BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK

Bildung & Begabung

Aufgaben und Lösungen

2. Runde 2013

Über Kommentare und Ergänzungen zu diesen Lösungsbeispielen freuen wir uns!

» KORREKTURKOMMISSION | KARL FEGERT

» BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK

Kortrijker Straße 1, 53177 Bonn | Postfach 20 02 01, 53132 Bonn | Tel.: (02 28) 9 59 15-20, Fax: (02 28) 9 59 15-29

info@bundeswettbewerb-mathematik.de, www.bundeswettbewerb-mathematik.de

Stand: Oktober 2013

GEFÖRDERT VOM

Bundesministerium für Bildung und Forschung

Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft

Aufgabe 1: Es seien m und n positive ganze Zahlen, für die $m^2 + n^2 + m$ durch mn teilbar ist.

Zeige, dass dann m eine Quadratzahl ist.

1. Beweis (durch Widerspruch): Sei p ein Primteiler von m und p^α ($\alpha \geq 1$) die höchste Potenz von p mit $p^\alpha \mid m$; es genügt dann zu zeigen, dass α gerade ist.

Nach Voraussetzung gilt $mn \mid m^2 + n^2 + m$, also auch $p^\alpha \mid m^2 + n^2 + m$. In dieser Summe sind die beiden Summanden m^2 und m durch p^α teilbar, also auch einzig übrigbleibende Summand n^2.

Wir nehmen an, α wäre ungerade: Dann gilt sogar $p^{\alpha+1} \mid n^2$. Da auch $p \mid n$ gilt (hier könnte man schärfer abschätzen!), folgt $p^{\alpha+1} \mid mn$ und hieraus wieder $p^{\alpha+1} \mid m^2 + n^2 + m$. Damit ist in dieser Summe nicht nur der Summand n^2, sondern auch – es ist α ungerade und damit $\alpha + 1 \leq 2\alpha$ – der Summand m^2 durch $p^{\alpha+1}$ teilbar, also auch einzige übrigbleibende Summand m. Dies steht aber im Widerspruch zur Maximalität von α.

2. Beweis: Nach Voraussetzung gibt es eine positive ganze Zahl k, für die $kmn = m^2 + n^2 + m$ (1).

Sei nun t der größte gemeinsame Teiler von m und n. Dann gibt es zwei teilerfremde positive ganze Zahlen m' und n', sodass $m = tm'$ und $n = tn'$. Dies setzen wir in (1) ein und es folgt

$kt^2m'n' = t^2m'^2 + t^2n'^2 + tm'$; nach Division durch $t \neq 0$ folgt

$ktm'n' = tm'^2 + tn'^2 + m'$.

Zusammenfassen der Produkte mit Faktor t auf der linken Seite ergibt die Gleichung

$t(km'n' - m'^2 - n'^2) = m'$, d.h. $t \mid m'$.

Andererseits ergibt Zusammenfassen der Produkte mit Faktor m' auf der linken Seite die Gleichung

$m'(ktn' - tm' - 1) = tn'^2$, d.h. $m' \mid tn'^2$; und da m' und n' teilerfremd sind, gilt sogar $m' \mid t$.

Hieraus folgt sofort $m' = t$, und somit $m = tm' = t^2$; dies war zu zeigen.

3. Beweis ("Vieta–Jumping", endlicher Abstieg): Wir werden zu jedem Paar $(m|n)$, das die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, weitere Zahlenpaare konstruieren, die die Aufgabe erfüllen und bei denen die erste Zahl genau dann Quadratzahl ist, wenn m auch Quadratzahl ist. Weiter werden wir zeigen, dass wir nach endlich vielen Wiederholungen dieser Konstruktion das Paar (1|1) erhalten. Da in diesem Paar die erste Zahl eine Quadratzahl ist, ist dann der Beweis abgeschlossen. Im Detail:

Es ist $m^2 + n^2 + m$ genau dann durch mn teilbar, wenn es eine positive ganze Zahl k gibt, für die $\frac{m^2 + n^2 + m}{mn} = k$; dies ist äquivalent zu jeder der beiden Gleichungen $m^2 - (nk - 1)m + n^2 = 0$ und $n^2 - mkn + m(m + 1) = 0$. Mit L(k) sei die Menge der Paare (m,n) positiver ganzer Zahlen bezeichnet, die diese Gleichungen erfüllen. Dies formulieren wir wie folgt:

$$(m,n) \in \mathrm{L}(k) \Leftrightarrow m \text{ ist Lösung der Gleichung } x^2 - (nk - 1)x + n^2 = 0 \qquad (\mathrm{G}(n,k))$$

$$\Leftrightarrow n \text{ ist Lösung der Gleichung } x^2 - mkx + m(m + 1) = 0 \qquad (\mathrm{G}(m,k)).$$

Sei nun (m,n) ein Paar positiver ganzer Zahlen, für das $m^2 + n^2 + m$ durch mn teilbar ist, d.h für das $(m,n) \in$ L(k) für ein geeignetes positives ganzzahliges k.

Es sind m und n Lösungen der quadratischen Gleichung G(n,k) bzw. G(m,k) für dieses k. Bekanntlich besitzen diese beiden Gleichungen dann je eine zweite, evtl. mit der ersten zusammenfallende Lösung m' bzw. n'. Nach Satz von Vieta gilt dann

$mm' = n^2$ und $m + m' = nk - 1$ sowie

$nn' = m(m + 1)$ und $n + n' = mk$.

Weil m, n und k positiv und ganzzahlig sind, folgt mit diesen vier Gleichungen sofort, dass auch m' und n' positiv ganzzahlig sind. Weiter folgt aus $mm' = n^2$, dass m genau dann Quadratzahl ist, wenn m'

ebenfalls Quadratzahl ist. Weiter ist m' Lösung der Gleichung G(n,k) und n' Lösung der Gleichung G(m,k), also auch $(m',n) \in$ L(k) und $(m,n') \in$ L(k).

