BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK

Bildung & Begabung

Aufgaben und Lösungen

2. Runde 2014

Über Kommentare und Ergänzungen zu diesen Lösungsbeispielen freuen wir uns!

» **KORREKTURKOMMISSION | VORSITZENDER | KARL FEGERT**

» **BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK**

Kortrijker Straße 1, 53177 Bonn | Postfach 20 02 01, 53132 Bonn | Tel.: (02 28) 9 59 15-20, Fax: (02 28) 9 59 15-29
info@bundeswettbewerb-mathematik.de, www.bundeswettbewerb-mathematik.de

Stand: Oktobber 2014

GEFÖRDERT VOM

Bundesministerium für Bildung und Forschung

Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft

Aufgabe 1: Zeige, dass für alle positiven ganzen Zahlen n die Zahl $2^{(3^n)}+1$ durch 3^{n+1} teilbar ist.

1. Beweis (vollst. Induktion nach n):

Induktionsanfang: Die Aussage ist richtig für $n = 1$, da $2^{(3^1)}+1 = 9$ durch $3^{1+1} = 9$ teilbar ist.

Induktionsannahme: Die Aussage sei richtig für ein bestimmtes $n \geq 1$.

Induktionsschluss: Dann ist die Aussage richtig für $n + 1$:

Für alle reellen gilt die Identität $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$; hiermit erhalten wir

$$2^{(3^{n+1})}+1 = \left(2^{3^n}\right)^3+1 = \left(2^{3^n}+1\right)\left(\left(2^{3^n}\right)^2-2^{3^n}+1\right) = \left(2^{(3^n)}+1\right)\cdot\left(2^{(2\cdot 3^n)}-2^{(3^n)}+1\right);$$

in diesem Produkt enthält der erste Faktor nach Induktionsannahme den Faktor 3^{n+1}. Bei der Untersuchung des zweiten Faktors benützen wir die leicht im Kopf verifizierbare Aussage, dass $2^k \equiv 1 \bmod 3$ für alle geraden k ist, und $2^k \equiv 2 \bmod 3$ für alle ungeraden k. Also ist

$$2^{(2\cdot 3^n)}-2^{(3^n)}+1 \equiv (1 - 2 + 1) \equiv 0 \bmod 3\,,$$

d.h. der zweite Faktor ist durch 3 teilbar. Insgesamt ist das Produkt also durch $3^{n+1} \cdot 3 = 3^{(n+1)+1}$ teilbar; dies war zu beweisen.

Variante des Induktionsschlusses: Es ist

$$2^{(3^{n+1})}+1 = \left(\left(2^{(3^n)}+1\right)-1\right)^3+1 = \left(2^{(3^n)}+1\right)^3-3\left(2^{(3^n)}+1\right)^2+3\left(2^{(3^n)}+1\right)^1-1+1;$$

nach Induktionsannahme ist der erste Summand teilbar durch $3^{3(n+1)}$, der zweite durch $3^{2(n+1)+1}$, der dritte durch $3^{(n+1)+1}$, die letzten beiden heben sich gegenseitig auf. Insgesamt ist die linke Seite also teilbar durch diejenige dieser drei Dreierpotenzen, die den kleinsten Exponenten hat, dies ist offensichtlich $3^{(n+1)+1}$ und dies war zu zeigen.

2. Beweis (direkt): Wir benützen einen Hilfssatz:

HS: Für $k \equiv 1 \bmod 3$ und $k \equiv 2 \bmod 3$, $1 \leq k < 3^n$ gilt $3^n \mid \binom{3^n}{k}$ (Beweis am Ende).

Umformung des betrachteten Ausdrucks mit binomischem Lehrsatz ergibt (es ist 3^n stets ungerade!)

$$2^{(3^n)}+1 = (-1+3)^{(3^n)}+1 = \sum_{k=0}^{3^n}\binom{3^n}{k}(-1)^{3^n-k}3^k+1 = \sum_{k=1}^{3^n}\binom{3^n}{k}(-1)^{3^n-k}3^k\,.$$

Es genügt nun zu zeigen, dass in dieser Summe jeder – der offensichtlich ganzzahligen – Summanden durch 3^{n+1} teilbar ist.

Für Summanden S_k mit $k \equiv 1 \bmod 3$ und $k \equiv 2 \bmod 3$, $1 \leq k < 3^n$ ist nach dem Hilfssatz S_k durch 3^{n+k} und damit auch durch 3^{n+1} teilbar.

Für alle anderen Summanden, d.h. für alle S_k mit $k \equiv 0 \bmod 3$ gilt Folgendes: Sei 3^s die maximale Dreierpotenz, die in k enthalten ist, d.h. es ist $k = 3^s{\cdot}p$ für ein geeignetes, nicht durch drei teilbares p. Dann ist

$$S_k = \binom{3^n}{k}\cdot 3^k = \binom{3^n}{k-1}\cdot\frac{3^n-(k-1)}{k}\cdot 3^k = \binom{3^n}{k-1}\cdot\frac{3^n-(k-1)}{p}\cdot 3^{k-s}\,.$$

Weil $k - 1 \equiv 2 \bmod 3$, ist der erste Faktor durch 3^n teilbar. Weiter ist offensichtlich $s < k$, also $k - s \geq 1$ und somit der dritte Faktor mindestens durch 3^1 teilbar. Diese Teiler bleiben nach dem Kürzen mit p erhalten, weil p nicht durch 3 teilbar ist. Somit ist S_k auch in diesem Fall durch 3^{n+1} teilbar.

Beweis des HS (mittels vollständiger Induktion nach k, beschränkt auf die Werte $1 \le k < 3^n - 1$):

Die Aussage ist richtig für $k = 1$, weil $\binom{3^n}{1} = 3^n$ offensichtlich durch 3^n teilbar ist.

