkrechte das Dreieck AT_1C in zwei kongruente Teildreiecke, die beide einen 90°–Winkel und einen 45°–Winkel besitzen, also beide sowohl rechtwinklig als auch gleichschenklig sind. Falls T_1 und T_3 verschieden sind, ist das Dreieck AT_3C ein gleichschenkliges Teildreieck von Dreieck AT_1C; und die Restfläche, also das Dreieck T_3T_1C ein bei T_1 rechtwinkliges Dreieck.

HS 4: Man kann jedes gleichschenklige Dreieck in vier gleichschenklige Dreieck zerlegen.

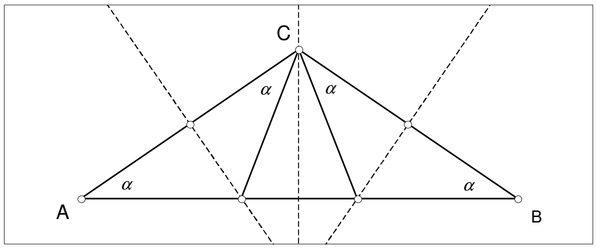


Beweis von HS 4: Bekanntlich teilen die Mittelparallelen eines Dreiecks dieses in vier Teildreiecke, die alle ähnlich zum Ausgangsdreieck sind; ist das Ausgangsdreieck gleichschenklig, so also auch die vier Teildreiecke.

Variante: Das Ausgangsdreieck ist gleichschenklig, insbesondere ist die Mittelsenkrechte auf der Basis Symmetrieachse, teilt also das Ausgangsdreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke. Diese beiden zerlegen wir nach HS 2 jeweils in zwei gleichschenklige Dreiecke.

HS 5: Man kann jedes stumpfwinklig-gleichschenklige Dreieck in 3 gleichschenklige Dreiecke aufteilen

Beweis von HS 5: Die Ecken des Dreiecks seien so mit A, B und C benannt, dass AB die Basis ist. Weil dann $\gamma := \angle ACB > 90°$ und $\alpha = \angle BAC = \angle CBA$, ist nach Satz von der Innenwinkelsumme $\gamma > 2\alpha$. Also können wir das Winkelfeld von $\angle ACB$ in drei Teilwinkel der Weite α, $180° - 2\alpha$ und wieder α aufteilen, d.h. es gibt zwei Punkte D und E auf der Basis AB, sodass die Dreiecke ADC, DEC und CEB gleichschenklig sind und das Dreieck ABC zerlegen.



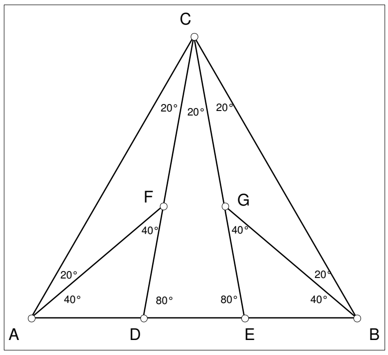
HS 6: Ein Dreieck, das nicht gleichseitig ist, lässt sich in zwei Dreiecke zerteilen, von denen eines gleichschenklig ist (vgl. 3. Fig. zum 3. Beweis):

Beweis von HS 6: Wir bezeichnen die Ecken des Dreiecks so mit A, B und C, dass $\overline{AC} < \overline{AB}$; dies ist immer möglich, da das betrachtete Dreieck nach Voraussetzung nicht gleichseitig ist. Dann gibt es im Innern der Seite AB einen Punkt D mit $\overline{AC} = \overline{AD}$, d.h. die Strecke CD zerteilt das Dreieck ABC in das gleichschenklige Dreieck DAC und das Restdreieck CDB (das übrigens sicher stumpfwinklig bei D ist).

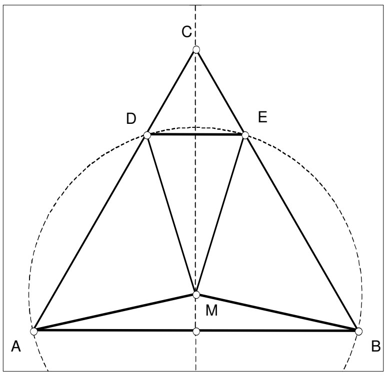
Variante (vgl. Figur zum 3. Beweis): Wir betrachten ein Dreiecke BDC, in dem $\overline{BC} > \overline{DC}$. Dann liegt ein innerer Punkt der Strecke BC auf der Mittelsenkrechte von BD, er sei mit E bezeichnet. Das Dreieck DEB ist dann gleichschenkliges Teildreieck von Dreieck BDC.

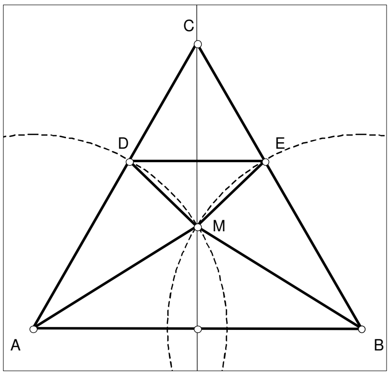
HS 7: Jedes gleichseitige Dreieck ABC lässt sich in 5 gleichseitige Dreiecke zerlegen.

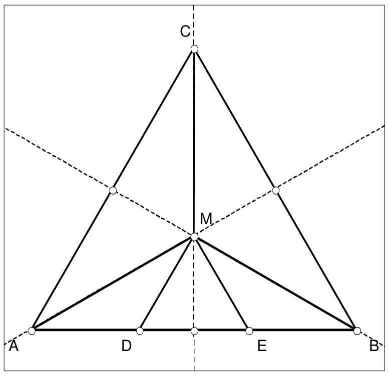
Beweis von HS 7: Variante 1 (vgl. auch die selbsterklärende Figur): Wir wählen auf AB zwei Punkte D und E so, dass die Geraden CD und CE das Winkelfeld von $\angle ACB$ in drei gleiche Winkel der Weite 20° aufteilen. Weiter wählen wir auf CE und CE zwei Punkte F bzw. G so, dass $\angle CAF = \angle CBG = 20°$. Damit ist das gleichseitige Dreieck aufgeteilt in fünf Dreiecke AFC, ADF, DCE, CGB und EBG. Einfache Winkelbetrachtungen (Innenwinkelsumme im Dreieck) ergeben, dass alle gleichschenklig sind: Die Dreiecke AFC und BGC haben je zwei gleiche Winkel der Weite 20°, die Dreiecke ADF und BEG je zwei Winkel der Weite 40° und das Dreieck DCE zwei Winkel der Weite 80°.