Somit haben wir zu jedem Zahlenpaar $(m,n) \in$ L(k) zwei weitere (nicht notwendigerweise verschiedene) Zahlenpaare konstruiert mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass von den drei ersten Zahlen dieser Paare entweder alle drei Quadratzahlen sind oder keine eine Quadratzahl sind.

Für weitere Untersuchungen unterscheiden wir die drei möglichen Fälle:

$m' = m$: Aus $mm' = n^2$ folgt dann sofort $m = m' = n$ und es ist dann $k = \frac{m^2+n^2+m}{mn} = 2 + \frac{1}{m}$; und da m und k positiv ganzzahlig sind, folgt $m = 1$. Insbesondere ist m Quadratzahl, dies wollten wir zeigen. Es folgt weiter, dass $n = 1$ und – zunächst unerheblich –, dass $k = 3$.

$m' < m$: Wir wählen das Zahlenpaar (m',n), stellen fest, dass $m' + n < m + n$, d.h dass die Summe der Zahlen in diesem Zahlenpaar kleiner ist als im ursprünglichen Paar (m,n); nun konstruieren wir zu (m',n) nach gleicher Methode zwei weitere Zahlenpaare aus L(k).

$m' > m$: Wir wählen das Zahlenpaar (m,n'), stellen fest, dass aus $mm' = n^2$ sofort $m < n$ folgt und weiter $n' = \frac{m(m+1)}{n} < (m+1) \leq n$; d.h. dass auch hier die Summe der Zahlen in diesem Zahlenpaar kleiner ist als im ursprünglichen Paar (m,n); nun konstruieren wir zu (m',n) nach gleicher Methode zwei weitere Zahlenpaare aus L(k).

Die Konstruktion neuer Paare wie in den Fällen $m' < m$ und $m' > m$ wiederholen wir solange, bis wir den Fall $m' = m$ erreichen. Dies ist sicher nach endlich vielen Wiederholungen der Fall, da die Summe der Zahlen in einem Paar bei jeder Wiederholung um mindestens 1 abnimmt, aber nicht kleiner als 2 werden kann (Prinzip vom endlichen Abstieg). Unsere Konstruktion einer Reihe von von Zahlenpaaren aus L(k) endet also immer mit dem Zahlenpaar (1,1). Dessen erste Zahl 1 ist eine Quadratzahl, also sind auch alle anderen ersten Zahlen der Paare Quadratzahlen, insbesondere auch die Zahl m.

Bemerkungen: Bemerkenswert ist die Verschärfung: $\frac{m^2+n^2+m}{mn} \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{m^2+n^2+m}{mn} = 3$.

Durch Umkehrung obiger Konstruktion kann man ausgehend vom Zahlenpaar $(m_0,n_0) = (1,1) \in$ L(3) durch Rekursion alle Zahlenpaare aus L(3) und damit alle möglichen Zahlenpaare (m,n) erhalten, die die Bedingung der Aufgabe erfüllen. Es ist

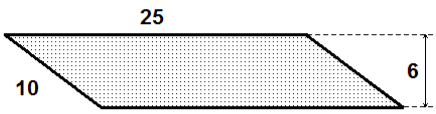
$$n_{i+1} = n_i \text{ und } m_{i+1} = \frac{n_i^2}{m_i} \quad (1), \quad \text{oder} \quad m_{i+1} = m_i \text{ und } n_{i+1} = \frac{m_i(m_i+1)}{n_1} \quad (2).$$

Dabei genügt es, für gerade i den Schritt (2) und für ungerade i den Schritt (1) anzuwenden, weil die anderen Schritte jeweils zum Vorgängerpaar führen. Man erhält so die Zahlenpaare

(1|1), (1|2), (4|2), (4|10), (25|10), (25|65), (169|65), ... , $(f_{2i-1}^2 \mid f_{2i-3} \cdot f_{2i-1})$, $(f_{2i-1}^2 \mid f_{2i-1} \cdot f_{2i+1})$, ..., wobei mit f_i die i–te Fibonaccizahl bezeichnet wird. Ein Induktionsbeweis ist dem Leser überlassen.

Aufgabe 2: Gegeben sei ein Parallelogramm aus Papier mit den Seitenlängen 25 und 10 sowie der Höhe 6 zwischen den längeren Seiten. Es soll so in genau zwei Teile zerschnitten werden, dass man unter Verwendung beider Teile einen Würfel mit geeigneter Kantenlänge ohne weitere Schnitte vollständig und ohne Überlappungen bekleben kann.

Beschreibe eine solche Zerschneidung und zeige, dass diese die Bedingungen der Aufgabe tatsächlich erfüllt.

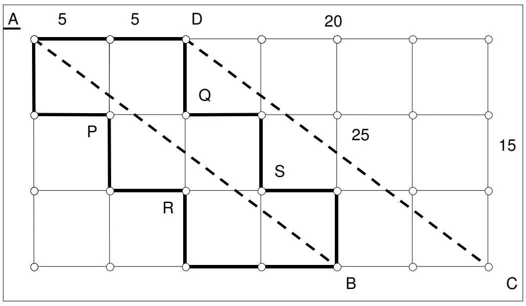


Beschreibung einer möglichen Schnittlinie (vgl. Parallelogramm ABCD in der Figur): Die Ecken der stumpfen Winkel werden durch eine Zick–Zacklinie mit 5 Abschnitten der Länge 5 verbunden, wobei jeder Streckenabschnitt mit dem vorhergehenden einen rechten Winkel einschließt.

1. Beweis: Es ist hinreichend (aber wahrscheinlich nicht notwendig) zu zeigen, dass man die beiden Teile wieder so zusammenfügen kann, dass das Netz eines Würfels entsteht, oder umgekehrt: dass es ein Netz eines Würfels gibt, das man in genau zwei Teile zerschneiden kann, die man ihrerseits zu dem gegebenen Parallelogramm zusammenfügen kann.