Sei nun die Aussage richtig für ein $k \equiv 1 \mod 3$, $1 \le k < 3^n - 2$. Dann ist

$$\binom{3^n}{k+1} = \frac{3^n \cdot (3^n - 1) \cdot \ldots \cdot (3^n - (k-1))}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} \cdot \frac{(3^n - k)}{(k+1)}.$$

Der erste Bruch ist vollständig kürzbar und enthält nach Voraussetzung den Faktor 3^n. Beim zweiten Bruch enthalten die Faktoren $(3^n - k)$ und $(k+1)$ wegen $k \equiv 1 \mod 3$ keinen Faktor 3, d.h. beim vollständigen Kürzen bleibt der Faktor 3^n erhalten und die Aussage ist somit auch richtig für $k + 1$; es sei bemerkt, dass $k+1 \equiv 2 \mod 3$. Weiter gilt

$$\binom{3^n}{k+3} = \frac{3^n \cdot (3^n - 1) \cdot \ldots \cdot (3^n - (k-1))}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} \cdot \frac{(3^n - k) \cdot (3^n - (k+1)) \cdot (3^n - (k+2))}{(k+1)(k+2)(k+3)}.$$

Wieder ist der erste Bruch vollständig kürzbar und enthält nach Voraussetzung den Faktor 3^n, wieder enthalten die Faktoren $(3^n - k)$ und $(k+1)$ wegen $k \equiv 1 \mod 3$ keinen Faktor 3. Dies gilt aber auch für die beiden Faktoren $(3^n - (k+1))$ und $(k + 3)$. Für die restlichen beiden Faktoren $(3^n - (k+2))$ und $(k+ 2)$ gilt: Ist 3^r die maximale Dreierpotenz in $k + 2$, d.h. ist $k + 2 = 3^r \cdot q$ und 3 kein Teiler von q, dann ist $(3^n - (k+2)) = 3^r (3^{n-r} - q)$, also ist – solange $k + 3 < 3^n$ – die Zahl 3^r ebenfalls die maximale Dreierpotenz in $(3^n - (k+2))$. Beim Kürzen verschwindet diese also und der Faktor 3^n des ersten Bruches bleibt erhalten. Die Aussage ist demnach auch richtig für $k + 3$.

Induktiv folgt die Richtigkeit der Aussage nun für $k = 2, 4, 5, 7, \ldots, 3^n - 1$.

3. Beweis: Wir verwenden die Eulersche φ– Funktion, d.h. $\varphi(n)$ sei die Anzahl der zu n teilerfremden positiven ganzen Zahlen, die nicht größer als n sind.

Man ermittelt leicht, das $\varphi(3^{n+1}) = \frac{2}{3} \cdot 3^{n+1} = 2 \cdot 3^n$; dies folgt aus der Tatsache, dass genau $^2/_3$ aller Zahlen $1, 2, \ldots, 3^{n+1}$ keinen Faktor 3 enthalten, die Zahl 3^{n+1} aber mindestens einen und keine anderen als 3.

Es ist $\text{ggt}(2;3^{n+1}) = 1$, also gilt mit Satz von Euler

$$2^{\varphi(3^{n+1})} \equiv 1 \mod (3^{n+1}), \text{ d.h. } 3^{n+1} \text{ ist Teiler von } -1 = (2^{2\cdot 3^n} - 1) = (2^{3^n} - 1)(2^{3^n} + 1).$$

Jede Zweierpotenz mit ungeradem Exponenten lässt bei Division durch 3 den Rest 2, also ist der linke Faktor $(2^{3^n} - 1)$ nicht durch 3 teilbar. Hieraus folgt wiederum, dass der rechte Faktor den Teiler 3^{n+1} vollständig enthält; dies war zu zeigen.

Bemerkung: Bei der abstrakten Behandlung der Aufgabe vergisst man leicht, dass die Zahl $2^{(3^n)} + 1$ mit wachsendem n sehr schnell groß wird. Für $n = 5$ hat ihre Darstellung im Dezimalsystem bereits 74 Ziffern (Berechnung mit DERIVE).

Anders als Addieren und Multiplizieren ist Potenzieren nicht assoziativ, d.h. es ist im Allgemeinen $(a^b)^c \neq a^{(b^c)}$. Üblicherweise deutet man $a^{b^c} = a^{(b^c)}$; um Verwechslungen zu vermeiden, wurden gelegentlich redundante Klammern gesetzt.

Aufgabe 2: Für alle positiven ganzen Zahlen m und k mit $m \geq k$ sei $a_{m,k} := \binom{m}{k-1} - 3^{m-k}$.

Bestimme alle Folgen reeller Zahlen $(x_1, x_2, x_3, \dots)$, die für alle positiven ganzen Zahlen n die Gleichung $a_{n,1} \cdot x_1 + a_{n,2} \cdot x_2 + \dots + a_{n,n} \cdot x_n = 0$ erfüllen.

Ergebnis: Jede Folge $(x_1, x_2, x_3, \dots)$ mit $x_i = c \cdot 2^i$ mit reellem c und $i = 1, 2, 3, \dots$ erfüllt die Bedingungen der Aufgabenstellung, alle anderen Folgen erfüllen die Bedingungen nicht.

Bezeichnung: Eine Folge, die die in der Aufgabenstellung geforderten Bedingungen erfüllt, nennen wir *zulässig*.

Die Gleichung $a_{n,1} \cdot x_1 + a_{n,2} \cdot x_2 + \dots + a_{n,n} \cdot x_n = 0$ oder kurz $\sum_{k=1}^{n} a_{n,k} x_k = 0$ bezeichnen wir mit G(n).

1. Beweis: Wir betrachten zunächst $n = 1$: Es ist $a_{1,1} = \binom{1}{1-1} - 3^{1-1} = 0$; und die Gleichung G(1), d.h. $a_{1,1} \cdot x_1 = 0$ ist für jede reelle Zahl x_1 erfüllt.

Für alle $n > 1$ ist $a_{n,n} = \binom{n}{n-1} - 3^{n-n} = n - 1 \neq 0$ und damit die Gleichung G(n), d.h. $a_{n,1} \cdot x_1 + a_{n,2} \cdot x_2 + \dots + a_{n,n} \cdot x_n = 0$, eindeutig nach x_n auflösbar. Wenn es also Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ gibt, die die Gleichungen G(1), G(2), ..., G(n–1) erfüllen, dann gibt es eine eindeutig bestimmte Zahl x_n derart, dass die Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_n$ die Gleichungen G(1), G(2), ..., G(n) erfüllen. Induktiv folgt hieraus, dass jede zulässige Folge durch das erste Glied x_1 eindeutig bestimmt ist, und dass jede reelle Zahl x_1 eindeutig eine zulässige Folge bestimmt.

Weiter ist $\sum_{k=1}^{n} a_{n,k}(cx_k) = 0 \Leftrightarrow c\sum_{k=1}^{n} a_{n,k} x_k = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{n,k} x_k = 0$ oder $c = 0$;

also ist für jede beliebige reelle Zahl c und jede zulässige Folge (x_i) auch die Folge (cx_i) zulässig.