Weitere Beweisvarianten können aus folgenden Figuren herausgelesen werden:





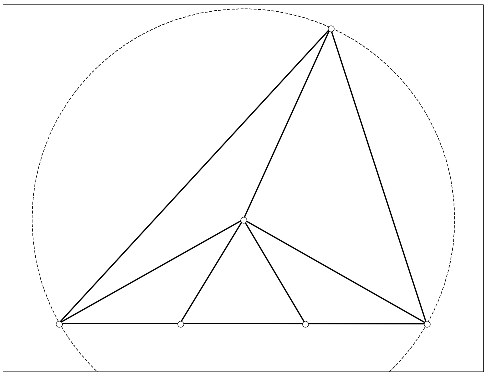


1. Beweis (durch Angabe einer Zerlegung, vgl. Figur zu HS 1): Wir zerlegen das vorgegebene Dreieck zunächst in zwei rechtwinklige Dreiecke nach HS 1; eines dieser beiden rechtwinkligen Dreiecke nach HS 3 weiter in zwei Dreiecke, von denen eines gleichschenklig und das andere rechtwinklig ist. Die beiden rechtwinkligen Dreiecke wiederum zerteilen wir jeweils in zwei gleichschenklige Dreiecke nach HS 2 und erhalten so die gewünschten fünf gleichschenkligen Teildreiecke.

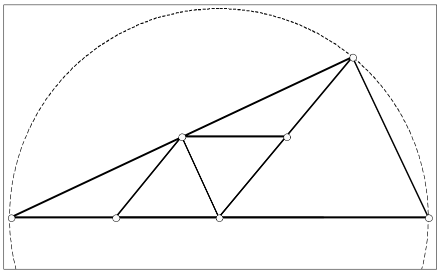
2. Beweis (durch Angabe einer Zerlegung): Wir unterscheiden nach gleichseitigen und nicht–gleichseitigen Dreiecken: Wenn das Dreieck gleichseitig ist, zerlegen wir es, wie in HS 7 beschrieben. Wenn es nicht gleichseitig ist, teilen wir zunächst ein gleichschenkliges Dreieck ab wie in HS 6 beschrieben; das verbleibende Dreieck zerteilen wir zunächst in zwei rechtwinklige Dreiecke wie in HS 1 beschrieben und diese dann in jeweils zwei gleichschenklige Dreiecke, wie in HS 2 beschrieben.

3. Beweis: Wir unterscheiden nach spitz–, recht– und stumpfwinkligen Dreiecken:

Wenn das Dreieck spitzwinklig ist, liegt der Umkreismittelpunkt im Innern dieses Dreiecks. Die Entfernungen vom Umkreismittelpunkt zu den Ecken sind alle gleich, d.h. die Verbindungsstrecken zu den Eckpunkten zerlegen das Dreieck in 3 gleichschenklige Dreiecke. Da die drei Spitzenwinkel dieser Dreiecke sich zu 360° ergänzen, ist mindestens einer davon größer als 120°, das zugehörige Teildreieck also stumpfwinklig; dieses stumpfwinklig-gleichschenklige Dreieck zerlegen wir wie in HS 5 beschrieben in drei gleichschenklige Teildreiecke. Damit haben wir wie gefordert insgesamt 5 gleichschenklige Teildreiecke.

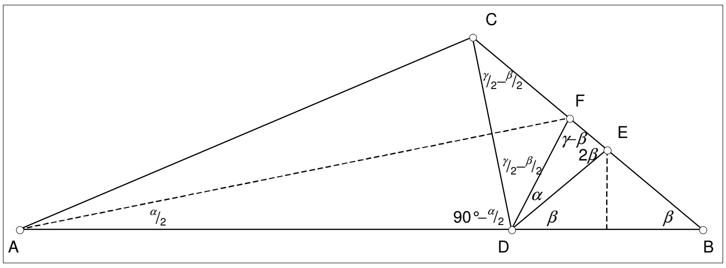


Wenn das Dreieck rechtwinklig ist, teilen wir es zunächst in zwei gleichschenklige Teildreiecke wie in HS 2 beschrieben und eines der beiden gleichschenkligen Teildreiecke in 4 gleichschenklige Teildreiecke wie in HS 4 beschrieben.



Wenn das Dreieck stumpfwinklig ist, teilen wir – wie weiter unten beschrieben – zwei gleichschenklige Teildreiecke so ab, dass ein spitzwinkliges Restdreieck übrig bleibt; diese zerlegen wir unter Verwendung des innenliegenden Umkreismittelpunktes – wie oben beschrieben – in drei gleichschenklige Teildreiecke.

Zum Nachweis, dass dies möglich ist, benennen wir die Ecken des Dreiecks so mit A, B und C, dass $\gamma > 90°$ und $\alpha \le \beta < 90°$. Weiter sei D im Innern der Strecke AB so gewählt, dass $\overline{AD} = \overline{AC}$; dies ist möglich, weil $\gamma > \beta$, also $\overline{AB} > \overline{AC}$. Schließlich seien E und F auf der Strecke BC so gewählt, dass E auf der Mittelsenkrechten der Strecke DB liegt und F auf der Mittelsenkrechten von DC, d.h. F liegt auch auf der Winkelhalbierenden von α. Dies ist möglich, weil $\angle BDC = 180° - \angle CDA = 90° + {}^{\alpha}/_{2} > 90°$; d.h. das Dreieck BDC ist stumpfwinklig bei D und die Mittelsenkrechten der kurzen Seite treffen die lange Seite, die der stumpfen Ecke D gegenüberliegt. Es sind also die Dreiecke DAC, DEB und DFC gleichschenklig; und mindestens eins der Dreieck CDE und BDF ist spitzwinklig. Letzteres folgt mit einfachen Winkelberechnungen:



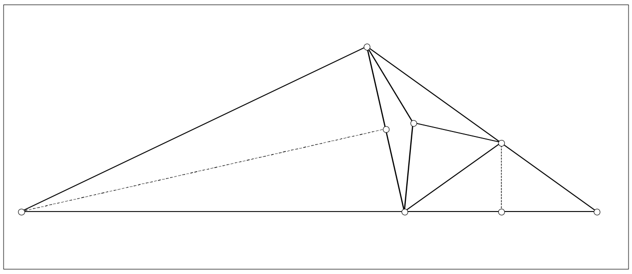
$\angle CDA = 90° - {}^{\alpha}/_{2}$, $\angle FDA = \angle ACF = \gamma$, $\angle BDE = \beta$, hieraus folgt sofort $\angle EDF = \alpha$,