Wir bestimmen zuerst die Kantenlänge a des Würfels: Seine Oberfläche muss den gleichen Inhalt haben wie das Parallelogramm, d.h. es muss gelten $6a^2 = 25{\cdot}6$, also $a = 5$.

Nebenstehende Figur basiert auf einem quadratischen Gitter mit Kantenlänge 5. Es ist sofort einsichtig, dass darin die durch dicke Linien umrandete Figur das Netz eines Würfels mit Kantenlänge 5 darstellt.



Dieses zerschneiden wir entlang der Strecke AB in genau 2 Teile. Um zu zeigen, dass dies möglich ist, weisen wir nach, dass die Schnittlinie vollständig innerhalb des Netzes verläuft: Die Schnittlinie hat in einem gitterparallelen Koordinatensystem mit Ursprung A die Steigung $-\frac{3}{4}$; und da $-1 \le -\frac{3}{4} \le -\frac{2}{3} < -\frac{1}{2}$, schneidet die Schnittlinie die Strecken PQ, QR und RS.

Weiter ist offensichtlich, dass die beiden Schnittteile sich lückenlos und ohne Überschneidungen zu einem Parallelogramm ABCD zusammenfügen lassen, z.B. durch eine Parallelverschiebung des linken Schnittteils um 10 nach rechts; wenn wir diese Art des Zusammenfügens wählen, ist auch klar, dass wir tatsächlich ein Parallelogramm erhalten; die in der Aufgabe geforderte Schnittlinie für das Parallelogramm ABCD ist dann die "Treppe" von D nach B.

Es bleibt noch nachzuweisen, dass Parallelogramm ABCD die vorgegebenen Maße hat: Die Seite AD hat nach Konstruktion die Länge 10; die lange Seite AB hat nach Pythagoras die Länge $\sqrt{15^2+20^2} = 5\cdot\sqrt{3^2+4^2} = 25$. Die Höhe zwischen den langen Seiten berechnen wir über den Flächeninhalt: Es ist $A_{ABCD} = \overline{BC}\cdot h_{BC} = 10 \cdot 15 = 150 = \overline{AB} \cdot h_{AB} = 25 \cdot h_{AB}$, hieraus berechnet sich sofort $h_{AB} = 150 : 25 = 6$.

Das Parallelogramm ABCD hat also die gleichen Maße wie das vorgegebene Parallelogramm, damit ist der Beweis abgeschlossen.

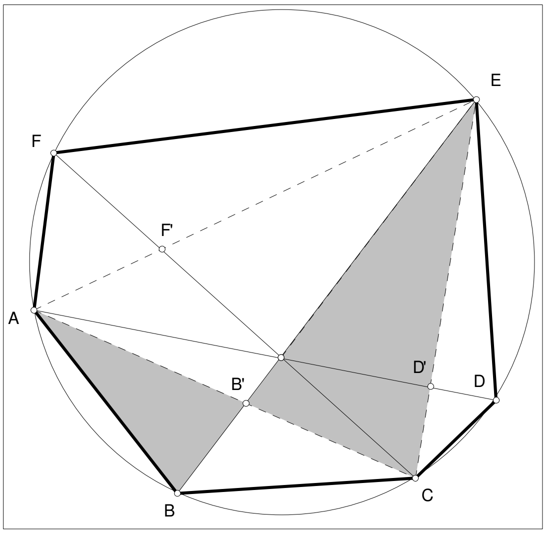
Aufgabe 3: Es sei ABCDEF ein konvexes Sechseck, dessen Ecken auf einem Kreis liegen. Für seine Seitenlängen gelte die Beziehung $\overline{AB}\cdot\overline{CD}\cdot\overline{EF} = \overline{BC}\cdot\overline{DE}\cdot\overline{FA}$.

Zeige, dass sich dann die Diagonalen AD, BE und CF in genau einem Punkt schneiden..

1. Beweis (mit Satz von Ceva): Wir betrachten das Dreieck ACE und in ihm die drei Transversalen AD, CF und EB. Deren Schnittpunkte mit den Seiten AC, CE und EA bezeichnen wir mit B', D' bzw. F'.

Die Dreiecke AB'B und EB'C sind ähnlich, da sie bei B' den gleichen Winkel haben (Scheitelwinkel), ebenso bei B bzw. bei C (Umfangswinkel über der gleichen Sehne AE im Umkreis des Sechsecks).

Damit gilt die Beziehung $\overline{AB'} = \overline{EB'}\cdot\dfrac{\overline{AB}}{\overline{EC}}$.



Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke CB'B und EB'A folgt analog $\overline{B'C} = \overline{EB'}\cdot\dfrac{\overline{BC}}{\overline{EA}}$.

Hieraus folgt nach Division

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{B'C}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}\cdot\frac{\overline{EA}}{\overline{CE}}$$

und zyklischem Vertauschen

$$\frac{\overline{CD'}}{\overline{D'E}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DE}}\cdot\frac{\overline{AC}}{\overline{EA}} \quad \text{sowie}$$

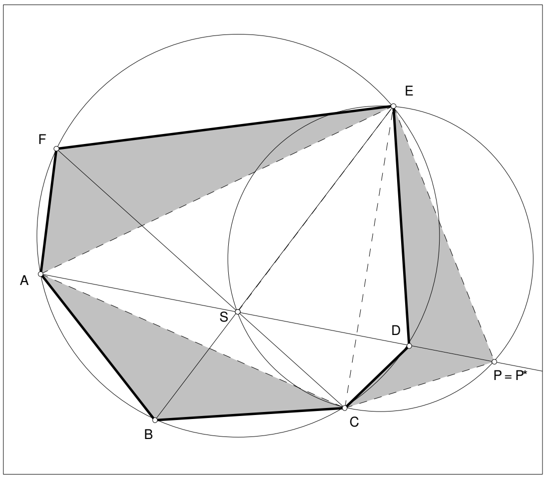
$$\frac{\overline{EF'}}{\overline{F'A}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{FA}}\cdot\frac{\overline{CE}}{\overline{AC}}.$$

