BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK
Bildung & Begabung

Aufgaben und Lösungen

1. Runde 2014

Über Kommentare und Ergänzungen zu diesen Lösungsbeispielen freuen wir uns!

» **KORREKTURKOMMISSION | KARL FEGERT**

» **BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK**

Kortrijker Straße 1, 53177 Bonn | Postfach 20 02 01, 53132 Bonn | Tel.: (02 28) 9 59 15-20, Fax: (02 28) 9 59 15-29
info@bundeswettbewerb-mathematik.de, www.bundeswettbewerb-mathematik.de

Stand: 15. Mai 2014

GEFÖRDERT VOM

Bundesministerium für Bildung und Forschung

Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft

Aufgabe 1: Anja soll 2014 ganze Zahlen an die Tafel schreiben und dabei erreichen, dass zu je drei dieser Zahlen auch deren arithmetisches Mittel eine der 2014 Zahlen ist.

Beweise, dass dies nur gelingt, wenn sie lauter gleiche Zahlen schreibt.

Bezeichnungen: Eine Beschriftung der Tafel mit 2014 Zahlen, bei der alle Zahlen ganzzahlig sind und bei der zu je drei Zahlen auch das arithmetische Mittel dieser drei Zahlen an der Tafel steht, nennen wir *zulässig*.

1. Beweis (durch Widerspruch): Wir nehmen an, es gäbe eine zulässige Beschriftung der Tafel mit Zahlen, die nicht alle gleich sind. Dann gibt es mindestens ein Paar verschiedener Zahlen; und unter allen diesen Paaren ein Paar a_1 und a_2 mit minimalem positivem Abstand $d := |a_2 - a_1| > 0$.

Nun betrachten wir zwei beliebige weitere Zahlen a_3 und a_4 dieser Beschriftung und die beiden arithmetischen Mittel $m_1 := \frac{a_1+a_3+a_4}{3}$ und $m_2 := \frac{a_2+a_3+a_4}{3}$. Diese stehen beide an der Tafel; und weil $a_1 \neq a_2$, sind sie sicher verschieden, und für ihre Differenz gilt im Widerspruch zur Annahme

$$0 < |m_2 - m_1| = \left|\frac{(a_2+a_3+a_4)-(a_1+a_3+a_4)}{3}\right| = \frac{|a_2-a_1|}{3} = \frac{d}{3} < d.$$

2. Beweis (durch Widerspruch): Wir nehmen an, es gäbe eine zulässige Beschriftung der Tafel mit 2014 Zahlen, die nicht alle gleich sind. Nun unterscheiden wir 2 Fälle:

Fall 1: Es gibt eine Zahl a, die zwei Mal an der Tafel steht. Nach Voraussetzung gibt es an der Tafel eine weitere, von a verschiedene Zahl b. Nun betrachten wir die Folge der Zahlen m_i ($i = 1, 2, 3, \ldots$), die folgendermaßen definiert ist: Es sei $m_1 = \frac{a+a+b}{3}$, und für $i \geq 1$ sei $m_{i+1} = \frac{a+a+m_i}{3}$. Diese Zahlen haben folgende Eigenschaften:

(1) Sie stehen alle an der Tafel: Da a zwei Mal und b ein Mal an der Tafel steht, muss m_1 ebenfalls an der Tafel stehen; und wenn m_i an der Tafel steht, dann auch m_{i+1}.

(2) Sie sind alle verschieden: Es ist $m_1 = \frac{a+a+b}{3} = a + \frac{1}{3}(b-a)$, und

$$m_{i+1} = a+\frac{1}{3}(m_i - a) = a+\frac{1}{3}\left(a+\frac{1}{3}(m_{i-1}-a)-a\right) = a+\frac{1}{3^2}(m_{i-1}-a) = \ldots =$$

$a+\frac{1}{3^{i+1}}(b-a)$; hieraus folgt sofort die Verschiedenheit.

Damit müssen mehr als 2014 Zahlen an der Tafel stehen (oder irgendwann ein m_i, das nicht ganzzahlig ist), was (beides) der Aufgabenstellung widerspricht.

Fall 2: Keine zwei Zahlen an der Tafel sind gleich: Wir betrachten beliebige 4 Zahlen an der Tafel, sie seinen entsprechend ihrer Größe mit $a < b < c < d$ bezeichnet. Zusätzlich betrachten wir die 4 arithmetischen Mittel, die aus je 3 von ihnen gebildet werden können, nämlich $m_d = \frac{a+b+c}{3}$, $m_c = \frac{a+b+d}{3}$, $m_b = \frac{a+c+d}{3}$ und $m_a = \frac{b+c+d}{3}$. Jede dieser vier Zahlen muss an der Tafel stehen, weil sie arithmetisches Mittel von drei an der Tafel stehenden Zahlen ist; ferner gilt $a < m_d < m_c < m_b < m_a < d$. Evtl. können zwei dieser Mittel mit b bzw. c übereinstimmen; mindestens die restlichen beiden sind aber noch zusätzlich im Intervall $]\,a\,;d\,[$. Damit müssen im Intervall $]\,a\,;d\,[$ nicht nur die Zahlen b und c stehen, sondern noch mindestens zwei weitere, also mindestens vier. Mit analoger Schlussweise konstruieren wir nun zwei weitere Zahlen, die im kleineren Intervall $]\,m_a\,;m_d\,[$ liegen. Diese Konstruktion von neuen Zahlen können wir beliebig oft wiederholen; irgendwann stehen mehr als 2014 Zahlen an der Tafel, was wieder einen Widerspruch darstellt.

Variante (im Wesentlichen gleiche Abfolge der Argumente): Wir nehmen an, es gäbe eine Beschriftung der Tafel mit 2014 Zahlen, die nicht alle gleich sind. Wir ordnen die Zahlen der Größe nach und benennen sie in dieser Reihenfolge mit a_1, a_2, ..., a_{2014}; d.h. es ist $a_1 \le a_2 \le a_3 \le ... \le a_{2013} \le a_{2014}$, zusätzlich ist $a_1 < a_{2104}$. Nun unterscheiden wir zwei Fälle:

Fall 1: $a_1 = a_2$. Mit b bezeichnen wir die kleinste Zahl mit $b > a_2$; diese existiert, weil nicht alle Zahlen an der Tafel gleich sind. Dann steht sicher keine Zahl aus dem offenen Intervall $]a_2 ; b[$ an der Tafel. Im Widerspruch hierzu gilt für das arithmetische Mittel $m_b := \frac{a_1+a_2+b}{3}$ sicher $a_1 = a_2 < m_b < b$.

Fall 2: $a_1 < a_2$. Dann muss das arithmetische Mittel $m_3 := \frac{a_1+a_2+a_3}{3}$ eine der Zahlen a_1, a_2 oder a_3 sein; und weil $a_1 < a_2$ ist, muss $a_1 < m_3 < a_3$ sein. Hieraus folgt sofort $m_3 = a_2$ und weiter $a_3 = a_2 + (a_2 - a_1) > a_2$. Nun aber gibt es für a_4 Bedingungen, die nicht gleichzeitig erfüllt werden können: Die arithmetischen Mittel $m_4 := \frac{a_1+a_2+a_4}{3}$ und $m_5 := \frac{a_2+a_3+a_4}{3}$ sind beide kleiner als a_4 und beide größer als a_1, sie müssen beide schon an der Tafel stehen und es gilt wegen $a_1 < a_2 < a_3$ auch $m_4 < m_5$. Damit ist festgelegt, dass $m_4 = a_2$ (*) und $m_5 = a_3$ (**). Aus (*) folgt $a_4 = a_3$, aus (**) folgt im Widerspruch dazu $a_4 > a_3$.