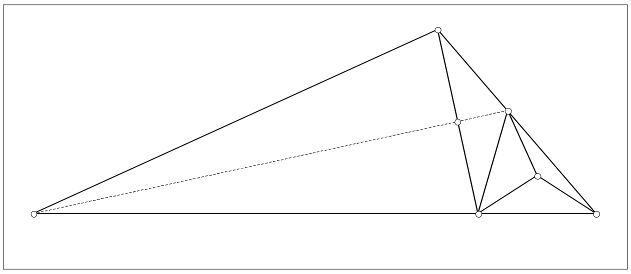
$\angle EDC = 180° - \beta - (90° - {}^{\alpha}/_{2}) = 90° + {}^{\alpha}/_{2} - \beta < 90°$. Weiter

$\angle CED = 2\beta$, $\angle DCE = \angle DCF = \gamma - (90° - {}^{\alpha}/_{2}) = \gamma - ({}^{\gamma}/_{2} + {}^{\beta}/_{2}) = {}^{\gamma}/_{2} - {}^{\beta}/_{2} < {}^{\gamma}/_{2} < 90°$, sowie

$\angle DFB = 180° - 2\beta - \alpha = \gamma - \beta$.

Falls nun $\beta < 45°$, ist das Restdreieck DEC stumpfwinklig, weil $\angle DEC = 2\beta < 90°$ und – wie oben festgestellt – auch $\angle DCE < 90°$ und $\angle EDC < 90°$. Falls $\beta \geq 45°$ (es genügt sogar $\beta > 45° - {}^{\alpha}/_{2}$), ist das Restdreieck DBF stumpfwinklig, weil $\angle DFB = 180° - 2\beta - \alpha < 90°$, $\angle BDF = \alpha + \beta < 90°$ und $\angle EBD = \beta < 90°$.





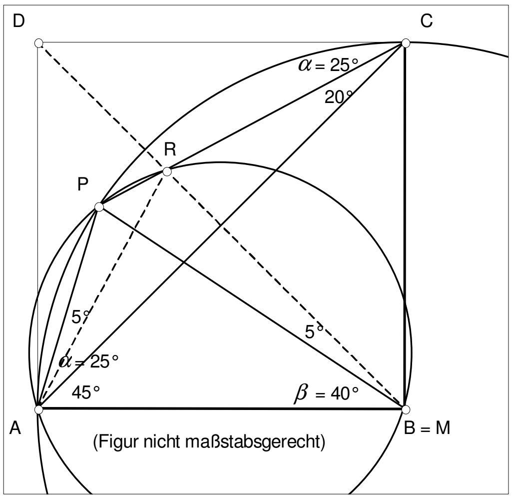
Aufgabe 3: Im Innern des Quadrates ABCD liege der Punkt P so, dass $\angle DCP = \angle CAP = 25°$ gilt.

Wie groß ist der Winkel $\angle PBA$?

Anmerkung: Die Richtigkeit des Resultates ist zu beweisen.

Antwort: Es ist $\angle PBA = 40°$.

1. Beweis: Die Diagonale AC ist Symmetrieachse des Quadrates ABCD, teilt also die rechten Winkel bei A und C jeweils in zwei Winkel der Weite 45°. Da außerdem $\angle DCP = 25° < 45° = \angle DCA$, liegt P im Innern des Dreiecks ACD. Insbesondere liegen P und B in verschiedenen Halbebenen bezüglich der Geraden AC. Von hier können wir verschieden schließen:



(Figur nicht maßstabsgerecht)

Variante 1: Nun betrachten wir den Umkreis des Dreiecks APC und seinen Mittelpunkt, den wir M nennen. Es ist $\angle CAP = 25°$ und $\angle PCA = 45° - 25° = 20°$. Nach Umfangswinkelsatz ist $\angle PMA = 2\cdot\angle PCA = 40°$ und $\angle CMP = 2\cdot\angle CAP = 50°$. Da zusätzlich MP das Winkelfeld von $\angle CMA$ teilt, ist $\angle CMA = \angle CMP + \angle PMA = 90°$. Weiter liegt M auf der Mittelsenkrechten der Strecke AC. Einziger Punkt dieser Mittelsenkrechten, der diese Bedingung erfüllt, ist B, d.h. es ist B = M. Hieraus folgt sofort $\angle PBA = \angle PMA = 40°$.

Variante 2: Nach Satz von der Innenwinkelsumme im Dreieck CPA ist $\angle CPA = 180° - 25° - 20° = 135°$. Da B Ecke des Quadrates ABCD ist, gehört im Kreis um B mit Radius BA = BC die Sehne AC zum Mittelpunktswinkel 90°. Damit ist der Bogen dieses Kreises über dieser Sehne AC, der nicht in der gleichen Ebene wie B liegt, der Ort aller Punkte in dieser Halbebene, unter denen die Sehne AC unter dem Winkel $180° - 45° = 135°$ erscheint. Der Punkt P hat aber diese Eigenschaft, liegt also auf diesem Kreisbogen. Damit ist das Dreieck ABP gleichschenklig mit Basis AP, nach bekannter Formel erhalten wir $\angle PBA = 180° - 2\cdot\angle BAE = 180° - 2\cdot(45° + 25°) = 40°$.

Variante 3: Die Diagonale BD ist gleichzeitig Mittelsenkrechte im Dreieck ACD auf der Seite AC; und da $\angle CAP = 25° > 20° = \angle PCA$, hat BD mit der Strecke PC einen Punkt gemeinsam, den wir R nennen. Da R auf der Mittelsenkrechten von AC liegt, ist $\angle CAR = \angle RCA = 20°$, also $\angle RAP = 25° - 20° = 5°$. Weiter ist $\angle RBA + \angle APR = 45° + 135° = 180°$, d.h. die vier Punkte A, B, R und P liegen auf einem Kreis. Nach Umfangswinkelsatz ist nun $\angle RBP = \angle RAP = 5°$ und somit $\angle PBA = \angle RBA - \angle RBP = 45° - 5° = 40°$.