Das Produkt der linken Seiten ist identisch mit dem Produkt der rechten Seiten, zusammen mit der Voraussetzung ergibt sich

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{B'C}}\cdot\frac{\overline{CD'}}{\overline{D'E}}\cdot\frac{\overline{EF'}}{\overline{F'A}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}\cdot\frac{\overline{EA}}{\overline{CE}}\cdot\frac{\overline{CD}}{\overline{DE}}\cdot\frac{\overline{AC}}{\overline{EA}}\cdot\frac{\overline{EF}}{\overline{FA}}\cdot\frac{\overline{CE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}\cdot\overline{EF}}{\overline{BC}\cdot\overline{DE}\cdot\overline{FA}} = 1.$$

Mit Satz von Ceva folgt, dass die drei Transversalen EB', AD' und CF' und damit die drei Diagonalen BE, AD und CF durch einen Punkt gehen. Dies war zu zeigen.

2. Beweis: Die Punkte A, B, C, D, E und F seien wie in der Voraussetzung angeordnet. Wir stellen zunächst fest, dass das Teilviereck ABCD ein Sehnenviereck ist und dass deswegen $\angle CBA = 180° - \angle ADC$, d.h. der äußere Teil der Halbgerade [AD schließt mit der Sehne CD den Winkel $\angle CBA$ ein.



Deswegen führt die Drehstreckung um C mit Streckfaktor $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{CB}}$ und Drehwinkel $\angle BCD$ nicht nur den Punkt B in den Punkt D über, sondern auch den Punkt A in einen Punkt P, der so auf der Geraden AD liegt, dass D zwischen A und P liegt. Insbesondere liegt P außerhalb des Umkreises des gegebenen Sechsecks.

Mit analoger Argumentation weisen wir nach, dass die Drehstreckung um E mit dem Streckfaktor $\dfrac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$ um den Winkel $\angle FED$ den Punkt F in den Punkt D überführt und den Punkt A in einen Punkt P*, der ebenfalls auf der Geraden AD so liegt, dass D zwischen P* und A liegt.

Unter Verwendung der Voraussetzung erhalten wir $\dfrac{\overline{DP}}{\overline{DP^*}} = \dfrac{\overline{AB}\cdot\dfrac{\overline{CD}}{\overline{BC}}}{\overline{FA}\cdot\dfrac{\overline{DE}}{\overline{EF}}} = \dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}\cdot\overline{EF}}{\overline{BC}\cdot\overline{DE}\cdot\overline{FA}} = 1$, d.h. die Punkte P und P* sind identisch.

Nun betrachten wir den Umkreis des Dreiecks ECP und dessen von P verschiedenen Schnittpunkt mit AD, den wir mit S bezeichnen. S liegt im Innern des Umkreises des vorgegebenen Sechsecks, also auf der Diagonalen AD. Dies verwenden wir zusammen mit mehrfacher Anwendung des Umfangswinkelsatzes und der Ähnlichkeit der Dreiecke CDP und CBA für die Schlussfolgerung

$$\angle SEC = \angle SPC = DPC = \angle BAC = \angle BEC,$$

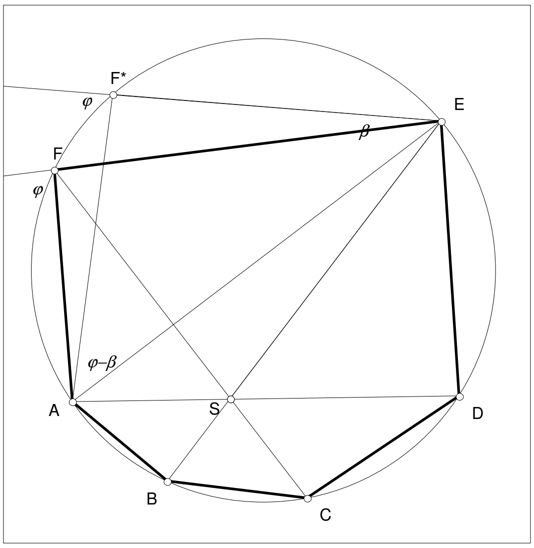
also sind die Geraden ES und EB identisch, d.h. S liegt auf der Diagonalen BE. Mit analoger Schlussweise folgern wir, dass S auf der Diagonalen CF liegt, damit ist der Beweis beendet.

3. Beweis: Wir zeigen zunächst die Umkehrung der Behauptung: Wenn in einem konvexen Sehnensechseck ABCDEF sich die Diagonalen in einem Punkt schneiden, dann gilt die Beziehung $\overline{AB}\cdot\overline{CD}\cdot\overline{EF} = \overline{BC}\cdot\overline{DE}\cdot\overline{FA}$.

Beweis: Der gemeinsame Schnittpunkt der Diagonalen sei mit S bezeichnet. Die Diagonalen teilen nun das Sechseck in Teildreiecke auf, von denen jeweils gegenüberliegende gleiche Innenwinkel haben und damit ähnlich sind: z.B. haben die Dreieck ASB und ESD bei S den gleichen Winkel (Scheitelwinkel), ebenso bei A bzw. E (Umfangswinkel über der Sehne BD); analog argumentieren wir für die Dreiecke BSC und FSE sowie FSA und DSC.

Damit gelten folgende Verhältnisgleichungen:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AS}}{\overline{ES}},\quad \frac{\overline{EF}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{ES}}{\overline{CS}} \text{ und } \frac{\overline{CD}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{CS}}{\overline{AS}}.$$



Das Produkt der rechten Seiten ist identisch mit dem Produkt der linken Seiten, d.h. es ergibt sich wie behauptet

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}\cdot\frac{\overline{EF}}{\overline{BC}}\cdot\frac{\overline{CD}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{AS}}{\overline{ES}}\cdot\frac{\overline{ES}}{\overline{CS}}\cdot\frac{\overline{CS}}{\overline{AS}} = 1.$$

Nun zum eigentlichen Beweis: Sei ABCDEF* ein konvexes Sechseck, dessen Ecken auf einem Kreis liegen und für dessen Seitenlängen die Beziehung $\overline{AB}\cdot\overline{CD}\cdot\overline{EF^*} = \overline{BC}\cdot\overline{DE}\cdot\overline{F^*A}$ (1) gelte; der Schnittpunkt der Diagonalen AD und BE sei mit S bezeichnet. Wir werden zeigen, dass dann F* auf der Geraden CS liegen muss.