3. Beweis (Betrachtung der Dreierreste): Wir betrachten 2014 Zahlen $a_1, a_2, ..., a_{2014}$ an der Tafel und ihre Reste r_i bei Division durch 3; d.h. ihre eindeutige Darstellung in der Form $a_i = 3 \cdot b_i + r_i$ mit geeignetem ganzzahligem b_i und einem $r_i \in \{0, 1, 2\}$. Es gibt drei mögliche Reste, aber mehr als drei Zahlen an der Tafel, also gibt es zwei Zahlen, die den gleichen Dreierrest habe; o.B.d.A. seien dies a_1 und a_2, für die $r_1 = r_2$. Nun unterscheiden wir zwei Fälle:

Fall 1: Es gibt eine Zahl (o.B.d.A seid dies a_3), die einer anderen Restklasse angehört. Es ist also $r_3 \ne r_1$, also auch $a_3 \ne a_1$. Dann ist das arithmetische Mittel aus a_1, a_2 und a_3, nämlich $m = \frac{a_1+a_2+a_3}{3} = b_1+b_2+b_3 + \frac{2r_1+r_3}{3}$ niemals eine ganze Zahl, weil $2r_1 + r_3$ niemals den Wert 0 oder 3 oder 6 annimmt, wenn man für r_1 und r_3 verschiedene Zahlen aus der Menge {0, 1, 2} einsetzt. Damit liegt keine zulässige Beschriftung vor.

Fall 2: Es gibt keine Zahl, die einer anderen Restklasse angehört, d.h. für alle i ist $a_i = 3 \cdot b_i + r$ für das gleiche $r \in \{0, 1, 2\}$. Nun betrachten wir das arithmetische Mittel aus drei beliebig ausgewählten Zahlen a_u, a_v, a_w mit verschiedenen Indices, nämlich $m_{uvw} = \frac{a_u+a_v+a_w}{3} = b_u+b_v+b_w + r$. Die Zahlen an der Tafel können nur dann eine zulässige Beschriftung darstellen, wenn die Zahl m_{uvw} für jede Auswahl von u, v und w eine der Zahlen an der Tafel ist; notwendig dafür ist nach Annahme der Fallunterscheidung, dass m_{uvw} ebenfalls den Rest r hat, d.h. dass $b_u+b_v+b_w$ für jede Auswahl von verschiedenen Indices u, v und w eine durch 3 teilbare Zahl ist. Es gibt mehr als 3 solche Zahlen b_i, damit ist dies aber nur möglich, wenn alle b_i den gleichen Dreierrest haben (ähnliche Argumentation wie in Fall 1). Einfache Rechnung zeigt nun, dass dann alle a_i den gleichen Rest bei Division durch $9 = 3^2$ lassen. Nun wiederholen wir unsere Überlegungen: es ist $a_i = 9 \cdot c_i + r'$; das Mittel m_{uvw} muss wieder von dieser Form sein, d.h. $m_{uvw} = 3(c_u + c_v + c_w) + r'$ und wieder muss $c_u + c_v + c_w$ für jede Auswahl von verschiedenen Indices durch 3 teilbar sein, es folgt, dass alle Zahlen a_i den gleichen Rest bei Division durch 3^3 haben.

Wiederholungen dieser Überlegung ergeben nach endlich vielen Schritten, dass die Beschriftung nur dann zulässig sein kann, wenn alle a_i den gleichen Rest bei Division durch 3^k haben, wobei 3^k größer als alle $|a_i|$ ist. Dies ist aber nur möglich, wenn alle a_i gleich sind.

Variante des 3. Beweises: Wir betrachten eine beliebige zulässige Beschriftung der Tafel mit 2014 Zahlen. Hieraus konstruieren wir eine neue Beschriftung nach folgender Vorschrift: Wir subtrahieren irgendeine der Zahlen an der Tafel (z.B. die kleinste) von jeder der 2014 Zahlen. Wenn dann nicht alle Zahlen den Wert 0 haben, dividieren anschließend jede der Zahlen durch die höchste gemeinsame Dreierpotenz aller 2014 Zahlen. (Wir ersetzen also jede Zahl a_i der ursprünglichen Beschriftung durch die Zahl $b_i := \frac{a_i - a_1}{p}$, wobei a_1 die gewählte Zahl und p die höchste gemeinsame Dreierpotenz aller $a_k - a_1$ ist.)

Nach dieser Operation stehen wieder 2014 Zahlen an der Tafel, mindestens eine der Zahlen ist die Null (in unserem Beispiel wieder die kleinste), jede Zahl ist ganz, und entweder sind alle anderen Zahlen ebenfalls Null (nämlich genau dann, wenn ursprünglich alle Zahlen gleich waren) oder mindestens eine der anderen Zahlen ist nicht durch drei teilbar. Es gilt nun folgender Hilfssatz (Beweis unten):

HS: Diese neue Beschriftung der Tafel ist genau dann zulässig, wenn die ursprüngliche Beschriftung zulässig ist.

Nach diesem Hilfssatz genügt es also zu zeigen, dass eine Beschriftung der Tafel, die eine Zahl $a_1 = 0$ und eine nicht durch 3 teilbare Zahl a_2 enthält, nicht zulässig sein kann. Hierzu betrachten wir zu a_1 und a_2 zwei beliebige andere Zahlen an der Tafel, sie seien mit a_3 und a_4 bezeichnet.

Das arithmetische Mittel $\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}$ ist genau dann eine ganze Zahl, wenn die Summe der Dreierreste von a_1, a_2 und a_3 ein Vielfaches von 3 ist. Da die Zahl a_1 den Dreierrest 0 hat und die Zahl a_2 den Dreierrest 1 oder 2, ist dieses arithmetische Mittel genau dann eine ganze Zahl, wenn die Summe der Dreierreste der Zahlen a_2 und a_3 ein Vielfaches von 3 ist, d.h. wenn eine der beiden Zahlen a_2 und a_3 den Dreierrest 1 hat und die andere den Dreierrest 2.

Entsprechendes gilt aber auch für das arithmetische Mittel $\frac{a_1 + a_2 + a_4}{3}$, d.h. es ist genau dann ganzzahlig, wenn von den beiden Zahlen a_2 und a_4 die eine den Dreierrest 1 und die andere den Dreierrest 2 hat. Dann haben aber die Zahlen a_3 und a_4 den gleichen, von Null verschiedenen Dreierrest und die Summe der Dreierreste von a_2, a_3 und a_4 ist entweder $1 + 2 + 2 = 5$ oder $2 + 1 + 1 = 4$, in jedem Fall kein Vielfaches von 3. Also ist das arithmetische Mittel $\frac{a_2 + a_3 + a_4}{3}$ keine ganze Zahl, gehört also nicht zu einer zulässigen Beschriftung.

Beweis des Hilfssatzes: Mit den Bezeichnungen von oben wird jede Zahl a_i durch die Zahl $b_i := \frac{a_i - a_1}{p}$ ersetzt. Insbesondere ist für alle i die Zahl p ein Teiler von $a_i - 1$; damit ist b_i eine ganze Zahl. Und falls $\frac{a_r + a_s + a_t}{3} = a_k$, ist auch das arithmetische Mittel

$$\frac{b_r + b_s + b_t}{3} = \frac{\frac{a_r - a_1}{p} + \frac{a_s - a_1}{p} + \frac{a_t - a_1}{p}}{3} = \frac{\frac{a_r + a_s + a_t}{3} - \frac{3a_1}{3}}{p} = \frac{a_k - a_1}{p} = b_k$$

wieder eine ganze Zahl. Beide Schlüsse sind umkehrbar.

4. Beweis (durch Widerspruch): Wir nehmen an, dass es eine zulässige Beschriftung mit mindestens zwei verschiedenen Zahlen gibt.

Wir bezeichnen die dabei verwendeten Zahlen der Größe nach geordnet mit $a_1, a_2, ..., a_{2014}$; d.h. es ist $a_1 \le a_2 \le a_3 \le ... \le a_{2013} \le a_{2014}$ und $a_1 < a_{2014}$.