2. Beweis: Sei P* so im Innern des Quadrates ABCD gewählt, dass P*B = AB und $\angle P^*BA = 40°$. Es genügt dann zu zeigen, dass P* und P identisch sind. Dies geschieht wie folgt:

Zunächst stellen wir fest, dass aus Symmetriegründen $\angle ACB = \angle BAC = 45°$.

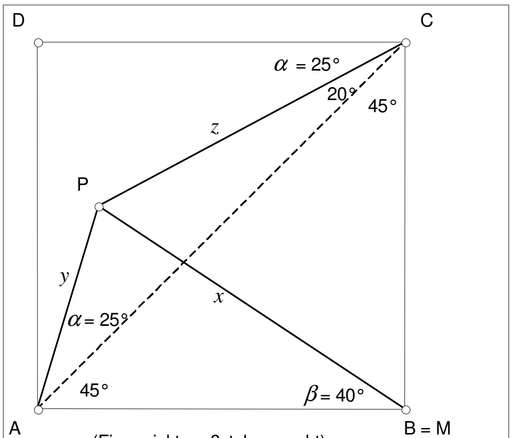
Da P*B = AB, ist das Dreieck P*BA gleichschenklig mit Spitze B; und da $\angle P^*BA = 40°$, ist die Weite des Basiswinkels $\angle BAP^*$ nach bekannter Formel $(180° - 40°) : 2 = 70°$; da zusätzlich $70° > 45° = \angle BAC$, gilt $\angle CAP^* = \angle BAP^* - \angle BAC = 70° - 45 = 25°$.

Weil ABCD ein Quadrat ist, ist aber auch P*B = AB = CB, d.h. auch das Dreieck P*CB ist gleichschenklig mit Spitze B; und da $\angle CBP^* = \angle CBA - \angle P^*BA = 90° - 40° = 50°$, ergibt die Rechnung für den Basiswinkel $\angle P^*CB = (180° - 50°) : 2 = 65° > 45° = \angle ACB$. Also gilt $\angle DCP^* = \angle DCA - \angle ACB = 90° - 65 = 25°$.

Somit ist P* durch die gleiche Bedingung festgelegt wie P; und da es genau einen Punkt P mit dieser Eigenschaft gibt, ist P = P*; dies war zu zeigen.

3. Beweis (Sinussatz, vgl. Figur zum 1. Beweis): Es sei $\angle PBA = \beta$ mit $0° \le \beta \le 90°$ bezeichnet, die Längen der Strecken PB, AP und PC mit x, y bzw. z; o.B.d.A. sei 1 die Länge der Quadratseite.

Die Diagonale AC ist Symmetrieachse des Quadrates ABCD, teilt also den rechten Winkel bei A und C jeweils in zwei Winkel der Weite 45°. Nach Konstruktion ist daher $\angle BAP = 45° + 25° = 70°$ und $\angle PCB = 90° - \angle DCP = 65°$; Über die Innenwinkelsumme im Viereck ABCP erhalten wir so $\angle APC = 360° - 70° - 90° - 65° = 135°$.



(Figur nicht maßstabsgerecht)

Bekanntlich hat die Strecke AC als Diagonale im Einheitsquadrat die Länge $\sqrt{2}$. Mehrfache Anwendung des Sinus-Satzes in den Dreiecken APC, ABP, BPC und ACP ergibt dann zusammen mit den bekannten Werten $\sin(45°) = \sin(135°) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$:

aus ΔAPC: $\quad y = \sqrt{2}\dfrac{\sin(20°)}{\sin(135°)} = 2\cdot\sin(20°)$

aus ΔAPC: $\quad z = \sqrt{2}\dfrac{\sin(25°)}{\sin(135°)} = 2\cdot\sin(25°)$, dies verwenden wir in

ΔABP: $\quad x = y\dfrac{\sin(70°)}{\sin(\beta)} = 2\cdot\sin(20°)\dfrac{\sin(70°)}{\sin(\beta)}$ und

ΔCBP: $\quad x = z\dfrac{\sin(65°)}{\sin(90°-\beta)} = 2\cdot\sin(25°)\dfrac{\sin(65°)}{\sin(90°-\beta)}$

Die rechten Seiten der beiden letzten Gleichungen können wir gleichsetzen und erhalten so

$$2\cdot\sin(20°)\cdot\sin(70°)\cdot\sin(90°-\beta) = 2\cdot\sin\cdot(25°)\cdot\sin(65°)\cdot\sin(\beta)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cdot\sin(20°)\cdot\cos(20°)\cdot\cos(\beta) = \sin\cdot(25°)\cdot\cos(25°)\cdot\sin(\beta)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin(40°)}{\sin(50°)} = \frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)}.$$

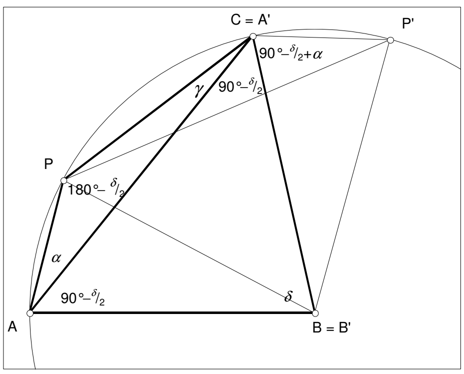
Eine Lösung dieser Gleichung ist offensichtlich $\beta = 40°$. Die linke Seite der Gleichung ist konstant, die rechte Seite vereinfacht man zu $\tan(\beta)$, welche für $0° \le \beta \le 90°$ streng monoton wachsend ist. Damit ist $\beta = 40°$ auch die einzige Lösung, also tatsächlich $\beta = 40°$.

Verallgemeinerung: Ersetzt man in der Angabe und den Beweisen den Winkel 25° durch $\alpha \in [0°; 45]$, so erhält man das Ergebnis $\angle PBA = 90° - 2\alpha$.

4. Beweis (Verallgemeinerung; implizit mit Beweis für den Umfangswinkelsatz): Wir benützen folgenden Hilfssatz:

HS: Gegeben sei ein konvexes Viereck ABCP mit folgenden Eigenschaften: Das Dreieck ABC ist gleichschenklig mit Basis AC und Spitzenwinkel $\delta := \angle CBA$; das Dreieck ACP hat die Innenwinkel $\alpha := \angle CAP$ und $\gamma :=$ PCA, wobei $\alpha + \gamma = \dfrac{\delta}{2}$.

Dann gilt: $\angle PBA = \delta - 2\alpha$.