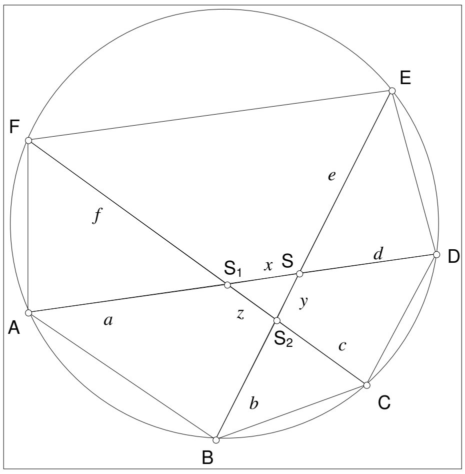
Sei F der Schnittpunkt der Halbgeraden [CS mit dem Umkreis des gegebenen Sechsecks. Dann gilt nach der oben bewiesenen Umkehrung die Beziehung $\overline{AB}\cdot\overline{CD}\cdot\overline{EF} = \overline{BC}\cdot\overline{DE}\cdot\overline{FA}$ (2). Die Quotienten aus den linken bzw. rechten Seiten von (1) und (2) sind also gleich, nach Kürzen erhalten wir $\dfrac{\overline{EF^*}}{\overline{EF}} = \dfrac{\overline{F^*A}}{\overline{FA}}$ und somit auch $\dfrac{\overline{EF^*}}{\overline{F^*A}} = \dfrac{\overline{EF}}{\overline{FA}}$.

Wir wissen, dass der Punkt F* irgendwo auf demjenigen Kreisbogen zwischen E und A liegt, der die übrigen Ecken nicht enthält. Seine Lage auf diesem Kreisbogen kann umkehrbar eindeutig beschrieben werden durch die Größe des Winkels $\beta := \angle F^*EA$, wobei $\beta \in\ ]0°,180°[$. Nach Umfangswinkelsatz ist die Größe des Winkels $\varphi := 180° - \angle AF^*E$, wobei $\varphi \in\ ]0°,180°[$, unabhängig von der Lage von F* auf diesem Kreisbogen, also hat im Dreieck AEF* der Winkel $\angle EAF^*$ die Weite $\varphi - \beta$. Somit gilt nach Sinussatz im Dreieck AEF* die Beziehung $\dfrac{\overline{EF^*}}{\overline{F^*A}} = \dfrac{\sin(\varphi-\beta)}{\sin(\beta)}$.

F* hat also auf dem Kreisbogen eine Lage, für die dieser Ausdruck den Wert von $\frac{\overline{EF}}{\overline{FA}}$ annimmt.

Die Funktion $f:\beta \mapsto \frac{\sin(\varphi-\beta)}{\sin(\beta)}$ hat die Ableitung $\frac{df(\beta)}{d\beta} = \frac{-\cos(\varphi-\beta)\sin(\beta)-\sin(\varphi-\beta)\cos(\beta)}{\sin^2(\beta)}$ $= \frac{-\sin(\beta+\varphi-\beta)}{\sin^2(\beta)} = \frac{-\sin(\varphi)}{\sin^2(\beta)}$. Da $\varphi \in\ ]0°,180°[$, ist dieser Ausdruck immer kleiner als 0 und somit die Funktion f streng monoton fallend in diesem Bereich. Damit nimmt dieser Ausdruck nur für genau ein β den Wert $\frac{\overline{EF}}{\overline{FA}}$ an, also kann F* nur die Lage von F einnehmen. Damit ist alles bewiesen.

4. Beweis: Der Schnittpunkt der Diagonalen AD und BE sei mit S bezeichnet, der Schnittpunkt der Diagonalen CF und AD mit S_1 und der Schnittpunkt der Diagonalen CF und BE mit S_2. Zu zeigen ist dann, dass die Punkte S, S_1 und S_2 zusammenfallen.



Eines der beiden Dreiecken ABS und EDS hat mit der Diagonalen FC keine gemeinsamen innere Punkte, o.B.d.A. sei dies Dreieck EDS (andernfalls ersetzen wir im folgenden die Bezeichnungen ABCDEF durch DEFABC; dies ändert nichts an der Voraussetzung $\overline{AB}\cdot\overline{CD}\cdot\overline{EF} = \overline{BC}\cdot\overline{DE}\cdot\overline{FA}$). Damit sind entweder S_1, S_2 und S identisch oder S_1 und S_2 liegen im Innern der Strecken SA bzw. SB. Die Längen der Strecken S_1S, S_2S und S_1S_2 seien mit x, y bzw. z bezeichnet, die Längen der Abschnitte auf den Diagonalen von jeder Ecke bis zum ersten Diagonalenschnittpunkt, also AS_1, BS_2, CS_2, DS, ES, FS_1, mit a, b, c, d, e und f. Es gilt dann $\overline{AS} = a + x$, $\overline{BS} = b + y$, $\overline{CS_1} = c + z$, $\overline{DS_1} = d + x$, $\overline{ES_2} = e + y$ und $\overline{FS_2} = f + z$.