Es genügt also, nachzuweisen, dass die Folge (x_i) mit $x_i = 2^i$ $(i = 1, 2, 3, \dots)$ zulässig ist, d.h dass für alle positiven ganzen Zahlen n die Identität $\sum_{k=1}^{n} a_{n,k} 2^k = 0$ gilt. Tatsächlich ist

$$\sum_{k=1}^{n} a_{n,k} 2^k = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1} - 3^{n-k}\right)2^k = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}2^k = \sum_{k=1}^{n} 3^{n-k}2^k,$$

und dass diese Gleichung gilt, kann auf verschiedene Weisen nachgewiesen werden:

Variante 1: Die linke Seite vereinfacht sich zu

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}2^k = 2\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}2^{k-1} - \binom{n}{n}2^{n+1} = 2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k - 2^{n+1} = 2 \cdot (1+2)^n - 2^{n+1} = 2 \cdot 3^n - 2^{n+1},$$

das ist der gleiche Wert, zu dem sich die rechte Seite vereinfacht:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(3^{n-k}\right)2^k = 3^n\sum_{k=1}^{n}3^{-k}2^k = 3^n \cdot \frac{2}{3} \cdot \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^k = 3^n \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} = 3^n \cdot 2 \cdot \left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = 2 \cdot 3^n - 2^{n+1}.$$

Variante 2: Wir bestimmen auf zwei Arten die Anzahl von Möglichkeiten, n mit den Zahlen $1, 2, 3, \dots, n$ nummerierte Perlen so auf drei Schachteln A, B und C zu verteilen, dass Schachtel A mindestens eine Perle enthält.

Eine erste Art, alle Verteilungen und dabei jede genau einmal zu erhalten, ist die folgende: Wir wählen ein k mit $1 \leq k \leq n$, wählen dann $k-1$ Perlen aus und entscheiden bei jeder dieser Perlen, ob sie in

Schachtel B oder C kommt; die restlichen Perlen (also mindestens eine!) kommen in Schachtel A. Einfache Kombinatorik ergibt als Anzahl der Möglichkeiten $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}2^{k-1}$.

Eine zweite Art ist die folgende: Wir wählen ein k mit $1 \le k \le n$ und legen fest: Perle mit Nummer k (also mindestens eine!) kommt in Schachtel A, die $k-1$ Perlen mit einer Nummer kleiner als k kommen in eine der Schachteln B oder C; die $n-k$ Perlen mit einer Nummer größer als k kommen in eine der Schachteln A, B oder C. Einfache Kombinatorik ergibt hier als Anzahl der Möglichkeiten $\sum_{k=1}^{n}3^{n-k}2^{k-1}$.

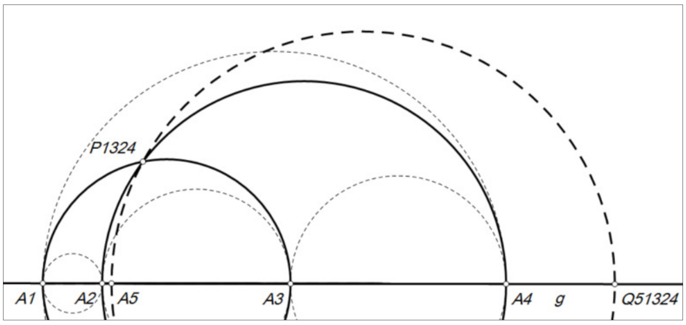
Da bei beiden Arten die gleiche Menge gezählt wurde, ergibt sich $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}2^{k-1} = \sum_{k=1}^{n}3^{n-k}2^{k-1}$, was äquivalent zu $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}2^{k} = \sum_{k=1}^{n}3^{n-k}2^{k}$ ist.

Aufgabe 3: In einer Ebene liegt eine Gerade g; auf ihr werden n paarweise verschiedene Punkte beliebig gewählt ($n \geq 2$); über den Verbindungsstrecken je zweier dieser Punkte werden Halbkreise gezeichnet, die alle auf derselben Seite von g liegen.

Bestimme in Abhängigkeit von n die maximale Anzahl von nicht auf g liegenden Schnittpunkten solcher Halbkreise.

Ergebnis: Die maximal mögliche Anzahl von solchen Schnittpunkten sei mit M(n) bezeichnet, es ist M(n) = $\binom{n}{4}$ (d.h. M(2) = M(3) = 0)

1. Beweis: Zu beliebigen vier paarweise verschiedenen Punkten auf der Geraden gibt genau sechs solche Halbkreise (vgl. Fig. mit Punkten A_1, A_2, A_3, A_4); es ist offensichtlich, dass genau zwei davon einen Schnittpunkt haben, der nicht auf g liegt. Die maximale Anzahl M(n) ist also höchstens so groß wie die Anzahl Möglichkeiten, vier Punkte aus den n Punkten auszuwählen, also ist M(n) $\leq \binom{n}{4}$.



Gleichheit gilt, wenn keine zwei der betrachteten Schnittpunkte zusammenfallen. Es bleibt also noch zu zeigen, dass die Punkte auf g so liegen können, dass dies der Fall ist. Dies zeigen wir induktiv über die Anzahl der auf g befindlichen Punkte:

Für 2 bzw. 3 Punkte gibt es nichts zu zeigen; für 4 Punkte A_1, A_2, A_3 und A_4, die in dieser Reihenfolge auf g liegen, liegt A_2 innerhalb des Kreises mit Durchmesser A_1A_3 und A_4 außerhalb dieses Kreises, d.h. die beiden Halbkreise über A_1A_3 und über A_2A_4 haben immer genau einen Schnittpunkt, d.h. M(4) = 1 = $\binom{4}{4}$.

Nun nehmen wir an, es gebe für ein bestimmtes n ($n \geq 4$) eine Konfiguration mit n Punkten $A_1, A_2, ..., A_n$ auf der Geraden g, für die keine zwei Schnittpunkte von Halbkreisen zusammenfallen (in der Figur mit den Punkten A_1 bis A_5 dargestellt). Die Halbkreise über A_iA_j seien mit k_{ij} bezeichnet, die Schnittpunkte der Halbkreise k_{ij} und k_{rs} mit P_{ijrs} (dabei ist $i, j, r, s = 1, 2, ..., n$, $i < j$, $r < s$, $i < s$).

Ein weiterer Punkt A_{n+1} darf nun nicht so gewählt werden, dass ein Halbkreis über einer der Strecken A_mA_{n+1} ($m = 1, 2, ..., n$) durch einen der Punkte P_{ijrs} geht. Jeder Punkt A_m auf g bestimmt mit jedem der Punkte P_{ijrs} genau einen – evtl. zur Geraden entarteten – Halbkreis mit Mittelpunkt auf g und somit höchstens einen weiteren Punkt Q_{mijrs} mit der Eigenschaft, dass der Halbkreis über der Strecke A_mQ_{mijrs} durch den Punkt P_{ijrs} geht. Da die Konstruktion der Punkte Q_{mijrs} nur endlich viele Schritte und endlich viele Objekte umfasst, gibt es auch nur endlich viele solcher Punkte. Es gibt also auf g noch davon verschiedene Punkte, einen davon wählen wir als A_{n+1}.