Die Konfiguration der gestellten Aufgabe ergibt sich als Spezialfall dieses Vierecks, nämlich für $\delta = 90°$ und $\alpha = 25°$. Es ergibt sich so tatsächlich $\angle PBA = 90° - 2\cdot 25° = 40°$.

Beweis des HS: Im Dreieck APC ist nach Konstruktion und Satz von der Innenwinkelsumme

$$\angle APC \;=\; 180° - \angle CAP - \angle\, PCA \;=\; 180° - (\alpha + \gamma) \;=\; 180° - \frac{\delta}{2}.$$

Das Viereck ABCP ist konvex, also liegen P und B auf verschiedenen Seiten bezüglich der Gerade AC. Ferner ist das Dreieck ABC gleichschenklig, also gilt $\angle BAC\ \ \angle ACB \;=\; (90° - \frac{\delta}{2}) + \alpha$.

Nun betrachten wir die Drehung um B um den Winkel δ im Uhrzeigersinn. Sie bildet den Punkt A auf C ab, das Bild von P bei dieser Drehung sei mit P' bezeichnet. Nach Konstruktion ist

$$\angle PCP' \;=\; \angle PCA + \angle ACB + \angle BCP' \;=\; \angle PCA + \angle BAC + (\angle BAC + \angle CAP)$$

$$= \gamma + \angle(90° - \frac{\delta}{2}) + (90° - \frac{\delta}{2} + \alpha) \;=\; 180° - \frac{\delta}{2} \;=\; \angle APC.$$

Weiter gilt $\overline{AP} = \overline{P'C}$, damit sind die Dreiecke APC und P'CP nach *sws* kongruent.

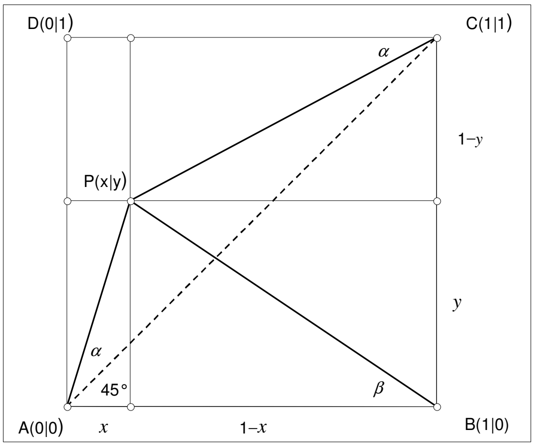
Aus BP = BP' und $\angle P'BP = \delta$ folgt weiter, dass nicht nur das Dreieck ABC, sondern auch Dreieck PBP' ein gleichschenkliges Dreieck mit Spitzenwinkel δ ist; damit sind diese beiden Dreiecke ähnlich. Da zusätzlich ihre Basen, also die Strecken AC bzw. PP', gleiche Länge haben, sind sie sogar kongruent, insbesondere ist $\overline{AB} = \overline{PB}$. Hieraus wiederum folgt, dass das Dreieck ABP gleichschenklig ist; nach bekannter Formel berechnet sich dessen Spitzenwinkel wie behauptet zu

$$\angle PBA \;=\; 180° - 2\cdot\angle BAP \;=\; 180° - 2\cdot[(90° - \frac{\delta}{2}) + \alpha] = \delta - 2\alpha.$$

Bemerkung: Hieraus folgt $\angle CBP = 2\alpha$, d.h. implizit wurde der Umfangswinkelsatz bewiesen: Im Kreis erscheint die Sehne PC vom Mittelpunkt aus unter dem doppelten Winkel wie von einem Punkt der Kreislinie aus.

5. Beweis (Berechnung im Achsenkreuz über tan–Werte, sehr knapp in der Darstellung): Wir lösen die Aufgabe allgemein für die Winkel $\alpha := \angle CAP = \angle DCP$ mit $0° < \alpha < 45°$; zu zeigen ist dann $\beta = 90° - 2\alpha$.

Wir legen ein Achsenkreuz so auf die Figur, dass die Punkte A, B, C, D und P die Koordinaten A(0|0), B(1|0), C(1|1), D(0|1) und P(x|y) haben. Es gilt dann (durch die Wahl von α ist sichergestellt, dass keine Nenner verschwinden): Es sei $\tau := \tan(\alpha)$; nach bekanntem Additionstheorem ist dann



$$\frac{y}{x} \;=\; \tan(\angle BAP) \;=\; \tan(45°+\alpha)$$

$$= \frac{\tan(45°)+\tan(\alpha)}{1-\tan(45°)\tan(\alpha)} \;=\; \frac{1+\tau}{1-\tau}. \quad \text{sowie}$$

$$\frac{1-y}{1-x} \;=\; \tan(\angle DCP) \;=\; \tan(\alpha) \;=\; \tau;$$

gesucht wird der Winkel β mit $\tan(\beta) = \frac{y}{1-x}$. Äquivalente Umformung ergibt das Gleichungssystem

$$(1 + \tau)\,x \;-\; (1 - \tau)\,y \;=\; 0;$$

$$\tau x \;-\; y \;=\; \tau - 1;$$

dieses hat die Lösungen $x = \frac{(1-\tau)^2}{1+\tau^2}$ und $y = \frac{(1-\tau)(1+\tau)}{1+\tau^2}$. Also ist

$$\tan(\beta) = \frac{y}{1-x} = \frac{\frac{(1-\tau)(1+\tau)}{1+\tau^2}}{1-\frac{(1-\tau)^2}{1+\tau^2}} = \frac{1-\tau^2}{2\tau} = \frac{1}{\tan(2\alpha)} = \tan(90° - 2\alpha).$$

Wegen der eindeutigen Umkehrbarkeit der Tangensfunktion im gewählten Bereich folgt $\beta = 90° - 2\alpha$.

Aufgabe 4: Anja und Bernd spielen folgendes Spiel: Sie schreiben abwechselnd je eine Ziffer an die Tafel, wobei Anja beginnt. Jede weitere Ziffer wird entweder rechts oder links neben die schon an der Tafel stehende Ziffernfolge geschrieben.

Beweise, dass Anja verhindern kann, dass nach einem Zug von Bernd die Ziffernfolge eine Quadratzahl im Dezimalsystem darstellt.

Bezeichnungen: Wird eine Ziffer rechts neben die Zahlenfolge geschrieben, sprechen wir von "Anhängen" der Ziffer, wird sie links neben die Zahlenfolge geschrieben, sprechen wir von "Voranstellen" der Ziffer.