Da mindestens zwei Zahlen an der Tafel verschieden sind, gibt es einen Index k, sodass unter den drei Zahlen a_k, a_{k+1} und a_{k+2} ($1 \le k \le 2012$) wenigstens zwei verschieden sind. Zusätzlich betrachten wir das arithmetische Mittel dieser drei Zahlen $A_k := {}^1/_3(a_k + a_{k+1} + a_{k+2})$. Da $a_k \le a_{k+1} \le a_{k+2}$ und gleichzeitig $a_k < a_{k+2}$ gilt, ist $a_k < A_k < a_{k+2}$. Da die Zahlen a_i der Größe nach geordnet sind und nach Bedingung der Aufgabe A_k eine der Zahlen a_i sein muss, bleibt als einzige Möglichkeit $A = a_{k+1}$; hieraus folgt über ${}^1/_3(a_k + a_{k+1} + a_{k+2}) = a_{k+1}$ sofort $a_{k+1} = {}^1/_2(a_k + a_{k+2})$ und damit $a_{k+2} = a_k + 2(a_{k+1} - a_k)$; d.h. die Abstände zwischen den Zahlen a_k und a_{k+1} sowie zwischen a_{k+1} und a_{k+2} sind gleich. Insbesondere gilt auch $a_k < a_{k+1} < a_{k+2}$; d.h. keine zwei der Zahlen a_k, a_{k+1} und a_{k+2} sind gleich. So können wir obige Überlegung für die Zahlen a_{k+1}, a_{k+2} und a_{k+3} und auch für a_{k-1}, a_k und

a_{k+1} wiederholen (soweit die dabei auftretenden Indices nicht kleiner als 1 oder größer als 2014 werden). Wiederholtes Anwenden dieser Schlussweise führt zum Zwischenergebnis, dass die a_i eine arithmetische Reihe bilden mit $a_i = a_1 + (i-1)d$ für ein geeignetes positives ganzzahliges $d := a_{k+1} - a_k$.

Nun betrachten wir die Zahlen a_1, a_2 und a_4 und ihr arithmetisches Mittel $A := \frac{a_1 + a_2 + a_4}{3} = a_1 + {}^4/_3 d$, diese Zahl steht aber nicht an der Tafel; damit ist der gewünschte Widerspruch konstruiert.

5. Beweis: Wir ordnen die Zahlen an der Tafel der Größe nach und bezeichnen sie mit $a_1, a_2, ..., a_{2014}$, d.h. es ist $a_1 \le a_2 \le a_3 \le ... \le a_{2013} \le a_{2014}$.

Nun betrachten wir die 2012 arithmetischen Mittel $M_k := \frac{a_1 + a_k + a_{2014}}{3}$ mit $2 \le k \le 2013$. Die Ordnung der a_k der Größe nach bewirkt eine Ordnung der M_k der Größe nach; d.h. für $a_i < a_j$ gilt $M_i < M_j$ und es gilt $a_1 \le M_2 \le M_3 \le ... \le M_{2012} \le M_{2013} \le a_{2014}$.

Wir nehmen nun an, es gäbe zwei verschiedene Zahlen unter den a_i. Dann ist $a_1 < a_{2014}$ und es gilt schärfer $a_1 < M_2 \le M_3 ... \le M_{2012} \le M_{2013} < a_{2014}$.

Nach Voraussetzung hat jedes M_i den Wert irgendeines a_j. Weil sowohl die a_i als auch die M_i nach Größe ihrer Indices geordnet sind, bleibt nur die Zuordnung $a_k = M_k$ für $2 \le k \le 2013$.

Für $2 \le i \le j \le 2013$ ist dann aber $a_i - a_j = M_i - M_j = \frac{a_1 + a_i + a_{2014}}{3} - \frac{a_1 + a_j + a_{2014}}{3} = \frac{a_i - a_j}{3}$, was nur erfüllt sein kann, wenn $a_i - a_j = 0$. Als Zwischenergebnis haben wir somit $a_i = a_j$ für $2 \le i,j \le 2013$.

Wäre nun noch $a_1 < a_2$, so wäre $a_1 < \frac{a_1 + 2a_2}{3} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} < \frac{3a_2}{3} = a_2$, d.h. das arithmetische Mittel der Zahlen a_1, a_2 und a_3 läge zwischen den Zahlen a_1 und a_2. Dies kann aber nicht sein, weil es eine der Zahlen a_i sein muss, aber keine solche Zahl zwischen a_1 und a_2 liegt. Analog führt man $a_{2013} < a_{2014}$ zum Widerspruch.

Bemerkung: Wesentlich für alle Beweise ist die Tatsache, dass an der Tafel mehr als drei Zahlen stehen. Für drei Zahlen ist eine zulässige Beschriftung möglich, z. B. 1, 2 und 3.

Die Aussage bleibt gültig, wenn man in der Aufgabenstellung "ganze Zahlen" durch "rationale Zahlen" ersetzt. Allerdings können dann einige Beweisvarianten nicht mehr verwendet werden.

Aufgabe 2: Die 100 Ecken eines Prismas, dessen Grundfläche ein 50–Eck ist, werden in beliebiger Reihenfolge mit den Zahlen 1, 2, 3, ... , 100 nummeriert.

Beweise, dass es zwei Ecken gibt, die durch eine Kante des Prismas verbunden sind und deren Nummern sich um höchstens 48 unterscheiden.

Bezeichnungen: Ecken, die durch eine Kante des Prismas verbunden sind, nennen wir *benachbarte Ecken*.

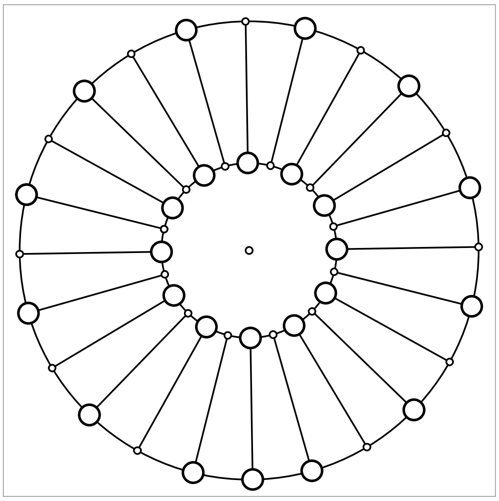
Bemerkung: Es gilt folgende verallgemeinerte Aussage:

Für geradzahliges n gilt: Werden die $2n$ Ecken eines Prismas mit n – eckiger Grundfläche mit den Zahlen 1, 2, 3, ..., $2n$ durchnummeriert, so gibt es stets ein Paar von Ecken, die durch eine Kante verbunden sind und deren Nummern sich um weniger als $n - 1$ unterscheiden.

Die folgenden Beweise lassen sich leicht zu einer Begründung hierfür umformulieren (Ersetzen von 50 durch n etc.). Weiter kann man leicht zeigen, dass es für ungeradzahliges n stets eine Nummerierung gibt, bei der sich die Nummern benachbarter Ecken stets um mindestens $n - 1$ unterscheiden.

1. Beweis (durch Widerspruch): Wir nehmen an, es gebe eine Nummerierung, bei der sich die Nummern benachbarter Ecken immer um mindestens 49 unterscheiden.

In der gegebenen Nummerierung bezeichnen wir Ecken als *klein*, wenn ihre Nummer aus der Menge der 49 "kleinen" Zahlen K := {1, 2, ..., 49} ist; und die restlichen Ecken, d.h. Ecken mit Nummern aus der Menge der restlichen 51 "großen" Zahlen G := {50, 51, 52, 53, ..., 100} bezeichnen wir als *groß*. Nebenstehende Figur zeigt den von den Ecken und Kanten des Prismas erzeugten Graphen, wobei die im folgenden Text hergeleitete Verteilung der großen und kleine Ecken durch große bzw. kleine Markierungen angezeigt wird. (Um die Figur übersichtlich zu halten, wurde anstelle eines 50–Ecks ein 24–Eck als Grund– und Deckfläche gezeichnet; die getroffenen Aussagen gelten in gleicher Weise, da in der Argumentation nur darauf Bezug genommen wird, dass 24 bzw. 50 beide gerade Zahlen sind.)