2. Beweis (vollständige Induktion nach der Anzahl der Punkte):

Induktionsanfang: Es ist offensichtlich unabhängig von der Lage der Punkte auf der Geraden M(2) = M(3) = 0 = $\binom{2}{4}$ = $\binom{3}{4}$ und M(4) = 1 = $\binom{4}{4}$; d.h. die Aussage ist richtig für $n = 2, 3, 4$.

Induktionsannahme: Sei die Aussage richtig für ein bestimmtes $n \geq 4$ d.h. für jede Lage von n paarweise verschiedenen Punkten auf der Geraden gelte M(n) $\leq \binom{n}{4}$; und es gebe eine Lage von n paarweise verschiedene Punkten, für die es genau $\binom{n}{4}$ solche Schnittpunkte gebe.

Induktionsschluss: Wir betrachten n+1 beliebige, paarweise verschiedene Punkte auf g, wir bezeichnen sie der Reihe nach mit A_1, A_2, ..., A_{n+1}.

Zu Halbkreisen über zwei Strecken A_rA_s mit $r, s \le n$ (d.h. über zwei Strecken, von denen keine einen Endpunkt A_{n+1} hat) gibt es nach Induktionsannahme höchstens $M(n) = \binom{n}{4}$ solche Schnittpunkte. Zu Halbkreisen über zwei Strecken, die beide A_{n+1} als Endpunkt haben, gibt es offensichtlich keinen solchen Schnittpunkt. Zu Halbkreisen über zwei Strecken A_rA_s und A_kA_{n+1} $(r < s \le n;\ k < n+1$; d.h. über zwei Strecken, von denen genau eine einen Endpunkt A_{n+1} hat) gibt es genau dann genau einen solchen Schnittpunkt, wenn $r < k < s \le n$; es gibt genau $\binom{n}{3}$ solche Zahlentripel (r,k,s) und damit ebenso viele Schnittpunkte. Hieraus folgt sofort, dass $M(n+1) \le \binom{n}{3} + \binom{n}{4} = \binom{n+1}{4}$.

Nun zeigen wir noch, dass $M(n+1) = \binom{n+1}{4}$; d.h. dass es eine Lage von n+1 Punkten auf g gibt, bei der keine zwei solcher Schnittpunkte zusammenfallen: Wir wählen zunächst eine Lage von n Punkten, für die es $\binom{n}{4}$ solche Schnittpunkte gibt; nach Induktionsannahme ist dies möglich. Nun legen wir ein Achsenkreuz so auf die Gesamtfigur, dass die x–Achse auf g zu liegen kommt und die betrachteten Punkte positive y–Werte haben. Die Punkte seien so der Reihe nach mit A_1, A_2, ..., A_n bezeichnet, dass ihre x–Koordinaten eine wachsende Folge (a_i) mit $1 \le i \le n$ bilden; die Koordinaten der betrachteten Schnittpunkte seien $(x_j \mid y_j)$ mit $1 \le j \le \binom{n}{4}$.

Unter allen positiven Werten $\frac{1}{2}(x_j - a_i)$ gibt es einen kleinsten, den wir mit δ bezeichnen; unter allen Werten y_j gibt es einen größten, den wir mit h bezeichnen, unter allen Werten x_j gibt es einen größten, den wir mit m bezeichnen. Schließlich definieren wir $a_{n+1} := \frac{h^2}{\delta} + m$ und damit die Lage von A_{n+1}.

Hat nun ein Halbkreis über einer Strecke A_tA_{n+1} mit einem Halbkreis über einer Strecke A_rA_s $(r,s,t \le n)$ den Punkt $(x \mid y)$ gemeinsam, so bildet dieser mit den Punkte A_t und A_{n+1} ein rechtwinkliges Dreieck und es gilt nach Höhensatz $(x - a_t)\cdot(a_{n+1} - x) = y^2$. Wäre nun $(x \mid y) = (x_j \mid y_j)$ für irgend ein j, so wäre entweder $0 < x_j - a_t \le \delta$ oder $x_j - a_t > \delta$ und damit $y_j^2 = (x_j - a_t)(a_{n+1} - x_j) > \delta\cdot \left(\frac{h^2}{\delta} + m - x_j\right) > h^2$, was in beiden Fällen einen Widerspruch darstellt.

Bemerkung: Wählt man sechs Punkte auf der Geraden äquidistant, so fallen einige Schnittpunkte zusammen.

Aufgabe 4: In der Ebene sind drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte A_1, A_2, A_3 gegeben; für $n = 4, 5, 6, \ldots$ sei A_n der Schwerpunkt des Dreiecks $A_{n-3}A_{n-2}A_{n-1}$.

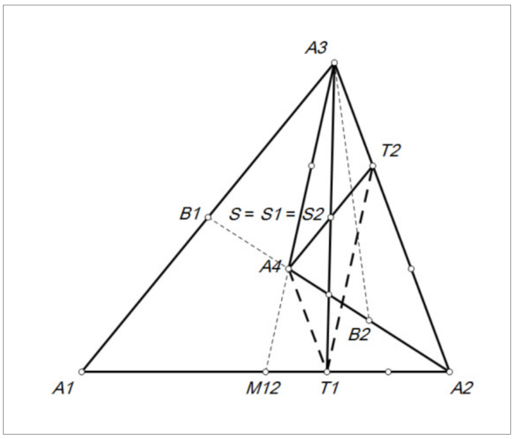
a) Zeige, dass es genau einen Punkt S gibt, der für alle $n \geq 4$ im Innern des Dreiecks $A_{n-3}A_{n-2}A_{n-1}$ liegt.

b) Es sei T der Schnittpunkt der Geraden SA_3 mit der Geraden A_1A_2. Bestimme die beiden Streckenverhältnisse $A_1T : TA_2$ und $TS : SA_3$.

Bezeichnungen: Mit Δ_n sei das Dreieck $A_nA_{n+1}A_{n+2}$ bezeichnet; mit s_n die Seitenhalbierende im Dreieck Δ_n, die von der Ecke A_n ausgeht.