Gelegentlich verkürzen wir den Begriff "Quadrat einer ganzen Zahl" zu "Quadratzahl", auch "Ziffernfolge, die Dezimaldarstellung der Zahl Z ist" zu "Zahl Z". Alle Angaben über Ziffern beziehen sich stets auf Ziffern im Dezimalsystem.

Sei Z eine ganze Zahl, deren Darstellung im Dezimalsystem bereits an der Tafel steht. Um den Anfangszug von Anja in die Überlegungen einbeziehen zu können, lassen wir gelegentlich die Zahl $Z = 0$ und ihre Darstellung durch eine leere Zeichenkette aus Ziffern ebenfalls zu. Dann bezeichne $Z{*}x$ bzw. $x{*}Z$ $(x \in \{0, 1, 2, ... 9\})$ diejenige Zahl, deren Dezimaldarstellung durch Anhängen bzw. Voranstellen der Ziffer x an die Dezimaldarstellung von Z entsteht. Insbesondere ist dann $Z{*}x = 10 \cdot Z + x$.

1. Beweis (Angabe einer konkreten Strategie unter Verwendung der Dreierreste von Quadratzahlen): Wir werden zeigen, dass Anja mit folgender Strategie verhindern kann, dass nach einem Zug von Bernd eine Quadratzahl an der Tafel steht:

Anja beginnt mit Ziffer 7; nach jedem Zug von Bernd hängt sie eine der Ziffern 3, 5 oder 7 an die an der Tafel stehende Zahl an, wobei sie die Ziffer so wählt, dass nach ihrem Zug die Zahl an der Tafel den Dreierrest 2 hat.

Wir zeigen zunächst die Richtigkeit folgender vier Aussagen:

(1) Anja kann die Strategie befolgen:

Hat die bisherige Zahl den Dreierrest 0 bzw. 1 bzw. 2, so hängt Anja die Ziffer 5 bzw. 7 bzw. 3 an. Nach bekannter Quersummenregel hat die neue Zahl dann den gleichen Dreierrest wie $0 + 5$ bzw. $1 + 7$ bzw. $2 + 3$, also stets 2.

(2) Keine Quadratzahl hat den Dreierrest 2:

Jede ganze Zahl x lässt sich darstellen als $x = 3k + r$ mit geeigneten ganzzahligen k und r, wobei $r \in \{0, 1, 2\}$. Es ist dann $x^2 = (3k + r)^2 = 9k^2 + 6kr + r^2 = 3(3k + 2kr) + r^2$; d.h. x^2 hat den gleichen Dreierrest wie r^2; einfaches Nachrechnen zeigt, dass r^2 nur die Werte 0, 1 oder 4 annehmen kann, also stets den Dreierrest 0 oder 1 hat, aber niemals 2.

(3) Keine Quadratzahl endet auf Ziffer 3, keine Quadratzahl endet auf Ziffer 7, jede Quadratzahl mit ungerader Zehnerziffer (also insbesondere solche mit Zehnerziffer 3, 5 oder 7) hat als Einerziffer 6:

Jede positive ganze Zahl kann dargestellt werden in der Form $50k \pm x$ für eine geeignete ganze Zahl k und ein geeignetes $x \in \{0, 1, 2, ..., 24, 25\}$. Da zusätzlich $(50k \pm x)^2 = 2500k^2 \pm 100kx + x^2 = 100(25k^2 \pm 4kx) + x^2$, kommen unter den Hunderterresten der Quadratzahlen – dies sind die Zahlen, die aus der Zehner– und Einerziffer der betrachteten Quadratzahl gebildet werden – nur die Hunderterreste der Quadrate der Zahlen 0, 1, 2, ..., 24 und 25 vor; dies sind die Zahlen 00, 01, 04, 09, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 00, 21, 44, 69, 96, 25, 56, 89, 24, 61, 00, 41, 84, 29, 76 und wieder 25. Einfaches Überprüfen zeigt die Richtigkeit der drei Behauptungen.

(4) Jede Quadratzahl mit Endziffer 5 hat 2 als Zehnerziffer und eine gerade Hunderterziffer:

Überprüfen der Hunderterreste aus (3) ergibt, dass jede Quadratzahl mit Endziffer 5 das Quadrat einer Zahl mit Endziffer 5 ist, d.h das Quadrat einer Zahl $10k + 5$ für geeignetes k. Nun ist $(10k + 5)^2 = 100k + 2 \cdot 10 \cdot 5 \cdot k + 25 = 100 \cdot 2 \cdot k + 25$ offensichtlich eine Zahl mit gerader Hunderterziffer.

Nun ist der Nachweis, dass Bernd nie eine Quadratzahl erzeugen kann einfach: Durch Anhängen einer Ziffer kann Bernd – da Anja immer ungerade Ziffern schreibt – nach (3) höchstens dann eine Quadratzahl erzeugen, wenn er die Ziffer 6 anhängt. Im ersten Zug erzeugt er so aber 76, was offensichtlich keine Quadratzahl ist; bei allen anderen Zügen findet er nach Anjas Zug eine Zahl mit Dreierrest 2 vor; dieser Dreierrest bleibt beim Anhängen der durch drei teilbaren Ziffer 6 erhalten und erzeugt so nach (2) sicher keine Quadratzahl.

Voranstellen einer Ziffer erzeugt aber ebenso wenig eine Quadratzahl: Die Endziffer der von Bernd erzeugten Zahl wurde von Anja geschrieben, ist also eine der Ziffern 3, 5 oder 7. Ist die Endziffer 3 oder 7, ist Bernds Zahl nach (3) keine Quadratzahl. Ist die Endziffer 5, kann Bernds Zahl nach (4) höchstens dann eine Quadratzahl sein, wenn die Zehnerziffer 2 ist und die Hunderterziffer gerade. Wenn aber die Zehnerziffer 2 ist, ist sie verschieden von 3, 5 und 7; sie wurde also sicher von Bernd geschrieben. Damit ist aber die Hunderterziffer – als letzte Ziffer im Zug davor – von Anja und somit ungerade, die von Bernd erzeugte Zahl ist dann nach (4) sicher keine Quadratzahl.

2. Beweis (Angabe einer konkreten Strategie unter Verwendung der Reste bei Division durch 8): Wir werden zeigen, dass Anja mit folgender Strategie verhindern kann, dass nach einem Zug von Bernd eine Quadratzahl an der Tafel steht:

Anja hängt bei jedem Zug an die an der Tafel stehenden Zahl eine Ziffer so an, dass die entstehende Zahl bei Division durch 8 den Rest 7 lässt.