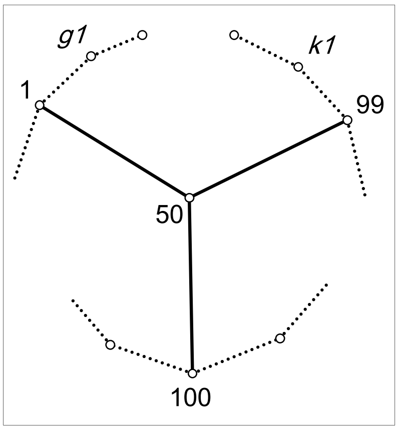
Offensichtlich ist die Differenz zweier Nummern aus K stets kleiner als 49; aus der Annahme folgt damit, dass es keine benachbarten Ecken gibt, die beide klein sind.

Jede Ecke des Prismas ist entweder Ecke der 50–eckigen Deckfläche oder Ecke der 50–eckigen Bodenfläche. Eine dieser beiden Flächen enthält mindestens die Hälfte der kleinen Ecken, o.B.d.A. sei dies die Deckfläche (in nebenstehendem Graph die innere Fläche). Da es 49 kleine Ecken gibt, hat die Deckfläche mindestens $\left\lceil \frac{49}{2} \right\rceil = 25$ kleine Ecken; und da keine zwei benachbarten Ecken klein sein können und 50 eine gerade Zahl ist, sind die 50 Ecken der Deckfläche abwechselnd klein und groß. Die Deckfläche enthält somit genau 25 kleine Ecken, die Grundfläche demnach $49 - 25 = 24$ kleine Ecken.

Nun ist jede der 50 Ecken der Grundfläche (also der Ecken auf dem äußeren Kreis) mit genau einer Ecke der Deckfläche über eine Kante verbunden, und zwar abwechselnd mit einer großen und einer kleinen Ecke. Diejenigen 25 Ecken der Grundfläche, die Nachbarn einer kleinen Ecke der Deckfläche sind, können keine kleinen Ecken sein. Also sind von den 25 Ecken der Grundfläche, die mit großen Ecken der Deckfläche verbunden, sind, genau 24 kleine Ecken. Damit gibt es in der Grundfläche ebenfalls abwechselnd kleine und große Ecken mit einer Ausnahme, bei der drei aufeinander folgende Ecken groß sind (in der Figur unten im äußeren Kreis). Die mittlere von diesen drei großen Ecken ist zu keiner kleinen Ecke benachbart, alle anderen großen Ecken des Prismas sind Nachbarn von mindestens 2 kleinen Ecken. Es gibt im Prisma also keine große Ecke, die zu genau einer kleinen Ecke und zwei großen Ecken benachbart ist.

Die Ecke mit der Nummer 50 müsste aber eben diese Eigenschaft haben, da sie eine große Ecke ist, die – wie man leicht nachrechnet – keine anderen Nachbarn als die kleine Ecke 1 und die großen Ecken 99 und 100 haben kann. Damit ist der gewünschte Widerspruch erzielt.

2. Beweis (durch Widerspruch): Zunächst stellen wir fest, dass jede Ecke des Prismas mit genau 3 anderen Ecken über eine Kante verbunden ist und dass zwei Kanten des Prismas, die von der gleichen Ecke ausgehen, entweder beide Kanten des gleichen Vierecks ("Mantelfläche") sind oder beide Kanten des gleichen 50–Ecks ("Grund– oder Deckfläche") sind.



Wir nehmen nun an, es gebe eine Nummerierung, bei der sich bei keinen benachbarten Ecken die Nummern um höchstens 48 unterscheiden, d.h. wir nehmen an, dass es eine Nummerierung gibt, bei der sich die Nummern benachbarter Ecken immer um mindestens 49 unterscheiden.

Wir zerlegen die Menge {1, 2, 3, ..., 100} in die Teilmenge der "kleinen" Zahlen K := {1, 2, ..., 49}, die Teilmenge der "großen" Zahlen G := {51, 52, ..., 100} und die Restmenge {50}.

Nun betrachten wir die Ecke mit der Nummer 50. Ihre drei Nachbarecken tragen die Nummern 1, 99 und 100, weil diese drei Zahlen die einzigen Zahlen aus der Menge {1, 2, 3, ..., 49, 51, ..., 99, 100} sind, die sich von 50 um mindestens 49 unterscheiden.

Von dieser Ecke 50 gehen genau drei Kanten aus; je zwei dieser drei Kanten gehören zu genau einer der Seitenflächen des Prismas. Wir betrachten diejenige Seitenfläche, die durch die beiden Kanten 1 – 50 und 50 – 99 bestimmt ist. Diese Fläche hat in jedem Fall eine gerade Anzahl von Begrenzungskanten und auch eine gerade Anzahl von Ecken (nämlich 50, wenn es eine Grund– oder Deckfläche ist, und 4, wenn es eine Mantelfläche ist). Zwischen den Ecken mit der Nummer 1 und 99 gibt es in der einen Richtung genau eine Ecke (nämlich die Ecke mit der Nummer 50), in der anderen entsprechend der Unterscheidung in zwei Fälle von oben entweder 50 – 2 – 1 = 47 oder 4 – 2 – 1 = 1 Ecken; dies ist in beiden Fällen eine ungerade Zahl. Weil die Ecke mit der Nummer 100 sicher nicht Ecke dieses Kantenzuges ist, hat jede dieser Ecken eine Nummer aus K oder aus G \ {100}.

Nun ist aber die Differenz zweier beliebiger Zahlen aus K sicher kleiner als 49, ebenso die Differenz zweier beliebiger Zahlen aus G \ {100}. Hieraus folgt, dass die Nummerierungen abwechselnd mit einer Zahl aus K und einer Zahl aus G \ {100} erfolgen muss. Da 1 aus der Menge K und 99 aus der Menge G ist, kann dies aber nur dann geschehen, wenn sich zwischen der Ecke 1 und der Ecke 99 eine gerade Anzahl von Ecken befindet. Dies ist aber nicht der Fall und somit ist der gewünschte Widerspruch gezeigt.

3. Beweis (durch Widerspruch): Wir nehmen an, es gebe eine Nummerierung, bei der sich die Nummern benachbarter Ecken immer um mindestens 49 unterscheiden.

Wir betrachten die Ecken mit der Nummer 49 und 50. Wie man leicht nachrechnet, kann man für die drei Nachbarecken von 49 nur eine der Nummern 98, 99 und 100 wählen, für die Nachbarecken von 50 nur eine der Nummern 1, 99 und 100. Da die Ecken 49 und 50 jeweils 3 Nachbarecken haben, müssen jeweils diese drei Nummern auch auf diese Nachbarecken verteilt werden. Umgekehrt heißt dies, dass die Ecke 100 zwei Nachbarecken mit den Nummern 50 und 49 hat, ebenso die Ecke 99. Hieraus folgt wiederum, dass das Prisma eine Seitenfläche hat, die ein Viereck ist, dessen Ecken die Nummern 50 – 99 – 49 – 100 haben, und zwar in dieser Reihenfolge. Zusätzlich folgt, dass die dritte Nachbarecke der Ecke 50 die Nummer 1 hat, und die dritte Nachbarecke der Ecke 49 die Nummer 98 (vgl. Diagramm im übernächsten Abschnitt).

Nun betrachten wir die dritte Nachbarecke zu 100, ihre Nummer sei X, und die dritte Nachbarecke zu 99 habe die Nummer Y. Somit haben wir eine von zwei möglichen Konfigurationen, je nachdem die Kante 100 – 50 eine Mantellinie oder eine Kante der Deckfläche ist:

Fall 1: – X – 100 – 49 – 98 –
| | | |
– 1 – 50 – 99 – Y –

oder Fall 2: – 98 – 49 – 99 – Y –
| | | |
– X – 100 – 50 – 1 –

Nach Annahme gilt $100 - X \geq 49$, also $X \leq 51$; und da X sicher verschieden von 50 ist, sogar schärfer $X \leq 49$ oder $X = 51$. Für die dritte Nachbarecke zur Ecke 99 gilt mit entsprechender Argumentation $Y \leq 49$.