Ergebnis zu Teilaufgabe b): Es ist $\overline{A_1T} : \overline{TA_2} = 2 : 1$ und $\overline{TS} : \overline{SA_3} = 1 : 1$;

1. Beweis: (elementargeometrisch mit Beschreibung des Punktes S): Mit M_{ij} sei der Mittelpunkt der Strecke A_iA_j bezeichnet, mit T_i derjenige Punkt auf der Strecke A_iA_{i+1}, der diese Strecke im Verhältnis 2 : 1 teilt. Schließlich sei S_i der Mittelpunkt der Strecke $A_{i+2}T_i$. S_i ist damit eindeutig bestimmt. Bemerkt sei, dass $T_1 = T$.



Wir werden zeigen, dass alle Punkte S_i zusammenfallen und identisch mit dem gesuchten Punkt S sind.

Wir zeigen zunächst, dass $S_1 = S_2$: Wie man schnell nachrechnet, teilt T_1 die Strecke A_2M_{12} im Verhältnis $^1/_3 : (1 - {^1/_2} - {^1/_3}) = 2:1$, ebenso teilt A_4 – weil Schwerpunkt im Dreieck Δ_1 – die Strecke A_3M_{12} im gleichen Verhältnis 2 : 1. Hieraus folgt sofort mit Strahlensatz mit Zentrum A_2 bzw. M_{12} und der Definition von T_2, dass $T_1T_2 \parallel M_{12}A_3$ und $A_4T_1 \parallel A_3A_2$. Insbesondere ist $A_4T_1T_2A_3$ ein Parallelogramm; und da sich bekanntlich im Parallelogramm die Diagonalen gegenseitig halbieren, geht die Diagonale A_4T_2 durch S_1; ferner ist S_1 ihr Mittelpunkt. Somit erfüllt S_1 die Definitionsbedingung von S_2, es ist also $S_1 = S_2$.

Die Argumentation im vorigen Absatz bleibt gültig, wenn man jeden vorkommenden Index um 1 erhöht; mit vollständiger Induktion gilt also $S_n = S_1 =: S$ für alle n.

Da $A_{i+2}T_i$ Transversale im Dreieck A_i ist, liegt für alle i der Punkt S_i im Innern des Dreiecks Δ_i; dies gilt dann auch für den Punkt S.

Da die Definition von S_1 den im Ergebnis zu Teilaufgabe b) angegebenen Teilverhältnissen entspricht (es ist $T = T_1$) , ist der Nachweis für Teilaufgabe b) geführt.

Es bleibt noch nachzuweisen, dass S der einzige Punkt mit dieser Eigenschaft ist: Ein Kreis um A_3 durch M_{12} schneidet (bzw. berührt) die Strecke A_1A_2. Damit liegt mindestens einer der beiden Punkte A_1 und A_2 außerhalb dieses Kreises, d.h. die Strecke A_3M_{12} ist kürzer als die längere der beiden Strecken A_3A_1 und A_3A_2, und somit gilt (es sei mit m_i die Länge der längsten Seite in Δ_i bezeichnet) $\overline{A_3A_4} = \frac{2}{3}\overline{A_3M_{12}} < \frac{2}{3}m_1$; induktiv folgt $\overline{A_{3n+i}A_{3n+i+1}} < m_1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Weil $\frac{2}{3} < 1$, bilden die Länge der Seiten der Dreiecke Δ_i eine Nullfolge, ebenso die maximale Entfernung zweier Punkte im Innern der Dreiecke Δ_i. Damit kann es höchstens einen Punkt S geben, der in allen Dreiecken liegt.

Variante: Der Punkt S kann auch folgendermaßen beschrieben werden: Für $n = 1, 2, 3, \ldots$ sei der Mittelpunkt der Strecke A_nA_{n+2} mit B_n bezeichnet, und der Schwerpunkt des Dreiecks $B_nA_{n+1}A_{n+2}$ mit S_n. Dass alle S_i zusammenfallen kann man dann folgendermaßen zeigen: Der Punkt A_{n+3} ist Schwerpunkt im Dreieck $A_nA_{n+1}A_{n+2}$, liegt also auf der Strecke B_nA_{n+2} und teilt diese im Verhältnis 2 : 1. Der Punkt

B_{n+1} liegt dann ebenfalls auf der Strecke B_nA_{n+2} und teilt diese im Verhältnis 1 : 2. Also haben die Strecken B_nA_{n+1} und $B_{n+1}A_{n+3}$ den gleichen Mittelpunkt, folglich sind die Seitenhalbierende von A_{n+2} in den Dreiecken $B_nA_{n+1}A_{n+2}$ und $B_{n+1}A_{n+2}A_{n+3}$ identisch und damit auch ihre Schwerpunkte; diese liegen natürlich im Innern der Dreiecke Δ_n.

2. Beweis (vektoriell, mit Herleitung der Lage von S): Zunächst zeigen wir, dass es mindestens einen Punkt S gibt, der in allen Dreiecken liegt:

Das Dreieck Δ_1 hat einen positiven Flächeninhalt und sein Schwerpunkt liegt im Inneren. Nun hat Δ_2 zwei Ecken mit Δ_1 gemeinsam und die dritte Ecke liegt im Innern von Δ_1; somit hat auch Δ_2 einen positiven Flächeninhalt und keiner seiner Punkte liegt außerhalb von Δ_1. Induktiv folgt, dass für alle positiven ganzen Zahlen n das Dreieck Δ_n einen positiven Flächeninhalt hat und dass das Dreieck Δ_n von jedem Dreieck Δ_k mit $k < n$ umschlossen wird.

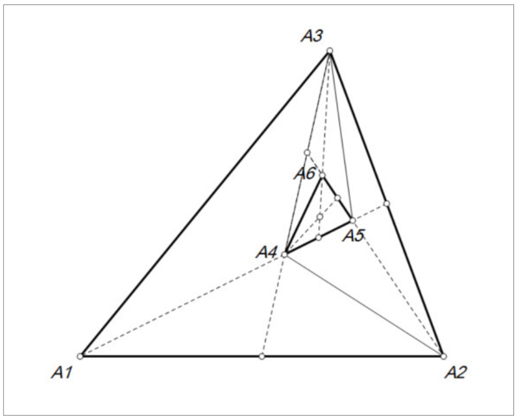
Wir können sogar schärfer schließen: Die Dreiecke Δ_n und Δ_{n+1} haben die Seite $A_{n+2}A_{n+3}$ gemeinsam; die Ecke A_{n+4} liegt auf s_n. Also liegt im Dreieck Δ_{n+1} die Seitenhalbierende von der Ecke A_{n+3} aus auf s_n. Somit liegen A_{n+3} und A_{n+4} beide auf s_n und beide sind im Innern von Δ_n. Mit analoger Begründung sind A_{n+4} und A_{n+5} beide Punkte im Innern von Δ_{n+1}, also auch innere Punkte von Δ_n. Damit gilt sogar für alle $k \le n-3$, dass alle Punkte von Δ_n (einschließlich des Randes) innere Punkte aller Dreiecke Δ_k sind. Also gibt es mindestens einen Punkt, der im Innern aller Dreiecke liegt.