Wir zeigen zunächst die Richtigkeit folgender vier Aussagen:

(1) Anja kann immer die Strategie befolgen:

Durch Anhängen einer Ziffer kann Anja jede der zehn aufeinander folgenden Zahlen Z*0, Z*1, ..., Z*9 erzeugen; diese haben 10 aufeinander folgende Reste bei Division durch 8. Darunter hat sicher eine den Rest 7.

(2) Eine Zahl kann nur dann Quadratzahl sein, wenn sie bei Division durch 16 einen der Reste 0, 1, 4, oder 9 lässt:

Jede positive ganze Zahl kann dargestellt werden in der Form $8k \pm x$ für eine geeignete ganze Zahl k und ein geeignetes $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Da zusätzlich $(8k \pm x)^2 = 8^2k^2 \pm 16kx + x^2 = 16(4k^2 \pm kx) + x^2$, kommen unter den Resten bei Division durch 16 nur die Reste der Quadrate der Zahlen 0, 1, 2, 3, 4 vor; einfaches Nachrechnen zeigt, dass dies die Reste 0, 1, 4, oder 9 sind.

(3) Eine Zahl mit Einerziffer 3 ist keine Quadratzahl:

Einfaches Betrachten des in der Schule üblichen Multiplikationsalgorithmus zeigt, dass die Endziffer des Quadrates einer Zahl allein durch die Endziffer dieser Zahl bestimmt ist. Einfaches Berechnen der Quadrate der Zahlen 0, 1, 3, ..., 9 zeigt, dass nur die Endziffern 0, 1, 4, 5, 6 oder 9 vorkommen.

Nun ist der Nachweis, dass Anjas Strategie erfolgreich ist, einfach: Bernd findet vor jedem seiner Züge eine Zahl Z der Form $Z = 8 \cdot k + 7$ für ein geeignetes ganzzahliges k vor. Voranstellen einer Ziffer b erzeugt die Zahl $10^k \cdot b + Z$ für ein geeignetes ganzzahliges k. Bei Bernds erstem Zug ist $Z = 7$ und $k = 1$; einfaches Ausprobieren zeigt, dass keine der Zahlen $10b + Z$, d.h. keine der Zahlen 07, 17, ..., 97) eine Quadratzahl ist. Bei allen anderen Zügen ist $k \geq 3$ und somit $10^k \cdot b$ durch 8 teilbar; die Zahl $10^k \cdot b + Z$ lässt also bei Division durch 8 den gleichen Rest wie Z, nämlich 7. Bei Division durch 16 lässt sie also den Rest 7 oder 15 und kann somit keine Quadratzahl sein.

Aber auch durch Anhängen einer Ziffer b kann Bernd keine Quadratzahl erzeugen: Seine Zahl hat dann die Form $10 \cdot Z + b = 80k + 70 + b = 16(5k + 4) + 6 + b$; diese lässt bei Division durch 16 den gleichen Rest wie $6 + b$, kann also – wegen $b \in \{0, 1, 2, ... 9\}$ – nach (2) höchstens dann Quadratzahl sein, wenn $6 + b = 9$, also $b = 3$. Dann ist sie aber nach (3) keine Quadratzahl.

Bemerkung: Da der Rest einer Zahl bei Division durch 8 durch die letzten drei Ziffern festgelegt ist, muss Anja zur Verfolgung ihrer Strategie lediglich die letzten beiden Ziffern von Z betrachten.

3. Beweis (Existenzbeweis): Die Menge der Quadratzahlen mit zwei Stellen (einschließlich führender Nullen) ist $\{00, 01, 04, 09, 16, 25, 36, 49, 64, 81\}$; dies ist gleichzeitig die Menge der Quadrate der

Ziffern des Dezimalsystems. Es ist leicht nachzuprüfen, dass keine davon eine Ziffer 7 in ihrer Dezimaldarstellung enthält. Beginnt also Anja mit der Ziffer 7, so kann Bernd im folgenden Zug weder durch Voranstellen noch durch Anhängen einer Ziffer das Quadrat einer ganzen Zahl herstellen.

Durch Betrachten des in der Schule üblichen Multiplikationsalgorithmus stellt man fest, dass das Quadrat einer ganzen Zahl mit Einerziffer z stets die gleiche Einerziffer wie z^2 hat. Durch Betrachten obiger Menge ist also leicht nachzuprüfen, dass keine Quadratzahl eine der Endziffern 2, 3, 7 oder 8 haben kann.

Hängt also Anja eine der Ziffern 2, 3, 7 oder 8 an eine bestehende Zahlenkette an, so kann Bernd durch anschließendes Voranstellen einer Ziffer niemals eine Quadratzahl herstellen, sondern höchstens durch Anhängen einer Ziffer. Anja erreicht also ihr Ziel, wenn sie zu gegebenem Z stets eine Zehner–Ziffer $a \in \{2, 3, 7, 8\}$ so auswählen kann, dass für keine Einer–Ziffer b die Zahl $Z{*}a{*}b$ eine Quadratzahl ist.

Dies ist tatsächlich stets möglich: Wenn Anja die Zahl Z vorfindet, eine Ziffer $a \in \{2, 3, 7, 8\}$ anhängt und Bernd dann eine beliebigen Ziffer b anhängt, entsteht die Zahl $Z{*}a{*}b = 100Z + 10a + b$. Da Anja mit der Ziffer 7 begonnen hat, ist die Zahl Z, die sie vor irgendeinem ihrer Züge vorfindet, sicher nie kleiner als 7. Da zusätzlich Anja $a \in \{2, 3, 7, 8\}$ und Bernd $b \in \{0, 1, ..., 9\}$ wählt, gilt für diese Zahl stets

$$720 \le 100Z + 20 \le 100Z + 10a + b = Z{*}a{*}b \le 100Z + 89,$$

d.h. die Zahl, die nach Bernds Zug an der Tafel steht, liegt im Intervall $[100Z + 20 , 100Z + 89]$, wobei zusätzlich die Untergrenze dieses Intervalls größer als 720 ist.