Fall 1: Die Kante 100–50 gehört nicht zu einer Deckfläche, d.h. ist Mantellinie. Dann bildet der Kantenzug X – 100 – 50 – 1 ein Viereck, d.h. die Ecke X ist benachbart zur Ecke 1 und es folgt $X - 1 \geq 49$, zusammen mit obiger Bemerkung folgt $X = 51$. Nun sind die Ecken X – 100 – 49 – 98 aufeinander folgende Ecken der Deckfläche, d.h. eines 50 – Ecks, wobei die erste und die vierte Ecke Nummern haben, die größer als 50 sind. Nun überlegen wir, welche Nummern die 5., 6., ... Ecke haben können: Die Nummern 50 und 100 sind bereits vergeben und die Differenz der Nummern von aufeinander folgenden Ecken muss mindestens 49 betragen. Also muss auf eine Nummer aus dem Intervall [51;99] stets eine Nummer aus dem Intervall [1;49] folgen und umgekehrt. Ausgehend von der 4. Ecke mit der Nummer 98 haben demnach die 5. Ecke, die 7. Ecke, ..., die 99. Ecke eine Nummer aus dem Intervall [1;49], und die 6. Ecke, 8. Ecke, ..., 100. Ecke eine Nummer aus dem Intervall [51;99]. Dies führt aber zu dem Widerspruch, dass die 1. Ecke mit der Nummer 51 eine Nachbarecke hat, deren Nummer aus dem Intervall [51;99] ist, d.h. sich von der eigenen Nummer um weniger als 49 unterscheidet.

Fall 2: Die Kante 100 – 50 gehört zu einer Deckfläche. Dann ist die Kante 50 – 99 eine Mantellinie, d.h. der Kantenzug 1 – 50 – 99 – Y bildet ein Viereck, in dem die Ecke Y benachbart zur 1 und benachbart zur 99 ist. Nach Annahme ist demnach $Y - 1 \geq 49$, was im Widerspruch zu $Y \leq 49$ steht.

Variante: Wir nehmen an, es gebe eine Nummerierung, bei der sich die Nummern benachbarter Ecken immer um mindestens 49 unterscheiden. Nun schreiben wir in eine Tabelle, welche Nummern die Nachbarecken jeder Ecke unter dieser Voraussetzung haben können, ein Ausschnitt davon ist unten angegeben (und die Richtigkeit durch Kopfrechnen leicht überprüfbar):

Nr.	mögliche Nachbarecken-Nr.					
48			97	98	99	100
49				98	99	100
50	1				99	100
51	1	2				100
52	1	2	3			
53	1	2	3	4		
54	1	2	3	4	5	...

Wie man der Tabelle entnimmt, gibt es für die Nummern der Nachbarecken 49, 50, 51 und 52 jeweils genau drei Möglichkeiten. Weil jede Ecke genau drei Nachbarn hat, sind damit die Nummern der Nachbarecken dieser vier Ecken eindeutig festgelegt. Umgekehrt weiß man nun auch, dass die Ecken 1 und 2 beide die Nachbarn 51 und 52 haben, d.h. dass es ein Viereck gibt, dessen Ecken die Nummern 51–1–52–2 in dieser Reihenfolge haben. Mit analoger Argumentation haben die Ecken 51 und 50 beide die Nachbarn 1 und 100, d.h. es gibt auch ein Viereck mit den Ecken 51–1–50–100; weiter haben die Ecken 100 und 99 die gemeinsamen Nachbarn 49 und 50. Somit sind drei aufeinander folgende Mantelflächen des Prismas folgendermaßen (oder spiegelbildlich) festgelegt (die Abfolge der kursiv gesetzten Nummern wird weiter unten erklärt):

– *96* – 47 – *98* – **49** – **100** – **51** – **2** – *53* – *4* – *55* –
| | | | | | | | | |
– *46* – *97* – *48* – **99** – **50** – **1** – **52** – *3* – *54* – *5* –

Die Annahme des Widerspruchsbeweises legt also die relative Lage der Ecken mit den Nummern 49 bis 52 sowie 1, 2, 99 und 100 bereits fest.

Nun arbeiten wir die Tabelle weiter ab und überlegen, welche Nachbarn die Ecke 53 haben kann: Es sind dies nur noch die Ecken 2, 3 und 4, weil die Ecke 1 bereits Nachbar von 50, 51 und 52 sein muss. Damit haben die Ecken 52 und 53 die gemeinsamen Nachbarn 2 und 3; d.h. die einzig mögliche Fortsetzung unseres Numerierungsschemas ist ein Viereck 2–52–3–53.

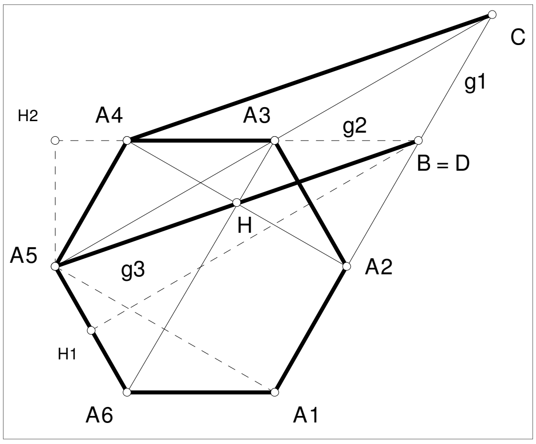
Die Ecke 2 hat nun die Nachbarn 51, 52 und 53; damit kann die Ecke 54 nicht mehr den Nachbarn 2 haben, also nur noch die Ecken 3, 4 und 5. Analoge Argumentation führt unser Schema nach rechts fort: oben die ungeraden Nummern 51, 53, 55, 57, ... und dazwischen die geraden Nummern 2, 4, 6, ...; d.h. die $(2i)$–te Ecke nach der Ecke 100 hat die Nummer $2i$ ($i = 1, 2, ..., 24$) (Dass unten die geraden Nummern 50, 52, 54, ... und dazwischen die ungeraden Nummern 1, 3, 5, ... stehen, ist zwar richtig, aber für den Beweis unerheblich.).

Auf der linken Seite können wir unter Verwendung der Tabelle analog fortsetzen: Die Ecke 100 kann nicht Nachbar der Ecke 48 sein, da bereits Nachbar von 49, 50 und 51; für 48 bleiben als mögliche Nachbarn also nur 97, 98 und 99. Also haben die Ecken 98 und 99 die Ecken 48 und 49 als gemeinsame Nachbarn, also hat das nächste Mantelflächenviereck die Ecken 99–49–98–48. Somit führt unsere Argumentation das Schema nach links folgendermaßen fort: oben sind die geraden Nummern 98, 96, 94, ... ; d.h. die $(2i)$–te Ecke links von der Ecke 100 hat die Nummer $100 - 2i$ und dazwischen die ungeraden Nummern 49, 47, 45, ... (Unten stehen die ungeraden Nummern 99, 97, 95, ...; und dazwischen die geraden Nummern 48, 46, 44, ...).

Dies führt nun zu folgendem Widerspruch: Da sich die Reihe der Ecken schließt, ist die zweite Ecke links von der 100 gleichzeitig die 48. Ecke rechts von der 100, müsste also gleichzeitig die Nummer 98 und 48 haben.

Aufgabe 3: Gegeben sind die Eckpunkte eines regelmäßigen Sechsecks, dessen Seiten die Länge 1 haben. Konstruiere hieraus allein mit dem Lineal weitere Punkte mit dem Ziel, dass es unter den vorgegebenen und konstruierten Punkten zwei solche gibt, die den Abstand $\sqrt{7}$ haben.

Anmerkungen: "Konstruiere hieraus allein mit dem Lineal..." bedeutet: Neu konstruierte Punkte entstehen nur als Schnitt von Verbindungsgeraden zweier Punkte, die gegeben oder schon konstruiert sind. Insbesondere kann mit dem Lineal keine Länge gemessen werden.
Die Konstruktion ist zu beschreiben und ihre Richtigkeit zu beweisen.