Die Dreiecke ABS und EDS sind ähnlich, da sie in zwei Innenwinkeln übereinstimmen: Es ist $\angle$ASB = $\angle$ESD (Scheitelwinkel) und $\angle$BAS = $\angle$DES (Umfangswinkel über der gleichen Sehne BD). Mit analoger Begründung folgt, dass auch die Dreiecke FAS_1 und DCS_1 ähnlich sind, ebenso die Dreiecke BCS_2 und FES_2. Damit gelten folgende Verhältnisgleichungen:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{a+x}{e} = \frac{b+y}{d}, \quad \frac{\overline{EF}}{\overline{BC}} = \frac{e+y}{c} = \frac{f+z}{b}, \quad \frac{\overline{CD}}{\overline{FA}} = \frac{c+z}{a} = \frac{d+x}{f}.$$

Zusammen mit der Voraussetzung $\overline{AB}\cdot\overline{CD}\cdot\overline{EF} = \overline{BC}\cdot\overline{DE}\cdot\overline{FA}$ folgt sofort

$$1^2 = \left(\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}\right)^2\cdot\left(\frac{\overline{EF}}{\overline{BC}}\right)^2\cdot\left(\frac{\overline{CD}}{\overline{FA}}\right)^2 = \frac{a+x}{e}\cdot\frac{b+y}{d}\cdot\frac{e+y}{c}\cdot\frac{f+z}{b}\cdot\frac{c+z}{a}\cdot\frac{d+x}{f}$$
$$= \frac{a+x}{a}\cdot\frac{b+y}{b}\cdot\frac{e+y}{e}\cdot\frac{f+z}{f}\cdot\frac{c+z}{c}\cdot\frac{d+x}{d}.$$

Da alle Variablen in diesem Ausdruck nicht negativ sind, ist jeder der Brüche nicht kleiner als 1. Da zusätzlich das Produkt den Wert 1 hat, muss jeder Faktor den Wert 1 haben, hieraus folgt $x = y = z = 0$, d.h. es ist S = S_1 = S_2. Das war zu zeigen.

Bemerkung: Die "o.B.d.A.–Einschränkung" kann man ersetzen durch folgende Überlegung: Wenn – anders als in der Zeichnung – S_1 zwischen S und D liegt, liegt S_2 zwischen S und E und man hat $\overline{AS} = a - x$, $\overline{AS} = a - x$, $\overline{BS} = b - y$, $\overline{CS_1} = c - z$, $\overline{DS_1} = d - x$, $\overline{ES_2} = e - y$ und $\overline{FS_2} = f - z$. Obige Überlegung führt dann zu $1 = \frac{a\pm x}{a}\cdot\frac{b\pm y}{b}\cdot\frac{e\pm y}{e}\cdot\frac{f\pm z}{f}\cdot\frac{c\pm z}{c}\cdot\frac{d\pm x}{d}$, wobei in allen Brüchen stets das gleiche Rechenzeichen vorkommt. Damit sind in dem Produkt entweder alle Faktoren aus dem Intervall $[1,\infty[$ oder alle Faktoren aus dem Intervall $]0;1]$, woraus wieder folgt, dass $x = y = z = 0$.

Aufgabe 4: Im Pascalschen Dreieck sind in einfacher und übersichtlicher Weise die Binomialkoeffizienten angeordnet.

Wir wählen einen beliebigen dieser Binomialkoeffizienten aus, der nicht am rechten Rand des Dreiecks steht. Rechts von ihm stehen in der gleichen Zeile t Zahlen, die wir der Reihe nach mit a_1, a_2, ..., a_t benennen, wobei $a_t = 1$ die letzte Zahl in dieser Reihe ist. Geht man vom gleichen Binomialkoeffizienten parallel zum linken Rand schräg nach rechts oben, so stehen dort wiederum t Zahlen, die wir der Reihe nach mit b_1, b_2, ..., b_t benennen, wobei $b_t = 1$ ist.

Zeige, dass $b_t a_1 - b_{t-1} a_2 + b_{t-2} a_3 - ... + (-1)^{t-1} b_1 a_t = 1$ gilt.

Beispiel: Man erhält bei der Wahl von $\binom{4}{1} = 4$ die Werte $t = 3$, $a_1 = 6$, $a_2 = 4$, $a_3 = 1$ und $b_1 = 3$, $b_2 = 2$, $b_3 = 1$.

Vorbemerkung: Wir wählen uns den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ aus, er steht bekanntlich in der n–ten Zeile und in der k–ten Spalte, wobei Spalten als Parallelen zum linken Rand verstanden werden und die Zählung jeweils bei Null beginnt. Da er nicht am rechten Rand stehen soll, ist $k < n$ und $n \geq 1$. Es ist leicht einsichtig, dass dann $a_i = \binom{n}{k+i}$ und $b_i = \binom{k+i-1}{k}$ mit $i \in \{1, 2, ..., t := n-k\}$ ist; also ist die Gültigkeit folgender Aussage zu beweisen:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
.. ..

Für alle $n > 0$ und $k < n$ gilt: $$S(n,k) := \sum_{i=1}^{n-k}\left[(-1)^{i-1}\binom{n}{k+i}\cdot\binom{k+i-1}{k}\right] = 1.$$

1. Beweis (formales Rechnen; eigentlich vollständige Induktion): Bekanntlich ist jede Zahl im Pascaldreieck die Summe der beiden schräg rechts und schräg links über ihr stehenden Zahlen, wobei wir uns leere Stellen mit der Zahl 0 ausgefüllt denken; formal heißt dies, dass für alle ganzzahligen n, k die (auch aus dem Schulunterricht bekannte) Beziehung

$$\binom{n-1}{k+i-1} + \binom{n-1}{k+i} = \binom{n}{k+i} \text{ gilt; wobei } \binom{r}{s} = 0 \text{ für } s < 0 \text{ oder } s > r.$$