Liegt nun die Quadratzahl x^2 in diesem Intervall, so ist $x^2 \ge 100Z + 20 \ge 720$ und somit $x \ge \sqrt{720}$, also $x \ge 27$. Weiter folgt $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4 = 100Z + 20 + 4\cdot 27 + 4 > 100Z + 89$. Hieraus folgt sofort, dass die Quadratzahl $(x+2)^2$ nicht mehr in dem genannten Intervall enthalten ist, dieses Intervall enthält also außer der Quadratzahl x^2 höchstens noch die Quadratzahl $(x+1)^2$ und somit insgesamt höchstens zwei Quadratzahlen. Damit können auch höchstens zwei Ziffern aus $\{2, 3, 7, 8\}$ Zehnerziffer einer Quadratzahl in diesem Intervall sein. Wenn Anja eine der mindestens zwei verbleibenden Ziffern auswählt und anhängt, erreicht also ihr Ziel.

4. Beweis (Verschärfung der Argumentation im 3. Beweis): Anja kann mit folgender Strategie ihr Ziel erreichen:

Anja untersucht zu der Zahl Z, die sie an der Tafel vorfindet (zu Beginn sei $Z = 0$), ob $Z{*}3{*}6$ keine Quadratzahl ist. Ist dies der Fall, so hängt sie an Z die Ziffer 3 an, andernfalls hängt sie die Ziffer 7 an.

Wir zeigen zunächst die Richtigkeit folgender vier Aussagen:

(1) Die Ziffern 3 und 7 sind niemals Einerziffer einer Quadratzahl:

Jede positive ganze Zahl ist darstellbar in der Form $10k \pm x$ für eine geeignete ganze Zahl k und ein $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Da zusätzlich $(10k \pm x)^2 = 100k^2 \pm 20kx + x^2 \equiv x^2 \bmod 10$, kommen unter den Zehnerresten von Quadratzahlen – diese sind identisch mit deren Einerziffern – der nur die Zehnerreste der Quadrate der Zahlen 0, 1, 2, 3, 4 und 5 vor, dies sind 0, 1, 4, 9, 6 und 5. Insbesondere kommen hierunter die Zehnerreste 3 und 7 nicht vor.

(2) Hat eine Quadratzahl die Zehnerziffer 3 oder 7, so ist die Einerziffer 6.

Jede positive ganze Zahl kann dargestellt werden in der Form $50k \pm x$ für eine geeignete ganze Zahl k und ein $x \in \{0, 1, 2, ..., 24, 25\}$. Da zusätzlich $(50k \pm x)^2 = 2500k^2 \pm 100kx + x^2 \equiv x^2 \bmod 100$, kommen unter den Hunderterresten der Quadratzahlen nur die Hunderterreste der Quadrate der Zahlen 0, 1, 2, ..., 24 und 25 vor; dies sind 00, 01, 04, 09, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 21, 44, 69, 96, 56, 89, 24, 61, 41, 84, 29, und 76. Einfaches Überprüfen zeigt, dass tatsächlich 36 und 76 die einzigen Hunderterreste mit Zehnerziffer 3 oder 7 sind.

(3) Für alle positiven ganzen Zahlen Z ist mindestens eine der beiden Zahlen $Z{*}3{*}6$ und $Z{*}7{*}6$ keine Quadratzahl:

Für alle Z ist $Z{*}7{*}6 \equiv Z{*}3{*}6 \equiv 0 \bmod 4$ und $Z{*}7{*}6 - Z{*}3{*}6 = 40 \equiv 8 \bmod 16$. Wie man leicht nachrechnet, sind 0 und 4 die einzigen geraden quadratischen Reste $\bmod 16$. Falls nun eine der beiden Zahlen eine Quadratzahl ist, d.h. in Restklasse 0 oder 4 liegt, muss die andere in Restklasse 8 oder 12 sein, kann also keine Quadratzahl sein.

Variante des Nachweises :Die Annahme, dass es zu einer positiven ganzen Zahl natürliche Zahlen x und y gibt, sodass sowohl Z*3*6 = x^2 als auch Z*7*6 = y^2, führt zur notwendigen Bedingung 40 = Z*7*6 – Z*3*6 = $y^2 - x^2 = (y+x)(y-x)$, und weiter über die Primfaktorzerlegung der Zahl 40 = 2·2·2·5 zur notwendigen Bedingung, dass solche x und y nicht nur ganzzahlig sind, sondern auch eines der vier Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} y + x &= a_1 \\ y - x &= a_2 \end{aligned} \qquad \text{mit } (a_1;a_2) \in \{(40;1), (20;2), (10;4), (8;5)\}. \text{ erfüllen.}$$

Da die linken Seiten $(y + x)$ und $(y - x)$ entweder beide gerade oder beide ungerade sind, führt $(a_1;a_2)$ = (40;1) und $(a_1;a_2)$ = (8;5) zu keiner ganzzahligen Lösung. Die beiden anderen Gleichungssysteme führen über Additions– und Subtraktionsverfahren – auch ohne zusätzliche Aufzeichnungen im Kopf durchführbar – zu den einzigen Lösungen $(x^2 ; y^2)$ = (9 ; 49) und $(x^2 ; y^2)$ = (81 ; 121). Beide sind aber nicht von der Form (Z*3*6 ; Z*7*6), was den gewünschten Widerspruch darstellt.

Hieraus folgt nun schnell, dass Bernd nach keinem Zug von Anja eine Quadratzahl herstellen kann: Durch Voranstellen einer Ziffer kann er nur eine Zahl herstellen, die Endziffer 3 oder Endziffer 7 hat, nach HS 1 ist dies in keinem Fall eine Quadratzahl. Aber auch durch Anhängen einer Ziffer kann er keine Quadratzahl herstellen: nach HS 2 muss dies die Ziffer 6 sein, d.h. er muss eine Zahl der Form Z*3*6 oder Z*7*6 herstellen. Durch die vorherige Ziffernwahl von Anja kann er aber damit nur diejenige der beiden Zahlen herstellen, von der Anja festgestellt hat, dass sie keine Quadratzahl ist.

Bemerkung: Da die letzten 4 Ziffern einer Zahl die Restklasse $\bmod 2^4 = 16$ bestimmen, kann in Anjas Strategie die Überprüfung, ob Z*3*6 keine Quadratzahl ist, durch eine Überprüfung der letzten beiden Ziffern $(t|h)$ von Z vorgenommen werden: Es Z*3*6 sicher keine Quadratzahl, wenn Z*3*6 in Restklasse 8 oder 12 mod 16 ist, d.h. wenn $t{*}h \equiv 1 \bmod 4$ oder $t{*}h \equiv 2 \bmod 4$ ist.