Bezeichnungen: Die Eckpunkte des regelmäßigen Sechsecks seien der Reihe nach z.B. gegen den Uhrzeigersinn mit A_1, A_2, ..., A_6 bezeichnet:

Beschreibung möglicher Konstruktionen:

Konstruktion 1: Wir schneiden die Geraden A_1A_2 und A_3A_4 und erhalten so den Punkt B. Dann hat die Strecke A_5B die Länge $\sqrt{7}$.

Konstruktion 2: Wir schneiden die Geraden A_1A_2 und A_3A_5 und erhalten so den Punkt C. Dann hat die Strecke A_4C die die Länge $\sqrt{7}$.

Konstruktion 3: Wir schneiden die Geraden A_3A_6 und A_2A_4 und erhalten so den Hilfspunkt H; danach schneiden wir die Geraden A_3A_4 und A_5H und erhalten so den Punkt D. Dann hat die Strecke A_5D die Länge $\sqrt{7}$. (Der Punkt B aus Konstruktion 1 ist identisch mit Punkt D.)

Beweise für die Richtigkeit der Konstruktionen:

Konstruktion 1: Bekanntlich hat das regelmäßige Sechseck Innenwinkel der Weite 120°; ferner teilen die Diagonalen A_1A_4, A_2A_5 und A_3A_6 das Sechseck in 6 gleichseitige Dreiecke auf, deren Seitenlänge 1 und deren Höhe $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ ist (z.B. ist auch die Strecke H_2A_5, d.h. das Lot von A_5 auf die Gerade A_4A_3 eine solche Höhe). Jede Nebendiagonale des Sechsecks (also z.B. die Strecke A_1A_5) setzt sich aus zwei solchen Höhen zusammen, hat also die Länge $\sqrt{3}$. Die Innenwinkel des Dreiecks A_2BA_3 bei A_2 und bei A_3 sind Nebenwinkel zu Innenwinkeln des Sechsecks, haben also die Weite $180° - 120° = 60°$, damit ist das Dreieck A_2BA_3 ebenfalls gleichseitig mit Seitenlänge 1. Ferner ist das Dreieck $A_5A_6A_1$ gleichschenklig mit Basis A_5A_1 und Spitzenwinkel 120°, hat also den Basiswinkel $(180° - 120°) : 2 = 30°$, also schließt die Nebendiagonale A_1A_5 mit der Seite A_1A_2 den Winkel $120° - 30° = 90°$ ein. Damit ist die Strecke A_5B eine Seite in mehreren Dreiecken, von denen jeweils zwei Seiten und ein Winkel bekannt sind, ihre Länge kann also berechnet werden:

1. Möglichkeit: Das Dreieck A_5A_1B ist rechtwinklig bei A_1, seine Katheten haben die Längen $\overline{A_5A_1} = \sqrt{3}$, $\overline{A_1B} = 2$; nach Pythagoras ist $\overline{A_5B} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{7}$.

2. Möglichkeit: H_2 sei der Lotfußpunkt des Lotes von A_5 auf die Gerade A_3A_4. Dann ist A_5B Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck A_5H_2B; dessen Katheten haben die Längen $\overline{A_5H_2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ und $\overline{H_2B} = 2{,}5$. Nach Pythagoras ist $\overline{A_5B} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 2{,}5^2} = \sqrt{7}$.

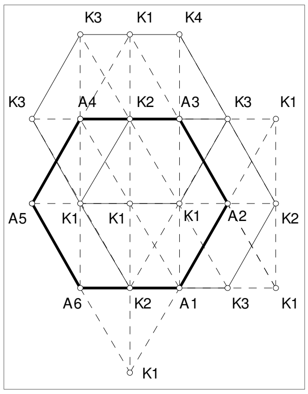
3. Möglichkeit: H_1 sei der Mittelpunkt des Strecke A_5A_6. Dann ist H_1B die Mittelsenkrechte der Strecke A_5A_6 und damit Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck A_5H_1B; dieses hat Katheten der Länge $\overline{A_5H_1} = 0{,}5$ und $\overline{H_1B} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$. Nach Pythagoras ist $\overline{A_5B} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{7}$.

4. Möglichkeit: Im Dreieck A_5A_4B ist $\overline{A_5A_4} = 1$, $\overline{A_4B} = 2$ und der eingeschlossene Winkel $\angle A_5A_4B = 120°$; nach Cos–Satz ist $\overline{A_5B}^2 = 1^2 + 2^2 - 2\cdot 1\cdot 2\cdot\cos(120°) = 1 + 4 - 4\cdot(-0{,}5) = 7$, also $\overline{A_5B} = \sqrt{7}$.

Konstruktion 2: Die Strecke A_5A_2 der Länge 2 geht aus Strecke A_3B der Länge 1 durch zentrische Streckung (C;2) hervor. Hieraus folgt, dass das Viereck A_5BCA_4 Diagonalen hat, die sich gegenseitig halbieren; es ist somit ein Parallelogramm. Also haben die Strecken A_5B und A_4C die gleiche Länge.

Konstruktion 3: Aus Symmetriegründen halbiert H die Strecke A_2A_4. Die Strecke A_2D ist parallel zu A_5A_4 und damit deren Bild bei der Punktspiegelung an H. Außerdem ist das Dreieck A_5A_4H rechtwinklig bei A_4, also ist $\overline{A_5D} = 2\cdot\overline{A_5H} = 2\cdot\sqrt{\overline{A_5A_4}^2 + \overline{A_4H}^2} = 2\cdot\sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{7}$.

(Oder: Offensichtlich ist B = D, also kann man den Beweis der 1.Konstruktion verwenden.)



Bemerkung (Hinführung zu einer vollständigen Beschreibung aller möglichen Konstruktionen): Beweisvarianten 1 bis 3 ist gemeinsam, dass wir ein Paar rationaler Zahlen $(r|s)$ gefunden haben, für das $r^2 + 3s^2 = 7$. Wir geben ein Verfahren zur Bestimmung aller möglichen solcher Paare an und zeigen, dass jedes solche Paar zu einer Konstruktion von Punkten mit Abstand $\sqrt{7}$ führt.

Zur leichteren Beschreibung legen wir ein Achsenkreuz so auf die Ebene, dass A_5 der Ursprung, die Gerade A_5A_2 die x – Achse und die Senkrechte dazu durch A_5 die y – Achse ist. Dann hat der Punkt A_5 die Koordinaten (0 | 0), der Punkt A_2 (2|0), der Punkt A_4 ($\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$), der Punkt A_3 ($\frac{3}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$) usw.

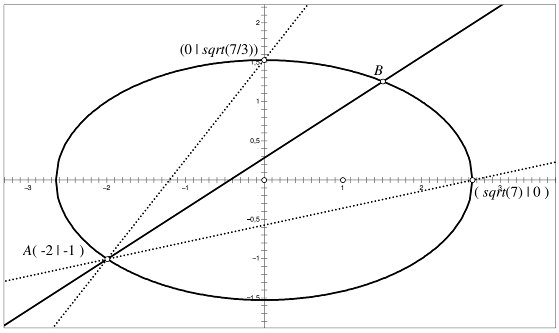
In nebenstehender Skizze sind nun aus den vorgegebenen Punkten A_1, A_2, ..., A_6 etliche Punkte mit Lineal konstruiert: mit K_1 sind solche Punkte bezeichnet, die man direkt aus den gegebenen Punkten A_1, A_2, ..., A_6 konstruieren kann, mit K_2 solche Punkte, die man aus den geg. Punkten und Punkten K_1 konstruieren kann usw. In der Figur kann man so nachvollziehen, wie aus den Eckpunkten des ursprünglich gegebenen Sechsecks die Teilpunkte auf der Diagonalen A_2A_5 konstruiert werden und wie anschließend alle Punkte der um 0,5 nach rechts oder um $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ nach oben verschobenen Figur konstruiert werden; durch Wiederholung und Spiegelung dieses Vorgangs erhält man dann alle Punkte der Form ($\frac{1}{2}r$ | $s\frac{1}{2}\sqrt{3}$) mit $(r,s) \in \mathbb{Z}^2$, d.h. alle Punkte des hexagonalen Gitters zusammen mit den Mittelpunkten der zur x–Achse parallelen Strecken.