Weiter gilt für alle $s > 0$ die Gleichung $\sum_{i=0}^{s}\left[(-1)^i\cdot\binom{s}{i}\right] = 0$, was ebenfalls aus dem Unterricht bekannt ist, sich aber auch aus dem Konstruktionsprinzip des Pascal–Dreiecks schnell begründen lässt: Jede Zahl ist die Summe der beiden schräg rechts und schräg links über ihr stehenden Zahlen. Wenn wir also die Zahlen in der Zeile s abwechselnd addieren und subtrahieren, so erhalten wir das gleiche Ergebnis, wenn wir jede Zahl der darüberstehenden Zeile $s-1$ genau einmal addieren und einmal subtrahieren, d.h. wir erhalten den Wert 0. Diese beiden Identitäten führen zu

$$S(n,k) = \sum_{i=1}^{n-k}\left[(-1)^{i-1}\binom{n}{k+i}\cdot\binom{k+i-1}{k}\right] = \sum_{i=1}^{n-k}\left[(-1)^{i-1}\cdot\left(\binom{n-1}{k+i-1}+\binom{n-1}{k+i}\right)\cdot\binom{k+i-1}{k}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n-k}\left[(-1)^{i-1}\cdot\binom{n-1}{k+i-1}\cdot\binom{k+i-1}{k}\right] + \sum_{i=1}^{n-k}\left[(-1)^{i-1}\cdot\binom{n-1}{k+i}\cdot\binom{k+i-1}{k}\right].$$

$$= \sum_{i=1}^{n-k}\left[(-1)^{i-1}\cdot\frac{(n-1)!}{(k+i-1)!\cdot(n-k-i)!}\cdot\frac{(k+i-1)!}{k!\cdot(i-1)!}\cdot\frac{(n-1-k)!}{(n-1-k)!}\right] + \sum_{i=1}^{n-k}\left[(-1)^{i-1}\cdot\binom{n-1}{k+i}\cdot\binom{k+i-1}{k}\right].$$

In der zweiten Summe hat der letzte Summand $(-1)^{n-k-1}\cdot\underbrace{\binom{n-1}{n}}_{=0}\cdot\binom{n-1}{k}$ den Wert 0, kann also weggelassen werden. In der ersten Summe haben wir mit dem Faktor $(n-1-k)!$ erweitert, nach Ausklammern von drei der von i unabhängigen Faktoren und nach Kürzen erhalten wir

$$\ldots = \frac{(n-1)!}{k!}\cdot\frac{1}{(n-1-k)!}\sum_{i=1}^{n-k}\left[(-1)^{i-1}\cdot\frac{(n-1-k)!}{(n-k-i)!\cdot(i-1)!}\right] + \sum_{i=1}^{n-k-1}\left[(-1)^{i-1}\cdot\binom{n-1}{k+i}\cdot\binom{k+i-1}{k}\right]\ldots$$

$$= \frac{(n-1)!}{k!}\cdot\frac{1}{(n-1-k)!}\underbrace{\sum_{i=0}^{n-1-k}\left[(-1)^{i-1}\cdot\binom{n-1-k}{i}\right]}_{=0} + \sum_{i=1}^{n-k-1}\left[(-1)^{i-1}\cdot\binom{n-1}{k+i}\cdot\binom{k+i-1}{k}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n-k-1}\left[(-1)^{i-1}\cdot\binom{n-1}{k+i}\cdot\binom{k+i-1}{k}\right] \qquad = S(n-1,k).$$

Durch wiederholtes Anwenden analoger Gedankengänge erhalten wir so die Gleichungskette

$$S(n,k) = S(n-1,k) = S(n-2,k) = \ldots = S(k+1,k) = (-1)^0\cdot\binom{k}{k} = 1.$$

2. Beweis (kombinatorische Deutung der Binomialkoeffizienten): Anstatt die Gültigkeit der Aussage $S(n,k) = 1$ beweisen wir die Gültigkeit der äquivalenten Aussage

Für alle $n > 0$ und $k < n$ gilt: $$\sum_{\substack{i=1\\ i \text{ ungerade}}}^{n-k}\left[\binom{n}{k+i}\cdot\binom{k+i-1}{k}\right] - 1 = \sum_{\substack{i=1\\ i \text{ gerade}}}^{n-k}\left[\binom{n}{k+i}\cdot\binom{k+i-1}{k}\right].$$

Keine Beziehung zur gestellten Aufgabe scheint zunächst folgendes Färbungsproblem zu haben: Wähle aus der Menge $\{1, 2, ..., n\}$ in einem ersten Schritt $k + i$ zu färbende Zahlen aus und färbe die kleinste davon rot; wähle in einem zweiten Schritt von den restlichen $k + i - 1$ Zahlen dieser ersten Auswahl k Zahlen aus und färbe sie ebenfalls rot, färbe die restlichen $i - 1$ Zahlen der ersten Auswahl blau, alle anderen Zahlen lasse farblos. Ist bei einer solchen Färbung i gerade, so sprechen wir von einer *geraden* Färbung, ist i ungerade, sprechen wir von einer *ungeraden* Färbung.

Aus der Färbungsvorschrift folgt mit Zählprinzip und bekannten Formeln sofort: Die Anzahl solcher Färbungen ist $\binom{n}{k+i}\cdot\binom{k+i-1}{k}$.

Nach Vergleich dieses Terms mit den Summanden in der zu beweisenden Aussage erkennt man den Zusammenhang: Der geforderte Nachweis ist erbracht, wenn wir zeigen, dass – bei festem k – die Anzahl gerader Färbungen um 1 kleiner ist als die Anzahl der ungeraden Färbungen. Dies bewerkstelligen wir, indem wir aus der Menge der ungeraden Färbungen ein Element entfernen und dann nachweisen, dass wir die restlichen Färbungen zu Paaren zusammenstellen können, so dass jedes Paar aus einer geraden und einer ungeraden Färbung besteht und jede Färbung in genau einem Paar vorkommt.

Sei X die spezielle Färbung, bei der die $k + 1$ größten Zahlen aus der Menge $\{1, 2, ..., n\}$ rot gefärbt und keine Zahl blau gefärbt wurden. Bei dieser Färbung gilt $i = 1$, damit ist X eine ungerade Färbung, diese entfernen wir. Wir stellen fest, dass X die einzige Färbung ist, bei der alle Zahlen, die größer als die kleinste rot gefärbte Zahl sind, ebenfalls rot gefärbt sind.