Zwischenbemerkung: Die hier verwendete Argumentation benützt folgenden Satz aus der höheren Mathematik: Jede Folge von absteigenden beschränkten und abgeschlossenen Mengen besitzt einen nicht leeren Durchschnitt. Dies geht weit über den Schulstoff hinaus und ist keineswegs so trivial, wie es im ersten Moment erscheint. (Vgl. Bemerkungen am Schluss.)

Nun zeigen wir noch, dass es höchstens einen Punkt S gibt, der in allen Dreiecken liegt. Dabei benützen wir folgende Hilfssätze ohne Beweis):

HS 1: In jedem Dreieck ist jede Seitenhalbierende kürzer als die längste Seite.

HS 2: Der Schwerpunkt eines Dreiecks ist der Schnittpunkt seiner Seitenhalbierenden; er teilt diese im Verhältnis 2 : 1.



Wie oben gezeigt, liegen A_{n+3} und A_{n+4} beide auf s_n; es gilt damit

$$\overline{A_{n+3}A_{n+4}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot s_n = \frac{2}{9}\cdot s_n \le \frac{2}{9}\cdot m_n,$$

wobei m_n für die maximale Seitenlänge im Dreieck Δ_n steht.

Nun folgt induktiv, dass für alle n die Beziehung $\overline{A_{n+3}A_{n+4}} \le \left(\frac{2}{9}\right)^{\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor}\cdot m_1$ gilt. Weiter folgt aus $\frac{2}{9} < 1$, dass die Folge der Längen der Seiten A_nA_{n+1} eine Nullfolge bilden. Dann führt aber die Annahme, es gäbe zwei verschiedene Punkte S und S* mit positivem Abstand $\overline{SS^*} > 0$, die beide in allen Dreiecken Δ_n liegen, zum Widerspruch.

Nun zu Teil b): Wie in der Schule üblich identifizieren wir Punkte mit ihren Ortsvektoren. Als Ursprung wählen wir den Punkt A_1. Da die Punkte A_1, A_2 und A_3 nicht auf einer Geraden liegen, bilden die Vektoren $\vec{a} := \overrightarrow{A_1A_2}$ und $\vec{b} := \overrightarrow{A_1A_3}$ eine Basis, bezüglich derer der Ortsvektor jedes Punktes A_i eine eindeutige Darstellung der Form $\overrightarrow{A_i} = a_i\vec{a} + b_i\vec{b}$ mit geeigneten reellen Zahlen a_i und b_i besitzt. Offensichtlich ist $a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_3 = 0,\ b_1 = b_2 = 0,\ b_3 = 1$.

Nach bekannten Formeln ist der Schwerpunkt des Dreiecks Δn und damit der Punkt A_{n+3} durch den Ortsvektor

$$\overrightarrow{A_{n+3}} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{A_n} + \overrightarrow{A_{n+1}} + \overrightarrow{A_{n+2}}\right) = \frac{1}{3}\left[(a_n + a_{n+1} + a_{n+2})\vec{a} + (b_n + b_{n+1} + b_{n+2})\vec{b}\right]$$ gegeben.

Hieraus leiten wir eine rekursive Definition der Koordinaten (a_i,b_i) der Punkte A_i bezüglich der Basis $(\vec{a}, \vec{b})$ und des Ursprungs A_1 ab:

$$a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_3 = 0,\ a_{n+3} = \frac{1}{3}(a_n + a_{n+1} + a_{n+2})$$

$$b_1 = 0,\ b_2 = 0,\ b_3 = 1,\ b_{n+3} = \frac{1}{3}(b_n + b_{n+1} + b_{n+2}).$$

Nach Teilaufgabe a) gibt es genau einen Punkt S, der in allen Dreiecken liegt. Da ferner die maximale Länge der Dreieckseiten eine Nullfolge ist, ist auch die Entfernung der Punkte A_i von S eine Nullfolge; deswegen wird der Ortsvektor des Punktes S durch Koordinaten (a,b) dargestellt, die gleichzeitig Grenzwerte der beiden Folgen (a_i) und (b_i) sind.

Diese Grenzwerte leiten wir mit im Internet findbaren Lösungsstrategien für lineare Rekursionen 3. Grades her (hier sehr knapp ausgeführt):

Wir betrachten alle Folgen komplexer Zahlen, deren Glieder die Rekursion $x_{n+3} = \frac{1}{3}(x_n + x_{n+1} + x_{n+2})$ erfüllen. Jede dieser Folgen ist durch die drei Anfangsglieder x_1, x_2, und x_3 eindeutig bestimmt, kann also durch den Vektor $\mathbf{x} = [x_1,x_2,x_3]$ beschrieben werden. Sind nun zwei solche Folgen (x_i) und (y_i) gegeben, so kann man leicht nachrechnen, dass nach Vorgabe zweier (sogar komplexer) Zahlen a und b die Folge der Zahlen $(ax_i + by_i)$ ebenfalls die Rekursion erfüllt und durch den Vektor $a\mathbf{x} + b\mathbf{y} = [ax_1+by_1,ax_2+by_2,ax_3+by_3]$ gegeben ist. Diese Folgen bilden also einen Vektorraum über den komplexen Zahlen. Hat man eine Basis für diesen Vektorraum, so können die Glieder jeder beliebigen Folge als Linearkombination der Glieder dieser Basisfolgen berechnet werden.

Kann man nun die Glieder dieser Basisfolgen unter Umgehung der Rekursion explizit bestimmen, so gilt dies auch für die Glieder jeder beliebigen Folge. Geeignete solche Basisfolgen sind geometrische Folgen der Form (x_i), für die $x_i = x^i$.

Einsetzen in die Rekursion liefert die notwendige Bedingung $3x^{n+3} = x^n + x^{n+1} + x^{n+2}$ oder nach Ausscheiden der uninteressanten Lösung $x = 0$ äquivalent $3x^3 = x^2 + x^1 + 1$. Diese Gleichung liefert mit gängigen Lösungsverfahren die Lösungen $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{i\sqrt{2}-1}{3}$, $x_3 = \frac{-i\sqrt{2}-1}{3}$, also die Basisfolgen (1^i), $\left(\left(\frac{i\sqrt{2}-1}{3}\right)^i\right)$ und $\left(\left(\frac{-i\sqrt{2}-1}{3}\right)^i\right)$. Der Nachweis, dass die drei zugehörigen Vektoren linear unabhängig sind, also tatsächlich eine Basis bilden, wird hier nicht ausgeführt.