Betrachtet man nun alle möglichen Verbindungsgeraden zwischen zwei solchen Punkten, so zeigt "einfache" Rechnung", dass deren Schnittpunkte alle von der Form (r | $s\sqrt{3}$) mit $(r,s) \in \mathbb{Q}^2$ sind und dass umgekehrt alle Punkte dieser Form Schnittpunkte von mindestens zwei verschiedenen solcher Geraden sind (weil jede Verbindungsgerade eines solchen Punktes z.B. mit dem Punkt (0|0) oder (1|0) oder (0|$\sqrt{3}$) unendlich viele Punkte der Form (r | $s\sqrt{3}$) mit $(r,s) \in \mathbb{Z}^2$ enthält.)

Nun suchen wir unter solchen Punkten Paare mit der Entfernung $\sqrt{7}$. Jede Parallelverschiebung mit einem Vektor $\begin{pmatrix} r \\ s\sqrt{3} \end{pmatrix}$ mit $(r,s) \in \mathbb{Q}^2$ bildet die Menge der konstruierbaren Punkte auf sich selbst ab, sodass wir o.B.d.A. annehmen können, dass einer der beiden Punkte der Ursprung ist. Es bleibt also die Suche nach einem solchen Punkt, der vom Ursprung die Entfernung $\sqrt{7}$ hat, d.h. die Suche nach einem *rationalen* Punkt (r,s) (d.h. einem Punkt, bei dem beide Koordinaten rational sind) auf der Kurve $x^2 + 3y^2 = 7$. Aus Symmetriegründen können wir uns auf den Teil der Kurve im 1. Quadranten beschränken.

Bei dieser Suche gehen wir von einem bekannten rationalen Punkt A der Kurve im 3. Quadranten aus, z.B. (–2|–1). Für jeden rationalen Punkt B auf der Kurve im 1. Quadranten hat die Verbindungsgerade AB rationale Steigung, und umgekehrt schneidet jede Gerade durch A mit rationaler Steigung die Kurve in einem rationalen Punkt. Letzteres folgt aus der Tatsache, dass die Bestimmungsgleichung für die x–Koordinate möglicher Schnittpunkte eine quadratische Gleichung mit rationalen Koeffizienten ist, deren eine Lösung die rationale Zahl –2 ist und deren zweite Lösung deswegen ebenfalls rational sein muss. Wenn nun die x–Koordinate rational ist, dann ist auch die y–Koordinate rational, da der Punkt auf einer Geraden liegt, deren Funktionsterm ein linearer Term mit rationalen Koeffizienten ist. Jede rationale Zahl $\frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$) – als Steigung einer Gerade durch A gedeutet – bestimmt also eindeutig einen rationalen Punkt B auf der Kurve, und umgekehrt bestimmt jeder rationale Punkt B auf der Kurve im 1. Quadranten eindeutig eine rationale Zahl, die Steigung der Verbindungsgeraden AB ist. Die Beschränkung auf Punkte im ersten Quadranten entspricht der Einschränkung

$$0{,}21525... \approx \frac{1}{\sqrt{7}+2} < \frac{p}{q} < \frac{\sqrt{\frac{7}{3}}+1}{2} \approx 1{,}26376... .$$



Die x–Koordinate jedes Schnittpunktes ist eine Lösung der Gleichung $x^2 + 3\left(\frac{p}{q}(x+2)-1\right)^2 = 7$; dies führt nach kleiner Rechnerei zu den Schnittpunkten

$(x_1|y_1)$ = $(-2|-1)$ (wie erwartet) und

$$(x_2|y_2) = \left(\frac{-6p^2+6pq+2q^2}{3p^2+q^2} \;\middle|\; \frac{3p^2+4pq-q^2}{3p^2+q^2} \right)$$

Setzt man nun alle zugelassenen Werte p, q ein, so erhält man alle möglichen rationalen Punkte. Für einige Beispiele wählen wir einfache Werte, z.B. $p = 1$, $q \in \{1, 2, 3,\}$; dies führt zu den Punkten $(0{,}5|1{,}5\sqrt{3})$ (entspricht Punkt B mit Berechnung aus Dreieck A_5H_1B), $(2|1\sqrt{3})$ (entspricht Punkt B mit Berechnung aus Dreieck A_5A_1B), $(2{,}5|0{,}5\sqrt{3})$ (entspricht Punkt B mit Berechnung aus Dreieck A_5H_2B). Weitere Werte führen zu Brüchen mit relativ großen Nennern, z.B. $({}^{10}/_{7} \,|\, {}^{9}/_{7}\sqrt{3})$ und $({}^{10}/_{13} \,|\, {}^{19}/_{13}\sqrt{3})$. Hieraus konkrete Konstruktionen zu beschreiben sei dem Leser überlassen.

Aufgabe 4: Für welche positiven ganzen Zahlen n besitzt die Zahl $\frac{4n+1}{n(2n-1)}$ eine abbrechende Dezimalbruchentwicklung?

Anmerkung: Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.

Antwort: Der Bruch besitzt für $n \in \{1, 2, 8\}$ eine abbrechende Dezimalbruchentwicklung; für alle anderen n eine periodische Dezimalbruchentwicklung.

Vorbemerkung: Bekanntlich ist jeder gemeinsame Teiler der ganzen Zahlen a und b für alle ganzzahligen r,s auch Teiler der Zahl $ra - sb$; dies gilt insbesondere für den ggT(a,b). Aus der Existenz von ganzen Zahlen r,s mit $ra - sb = 1$ folgt also, dass ggT$(a,b) = 1$.

1. Beweis: Vor dem eigentlichen Beweis überlegen wir uns, wie weit wir den gegebenen Bruch kürzen können. Hierzu bestimmen wir den größten gemeinsamen Teiler von Zähler und Nenner.

Es ist $1\cdot(4n + 1) - 4\cdot n = 1$, also ist ggT$(4n+1 ; n) = 1$; ferner $1\cdot(4n + 1) - 2\cdot(2n - 1) = 3$, also ist ggT$(4n + 1, 2n - 1)$ ein Teiler von 3, also ggT$(4n + 1, 2n - 1) \in \{1, 3\}$. Hieraus folgt sofort:

Falls der Zähler $4n + 1$ nicht durch 3 teilbar ist (dies ist äquivalent mit der Bedingung, dass $n + 1$ nicht durch 3 teilbar ist), ist (ggT$(4n+1 ; n(2n - 1))$) $= 1$, d.h. der Bruch lässt sich nicht kürzen.

Andernfalls, d.h. wenn $4n + 1$ und damit auch $n + 1$ durch 3 teilbar ist, dann ist auch $(2n - 1) = 2(n + 1) - 3$ durch drei teilbar. Weil dann zusätzlich n nicht durch 3 teilbar ist, ist (ggT$(4n+1 ; n(2n - 1))$) $= 3$, d.h. man kann den Bruch genau einmal mit 3 kürzen.

Nun zum eigentlichen Beweis:

Teil 1: Die Bedingung ist hinreichend: Sei $n \in \{1, 2, 8\}$. Dann erhalten wir die abbrechenden Dezimalbrüche $^5/_1 = 5$, $^9/_6 = 1{,}5$ und $^{33}/_{120} = 0{,}275$.