Sei A nun eine von X verschiedenen Färbung. Dann enthält A eine Zahl, die nicht rot gefärbt ist und die größer als die kleinste rot gefärbte Zahl ist. Diese Zahl färben wir um: war sie farblos, wird sie blau, war sie blau, wird sie farblos. So erhalten wir auf eindeutige Art eine neue Färbung A' mit folgenden Eigenschaften:

A' ist verschieden von X: Die umgefärbte Zahl ist größer als die kleinste rote Zahl und nach dem Umfärben hat sie nicht die Farbe rot.

War A gerade, so ist A' ungerade, war A gerade, so ist A' ungerade: Die Zahl der blau gefärbten Zahlen wurde um genau 1 vergrößert oder verkleinert, damit wurde die Zahl i ebenfalls um genau 1 vergrößert oder verkleinert, damit wechselt i die Parität.

Wendet man auf die A' die gleiche Umfärbung an, so erhält man wieder A. Damit ist sichergestellt, dass A' nicht auch durch Umfärben einer von A verschiedenen Färbungen entstehen kann.

Nun stellen wir A und A' zu einem Paar zusammen; wenn wir auf die gleiche Weise mit den restlichen Färbungen verfahren, haben wir die Färbungen wie gefordert zu Paaren zusammengestellt.

Bemerkung: Dass im ersten Beweis bei der Umformung der $S(n,k)$ der erste Summand in der zweiten Zeile den Wert 0 hat, ist eine bemerkenswerter Zusammenhang, der als eigenes Lemma formuliert werden kann. Nach Indexverschiebung lautet es:

Für alle $k < n$ gilt: $$\sum_{i=0}^{n-k-1}\left[(-1)^i\cdot\binom{n-1}{k+i}\cdot\binom{k+i}{k}\right] = 0$$

3. Beweis (Deutung der Binomialkoeffizienten als Funktion einer reellen Variablen): Wie im ersten Beweis hergeleitet ist zu zeigen:

Für alle $n > 0$ und $k < n$ gilt: $$S(n,k) := \sum_{i=1}^{n-k}\left[(-1)^{i-1}\binom{n}{k+i}\cdot\binom{k+i-1}{k}\right] = 1.$$

Wir definieren für nicht–negative ganze k und reelle x die Funktion

$$B_k(x) := \frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-k+1)}{k!},$$

dabei habe das leere Produkt den Wert 1, d.h. $F_0(x) := 1$. Es ist dann offensichtlich $B_k(x)$ ein Polynom vom Grad k und für nicht–negative ganzzahlige x ist $B_k(x) = \binom{x}{k}$. Ferner können wir für nicht-negative ganzzahlige x folgendermaßen umformen:

$$\binom{x}{k} = \frac{x\cdot(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-k+1)}{k!} = (-1)^k\cdot\frac{\overbrace{(-x+k-1)\cdot(-x+k-2)\cdot\ldots\cdot(-x)}_{k\text{ Faktoren}}}{k!}$$
$$= (-1)^k\cdot B_k(-x+k-1).$$

Dies verwenden wir zusammen mit $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ für alle n, und $k \le n$ zur Berechnung der $S(n,k)$:

$$\begin{aligned}
S(n,k) &= \sum_{i=1}^{n-k}\left[(-1)^{i-1}\binom{n}{k+i}\cdot\binom{k+i-1}{k}\right]\\
&= \sum_{i=1}^{n-k}\left[\binom{n}{n-k-i}\cdot(-1)^{i-1}\binom{k+i-1}{i-1}\right]\\
&= \sum_{i=1}^{n-k}\left[\binom{n}{n-k-i}\cdot(-1)^{i-1}\cdot(-1)^{i-1}B_{i-1}(-(k+i-1)+(i-1)-1)\right]\\
&= \sum_{i=1}^{n-k}\left[\binom{n}{n-k-i}\cdot B_{i-1}(-k-1)\right] = \sum_{i=0}^{n-k-1}\left[\binom{n}{n-k-i-1}\cdot B_i(-k-1)\right]
\end{aligned}$$

Nun definieren wir eine neue Funktion $p(x) := \sum_{i=0}^{n-k-1}\left[\binom{n}{n-k-i-1}B_i(x)\right] - B_{n-k-1}(x+n)$, dies ist ein Polynom der reellen Variablen x, dessen Grad sicher nicht größer ist als $n-k-1$.

Für alle natürlichen Zahlen x gilt aber

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n-k-1}\left[\binom{n}{n-k-i-1}\cdot\binom{x}{i}\right] - \binom{x+n}{n-k-1} = 0,$$

was man leicht kombinatorisch beweisen kann: der Ausdruck $\binom{x+n}{n-k-1}$ steht für die Anzahl der Möglichkeiten, $n-k-1$ Objekte aus $x+n$ Objekten auszuwählen, ebenso wie der Ausdruck mit dem Summenzeichen, der diese Auswahl aufspaltet in eine Auswahl von $n-k-i-1$ Objekten aus der "unteren Teilmenge" von $(n-k-1)-i$ Objekten und einer Auswahl von i Objekten aus der "oberen Teilmenge" von x Objekten, und nun über alle i von 0 bis $n-k-1$ aufsummiert.

Damit hat $p(x)$ unendlich viele Nullstellen, es gilt somit schärfer $p(x) = 0$ für alle reellen x. Insbesondere ist

$$\begin{aligned} 0 &= p(-k-1) = \sum_{i=0}^{n-k-1}\left[\binom{n}{n-k-i-1}B_i(-k-1)\right] - B_{n-k-1}(-k-1+n) \\ &= S(n,k) - \binom{n-k-1}{n-k-1} = S(n,k) - 1, \end{aligned}$$

hieraus folgt sofort $S(n,k) = 1$.