Hieraus schließen wir: Zu jeder Folge (a_i), die die obige Rekursion erfüllt, gibt es drei komplexe Zahlen r, s und t, sodass für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$a_n = r\cdot\left(\frac{i\sqrt{2}-1}{3}\right)^n + s\cdot\left(\frac{-i\sqrt{2}-1}{3}\right)^n + t\cdot 1^n \qquad (*)$$

Es ist nun $\left|\frac{i\sqrt{2}-1}{3}\right| = \left|\frac{-i\sqrt{2}-1}{3}\right| = \frac{\sqrt{3}}{3} < 1$; d.h. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = t$. Für unsere Zwecke genügt es also, die Variable t zu berechnen; hierzu betrachten wir das lineare Gleichungssystem mit den Variablen r, s und t, das sich aus den Bedingungen $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 0$ ergibt; nach einiger Rechnung erhält man hieraus $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = t = \frac{1}{3}$; die entsprechende Rechnung für die Folge (b_i) ergibt $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n) = \frac{1}{2}$.

Hieraus leiten wir die gesuchten Teilverhältnisse ab: Die Gerade A_3S lässt sich durch die Vektoren $\vec{x}(\lambda) = \vec{b} + \lambda\left(-\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\lambda\right)\vec{b} + \frac{1}{3}\lambda\vec{a}$ mit reellem λ beschreiben; für $\lambda = 2$ erhält man den Vektor $\frac{2}{3}\vec{a}$, also einen Punkt auf der Geraden A_1A_2 und damit den Schnittpunkt der Geraden A_3S

mit A_1A_2, also T. Aus dem Wert $\lambda = 2$ liest man $\overline{TS} : \overline{SA_3} = 1:1$ ab, aus dem Koeffizienten $\frac{2}{3}$ liest man $\overline{A_1T} : \overline{TA_2} = 2:1$ ab.

3. Beweis (vektoriell; letztlich eine Kopie des 1. Beweises): Wir legen uns zunächst Hilfsmittel zurecht, mit denen wir die Lage eines Punktes P relativ zum Dreieck Δ_n beschreiben können.

Hierzu definieren wir $\vec{b_i} := \overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ und $\vec{c_i} := \overrightarrow{A_iA_{i+2}}$ ($i = 1, 2, 3, ...$). Damit wird jedes Dreieck Δ_i ausgehend von der Ecke A_i durch die Vektoren $\vec{b_i}$ und $\vec{c_i}$ aufgespannt. Der Schwerpunkt von Δ_i ist bekanntlich durch $\vec{A_i} + \frac{1}{3}(\vec{b_i} + \vec{c_i})$ beschrieben, sodass zusammen mit der Rekursionsvorschrift für die Punkte A_i folgt

$$\overrightarrow{b_{i+1}} = \overrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}} = \overrightarrow{A_iA_{i+2}} + \overrightarrow{A_{i+1}A_i} = \vec{c_i} - \vec{b_i} \quad \text{und}$$

$$\overrightarrow{c_{i+1}} = \overrightarrow{A_{i+1}A_{i+3}} = \overrightarrow{A_{i+1}A_i} + \overrightarrow{A_iA_{i+3}} = -\vec{b_i} + \frac{1}{3}(\vec{b_i} + \vec{c_i}) = \frac{1}{3}\vec{c_i} - \frac{2}{3}\vec{b_i}.$$

Zuerst schätzen wir die Längen der Seiten von Δ_n ab: Mit m_i sei die Länge der längsten Seite von Δ_i bezeichnet. Dann ergibt mehrfaches Anwenden der Rekursionsvorschrift:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{b_{i+3}} &= \overrightarrow{c_{i+2}} - \overrightarrow{b_{i+2}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{c_{i+1}} - \frac{2}{3}\overrightarrow{b_{i+1}} - (\overrightarrow{c_{i+1}} - \overrightarrow{b_{i+1}}) \\ &= -\frac{2}{3}(\frac{1}{3}\vec{c_i} - \frac{2}{3}\vec{b_i}) + \frac{1}{3}(\vec{c_i} - \vec{b_i}) = \frac{1}{9}(\vec{c_i} + \vec{b_i}).\end{aligned}$$

hieraus folgt $\left|\overrightarrow{b_{i+3}}\right| \le \frac{1}{9}\left(\left|\vec{c_i}\right| + \left|\vec{b_i}\right|\right) \le \frac{2}{9} m_i$.

Induktiv erhält man sofort $\left|\overrightarrow{b_{i+3k}}\right| \le \left(\frac{2}{9}\right)^k \cdot m_i$; es folgt, dass die Längen der $\vec{b_i}$ und damit die Längen der Dreieckseiten der Dreiecke Δ_n eine Nullfolge bilden; dies gilt auch für die maximale Entfernung zweier Punkte im Innern der Dreiecke. Damit kann es höchstens einen Punkt S geben, der in allen Dreiecken Δ_n liegt.

Mit vollständiger Induktion zeigen wir nun, dass $\{\vec{b_i}, \vec{c_i}\}$ für alle i linear unabhängig ist: Für $i = 1$ ist dies richtig, weil A_1, A_2 und A_3 nicht auf einer Geraden liegen; und aus der Annahme, die Aussage sei richtig ist für ein bestimmtes i, folgt aus

$$\vec{0} = \beta\,\overrightarrow{b_{i+1}} + \gamma\,\overrightarrow{c_{i+1}} = \beta(\vec{c_i} - \vec{b_i}) + \gamma(\frac{1}{3}\vec{c_i} - \frac{2}{3}\vec{b_i}) = -(\beta + \frac{2}{3}\gamma)\vec{b_i} + (\beta + \frac{1}{3}\gamma)\,\overrightarrow{c_{i+1}}$$

zusammen mit der linearen Unabhängigkeit von $\{\vec{b_i}, \vec{c_i}\}$ sofort $\beta + \frac{2}{3}\gamma = \beta + \frac{1}{3}\gamma = 0$, also $\beta = \gamma = 0$, also die lineare Unabhängigkeit von $\{\overrightarrow{b_{i+1}}, \overrightarrow{c_{i+1}}\}$.