Teil 2: Die Bedingung ist notwendig: Sei die Dezimalbruchentwicklung des gegebenen Bruches abbrechend, es ist dann zu zeigen, dass $n \in \{1, 2, 8\}$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1: $n + 1$ ist durch drei teilbar, d.h. $n = 3m - 1$ für ein geeignetes ganzzahliges positives m: Nach oben Gesagtem kann man den Bruch einmal mit Faktor 3 kürzen; und da er nach Annahme eine abbrechende Dezimalbruchentwicklung besitzt, enthält der Nenner des gegebenen Bruches sonst nur noch die Primfaktoren 2 oder 5, es gibt also geeignete ganzzahlige nicht–negative a und b mit

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2^a \cdot 5^b &= n(2n - 1) = (3m - 1)(2(3m - 1) - 1) = (3m - 1)(6m - 3) \\ &= (3m - 1)\cdot 3\cdot(2m - 1) \end{aligned}$$

und somit

$$2^a \cdot 5^b = (3m - 1)(2m - 1) \quad (*).$$

Nun ist $2(3m - 1) - 3(2m - 1) = 1$; hieraus folgt, dass ggT$((3m - 1),(2m - 1)) = 1$, d.h. keine Primzahl kann Teiler von beiden Faktoren des Produkts $(3m - 1)(2m - 1)$ sein. Somit gilt:

Entweder hat einer der beiden Faktoren im Produkt $(3m - 1)(2m - 1)$ den Wert 1;
dies ist nur für $m = 1$ der Fall, was zu $n = 3\cdot m - 1 = 2$ führt;

oder beide der Faktoren im Produkt $(3m - 1)(2m - 1)$ sind verschieden von 1,
dann ist, weil $2m - 1$ sicher ungerade und größer als 1 ist,
$2^a = 3m - 1$ und $5^b = 2m - 1$ für geeignete positive (!) ganzzahlige a,b.

Nun rufen wir uns in Erinnerung, dass $2(3m - 1) - 3(2m - 1) = 1$, also $2\cdot 2^a - 3\cdot 5^b = 1$ und somit

$$2^{a+1} - 1 = 3\cdot 5^b.$$

Die rechte Seite ist also durch 3 teilbar, dies muss dann auch für die linke Seite gelten. Da $2 \equiv -1 \bmod 3$, ist dies nur dann der Fall, wenn $a + 1$ gerade ist; dies lässt eine Faktorisierung der linken Seite zu, es ist also mit positivem ganzzahligem $c := {}^1/_2(a+1)$

$$(2^c + 1)(2^c - 1) = 3\cdot 5^b.$$

Weil c positiv ist, sind die beiden Faktoren links beide ungerade und ihre Differenz ist 2, sie sind also teilerfremd und höchstens einer kann einen Faktor 5 enthalten. Damit ist der andere entweder 1 oder 3 und somit $c \in \{1, 2\}$, also $a = 2c - 1 \in \{1,3\}$, also $m = {}^1/_3(2^a + 1) \in \{1,3\}$, also $n = 3m - 1 \in \{2, 8\}$.

Fall 2: $n + 1$ ist nicht durch 3 teilbar. Nach oben Gesagtem kann man den gegebenen Bruch nicht kürzen, und da nach Annahme die Dezimalbruchentwicklung abbrechend ist, enthält der Nenner nur Primfaktoren 2 oder 5. Damit ist für geeignete ganzzahlige nicht–negative a,b

$$2^a \cdot 5^b = n(2n - 1)$$

Fall1: Mindestens einer der Faktoren des Produktes $n(2n - 1)$ hat den Wert 1: Dies führt bei . beiden Faktoren zur Bedingung $n = 1$.

Fall 2: Beide Faktoren des Produktes $n(2n - 1)$ sind verschieden von 1: Dieser Fall kann nicht eintreten. Es sind nämlich – weil $2\cdot n - (2n - 1) = 1$ – die beiden Faktoren teilerfremd, es kann also keiner sowohl den Faktor 2 als auch den Faktor 5 enthalten. Ferner ist der Faktor $2n - 1 > 1$ und ungerade, also sicher keine Zweierpotenz. Es gilt also für geeignete, jetzt positive a,b stets $n = 2^a$ und $5^b = 2n - 1 = 2\cdot 2^a - 1 \equiv -1 \bmod 4$. Im Widerspruch hierzu folgt aber aus $5 \equiv 1 \bmod 4$ stets $5^b \equiv 1 \bmod 4$.

Damit ist gezeigt, dass in jedem Fall $n \in \{1, 2, 8\}$; dies beendet den Beweis.

2. Beweis: Bekanntlich hat ein Bruch ganzer Zahlen genau dann eine abbrechende Dezimalbruchentwicklung, wenn der Nenner des gekürzten Bruches keinen Primfaktor enthält, der von 2 und 5 verschieden ist. Wir überlegen deswegen zunächst, wie der Bruch gekürzt werden kann und welche Primfaktoren im Nenner danach übrig bleiben.

Es ist $1\cdot(4n + 1) - 4\cdot n = 1$, also haben die Terme $4n + 1$ und n keinen gemeinsamen Primfaktor; ferner ist $1\cdot(4n + 1) - 2\cdot(2n - 1) = 3$, d.h. wenn die Primfaktorzerlegungen eines der beiden Terme $4n + 1$ und $2n - 1$ den Primfaktor 3 enthält, dann enthält der andere Term ebenfalls den Primfaktor 3; zusätzlich weiß man, dass einer der beiden Terme den Faktor 3 höchstens ein Mal enthält.

Hat nun n einen von 5 verschiedenen ungeraden Primfaktor, so kommt dieser nach oben Gesagtem in $4n + 1$ nicht vor, kann also nicht gekürzt werden. Und wenn n einen Primfaktor 5 hat, so hat $2n - 1$ die Endziffer 9, enthält also keinen Primfaktor 5; und da $2n - 1 \geq 9 > 3$, enthält $2n - 1$ stattdessen einen anderen ungeraden Primfaktor, der nach der Eingangsbemerkung nicht gekürzt werden kann, oder den Primfaktor 3 ein zweites Mal; dieser kann ebenfalls nicht gekürzt werden. Ein ungerader Primfaktor von n führt also in jedem Fall dazu, dass der Nenner des gekürzten Bruches einen von 2 und 5 verschiedenen Primfaktor enthält. Aus unseren bisherigen Überlegungen folgt demnach:

Der gegebene Bruch hat genau dann eine abbrechende Dezimalbruchentwicklung, wenn $n = 2^k$ und $2n - 1 = 3^d\cdot 5^m$ für geeignete $d \in \{0;1\}$ und nicht–negative ganzzahlige k,m ist. Also genügt es, den Bruch für alle $n = 2^k$ zu untersuchen:

Für $k = 0$ erhalten wir $n = 1$ und $2n - 1 = 3^0\cdot 5^0$;

für $k = 1$ ist $n = 2$ und $2n - 1 = 3^1\cdot 5^0$;

also hat für $n = 1$ und $n = 2$ der gegebene Bruch eine abbrechende Dezimalbruchentwicklung.

Wie man leicht im Kopf nachrechnet, hat für $k > 2$ der Term 2^k periodisch die Endziffern 8, 6, 2, 4, und damit der Term $2n - 1$ periodisch die Endziffern 5, 1, 3 und 7. Da für $k > 0$ der Term $2n - 1$ nur dann von der Form $3^d\cdot 5^m$ sein kann, wenn die Endziffer 5 ist, genügt es, diejenigen k zu untersuchen, für die die Endziffer von 2^k den Wert 8 hat; dies ist der Fall für alle $k \equiv -1 \bmod 4$.

In diesem Fall ist dann $2n - 1 = 2\cdot 2^k - 1 = 2^{1+4s-1} - 1 = (4^s - 1)\cdot(4^s + 1) = 3^d\cdot 5^m$ für ein geeignetes positives ganzzahliges s. Die Differenz der beiden Faktoren $(4^s - 1)$ und $\cdot(4^s + 1)$ ist 2; d.h. wenn einer der beiden Faktoren sowohl den Primfaktor 3 als auch den Primfaktor 5 enthielte, müsste der andere – da größer als 1 und ungerade – einen von 3 und 5 verschiedenen Primfaktor enthalten. Somit kommt nur $(4^s - 1) \in \{1, 3\}$ oder $(4^s + 1) \in \{1, 3\}$ in Frage; tatsächlich ist für und nur für $s = 1$ der Term $2n - 1 = (4^1 - 1)\cdot(4^1 + 1) = 3^1\cdot 5^1$ von der gesuchten Form. Damit ist $n = 2^3 = 8$ der einzige Wert im Fall $k > 2$, für den der Bruch eine abbrechende Dezimalbruchentwicklung besitzt.