Damit stellen alle $\{\vec{b_i}, \vec{c_i}\}$ eine Basis unseres Vektorraumes dar; d.h. jeder Punkt P in der Ebene besitzt eine Darstellung der Form $\vec{P} = \overrightarrow{A_n} + \beta_n\overrightarrow{b_n} + \gamma_n\overrightarrow{c_n}$, wobei die Koeffizienten $(\beta_n \mid \gamma_n)$ eindeutig bestimmt sind. Übrigens sind diese gleichzeitig Koordinaten des Punktes P bez. des Achsenkreuzes, das durch das Dreieck Δ_n mit Ursprung A_n und den Achsen $\overline{A_nA_{n+1}}$ und $\overline{A_nA_{n+2}}$ vorgegeben ist. Nun haben wir ein einfaches Kriterium für die Lage des Punktes P relativ zum Dreieck Δ_n:

P liegt im Innern des Dreiecks $\Delta_n \Leftrightarrow 0 < \beta_n$ und $0 < \gamma_n$, und $\beta_n + \gamma_n < 1$. (*)

Wir suchen nun einen Punkt S, der in allen Dreiecken Δ_n liegt, d.h. einen Punkt, dessen Koordinaten $(\beta_n \mid \gamma_n)$ die Bedingung (*) für alle n erfüllen. Wir vermuten, dass für diesen Punkt zusätzlich $(\beta_n \mid \gamma_n) = (\beta_{n+1} \mid \gamma_{n+1})$ für alle n gilt (eine hinreichende, aber wohl nicht notwendige Bedingung, die

die Suche einfacher macht). Der Zusammenhang zwischen den Koordinaten $(\beta_n \mid \gamma_n)$ und $(\beta_{n+1} \mid \gamma_{n+1})$ ist folgender:

$$\vec{S} = \overrightarrow{A_{n+1}} + \beta_{n+1}\overrightarrow{b_{n+1}} + \gamma_{n+1}\overrightarrow{c_{n+1}} = \overrightarrow{A_n} + \overrightarrow{b_n} + \beta_{n+1}(\vec{c_i} - \vec{b_i}) + \gamma_{n+1}(\frac{1}{3}\vec{c_i} - \frac{2}{3}\vec{b_i})$$

$$= \overrightarrow{A_n} + (1 - \beta_{n+1} - \frac{2}{3}\gamma_{n+1})\overrightarrow{b_n} + (\beta_{n+1} + \frac{1}{3}\gamma_{n+1})\overrightarrow{c_n} = \overrightarrow{A_n} + \beta_n\overrightarrow{b_n} + \gamma_n\overrightarrow{c_n}.$$

Aus der Eindeutigkeit der Darstellungen folgt nun $\beta_n = 1 - \beta_{n+1} - \frac{2}{3}\gamma_{n+1}$ und $\gamma_n = \beta_{n+1} + \frac{1}{3}\gamma_{n+1}$.

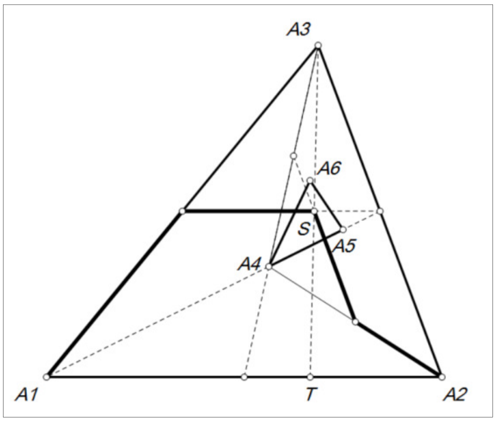
Fordert man $\beta := \beta_n = \beta_{n+1}$ und $\gamma := \gamma_n = \gamma_{n+1}$, erhält man $6\beta = 3 - 2\gamma$ und $3\beta = 2\gamma$, was sich auflöst zu $\gamma = \frac{1}{2}$ und $\beta = \frac{1}{3}$.

Als Zwischenergebnis haben wir so die Behauptung von Teilaufgabe a) bewiesen:

Es gibt eine Punkt S, der in allen Dreiecken Δ_n enthalten ist, nämlich

$$\vec{S} = \overrightarrow{A_1} + \frac{1}{3}\overrightarrow{A_1A_2} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A_1A_3},$$

und dies ist auch der einzige Punkt mit dieser Eigenschaft.



Weiter können wir aus den Koordinaten von S schnell die in Teilaufgabe b) gesuchten Teilverhältnisse ablesen: Weil T auf der Geraden A_1A_2 liegt, liefert die zweite Koordinate zusammen mit Strahlensatz mit Zentrum A_3 den Wert

$\overline{TS} : \overline{TA_3} = \frac{1}{2}$; hieraus folgt $\overline{TS} : \overline{SA_3} = 1 : 1$;

und beide Koordinaten zusammen liefern mit Strahlensatz mit Zentrum A_3 den Wert $\overline{A_1T} : \overline{A_1A_2} = (\frac{1}{3} : \frac{1}{2}) : 1 = \frac{2}{3}$; hieraus folgt $\overline{A_1T} : \overline{TA_2} = 2 : 1$.

Bemerkung: Um nachzuweisen, dass es nur einen Punkt S im Inneren aller Dreiecke gibt, ist der Nachweis, dass der Flächeninhalt der Dreiecke Δ_i eine Nullfolge bildet, nicht ausreichend. (Gegenbeispiel: Die Folge der Dreiecke mit den Eckpunkten $(0 \mid -{}^1/_i)$, $(0 \mid {}^1/_i)$, $(0|1)$. Die Folge ihrer Flächeninhalte hat den Grenzwert 0, aber jedes Dreieck enthält vielen Punkte des Intervalls [0;1] auf der x – Achse.) Ausreichend ist dagegen der Nachweis, dass die Länge der jeweils längsten Seite der Dreiecke Δ_n eine Nullfolge bildet.

Um nachzuweisen, dass es einen Punkt gibt, der im Innern aller Dreiecke liegt, genügt es nicht zu argumentieren, dass jedes Dreieck Δ_{i+1} vom Dreieck Δ_i umschlossen ist. (Gegenbeispiel: Es gibt keinen Punkt, der im Innern aller Dreiecke mit den Eckpunkten $(0 \mid 0)$, $(0 \mid {}^1/_i)$, $({}^1/_i \mid 0)$ liegt). Übersehen wird bei dieser Argumentation, dass die Dreiecke gemeinsame Randstrecken besitzen. Ausreichend wird der Nachweis, wenn man zusätzlich nachweist, dass jedes Dreiecke Δ_{i+3} vollständig im Innern des Dreiecks Δ_i liegt.