BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK
Bildung & Begabung

Aufgaben und Lösungen

1. Runde 2015

Über Kommentare und Ergänzungen zu diesen Lösungsbeispielen freuen wir uns!

» **KORREKTURKOMMISSION | KARL FEGERT**

» **BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK**

Kortrijker Straße 1, 53177 Bonn | Postfach 20 02 01, 53132 Bonn | Tel.: (02 28) 9 59 15-20, Fax: (02 28) 9 59 15-29
info@bundeswettbewerb-mathematik.de, www.bundeswettbewerb-mathematik.de

Stand: 1. Mai 2015

GEFÖRDERT VOM

Bundesministerium für Bildung und Forschung

Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft

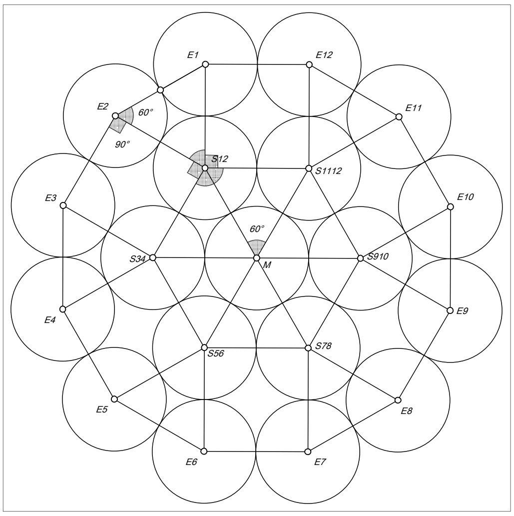
Aufgabe 1: Zwölf 1–Euro–Münzen werden flach so auf einen Tisch gelegt, dass ihre Mittelpunkte die Ecken eines regelmäßigen 12–Ecks bilden und sich benachbarte Münzen berühren.

Zeige, dass sich weitere sieben 1–Euro–Münzen in das Innere dieses Rings aus Münzen flach auf den Tisch legen lassen.

Bezeichnungen: Die Ecken des regelmäßigen 12–Ecks seien fortlaufend gegen den Uhrzeigersinn mit E_1, E_2, ..., E_{12} bezeichnet.

Beweis: Wir wählen die Längeneinheit so, dass die 1–Euro–Münze den Durchmesser 1 hat.

Dann berühren sich zwei flach auf dem Tisch liegende Münzen genau dann, wenn ihre Mittelpunkte den Abstand 1 haben; und man kann eine Münze genau dann flach auf den Tisch legen, wenn der Abstand ihres Mittelpunktes zum Mittelpunkt jeder anderen flach auf dem Tisch liegenden Münze mindestens 1 ist.



Nach Voraussetzung hat also das 12–Eck, das die Mittelpunkte der ersten 12 Münzen bilden, die Kantenlänge 1. Nun ergänzen wir im Inneren des 12–Ecks weitere 7 Punkte nach folgender Vorschrift (vgl. Figur):

Auf jeder zweiten Seite des regelmäßigen 12–Ecks konstruieren wir nach innen ein gleichseitiges Dreieck. Die Spitzen dieser sechs Dreiecke sind sechs der sieben neuen Punkte, sie seien gemäß den Indices ihrer Basis mit S_{12}, S_{34}, S_{56}, ..., S_{1112} bezeichnet.

Der siebte neue Punkt sei der Mittelpunkt des 12–Ecks, er sei mit M bezeichnet.

Nach Konstruktion hat jede Ecke S von den benachbarten Ecken E den Abstand 1.

Nach einer bekannten Formel hat der Innenwinkel im regelmäßigen 12–Eck die Weite $\frac{12-2}{12}\cdot 180° = 150°$; jeder Innenwinkel im gleichseitigen Dreieck die Weite 60°. Damit teilen die inneren Dreieckseiten jeden Innenwinkel des Zwölfecks in einen 60°–Winkel und einen 90°–Winkel auf. Also bildet jede zweite 12–Eckseite zusammen mit den beiden anliegenden gleichlangen Dreieckseiten einen rechten Winkel und bestimmt damit ein Quadrat der Kantenlänge 1. Also haben zwei aufeinander folgende Ecken S stets den Abstand 1.

Nun betrachten wir das Sechseck, das von den Ecken S gebildet wird. Jede Seite hat die Länge 1; und jeder Innenwinkel die Weite $360° - 60° - 2 \cdot 90° = 120°$. Also bilden die Ecken S ein regelmäßiges Sechseck, das man bekanntlich durch seinen Mittelpunkt – er ist aus Symmetriegründen identisch mit M – in sechs gleichseitige Dreiecke mit Seitenlänge 1 aufteilen kann. Damit hat der Punkt M von jedem Punkt S den Abstand 1.

Alle in der Figur eingezeichneten Strecken haben also die Länge 1; und zwei Punkte, die nicht durch eine Strecke verbunden sind, haben einen Abstand, der größer ist als 1. Weiter liegen alle zusätzlichen Punkte im Innern des 12–Ecks. Legt man also sieben weitere Münzen mit ihren Mittelpunkten auf die Punkte S_{11}, S_{34}, ...,S_{1112} und M, so liegen sie im Innern des 12–Ecks und erfüllen die im 1. Absatz formulierte Bedingung, d.h. man kann sie flach auf den Tisch legen.

Bemerkung: Dass zwei Punkte, die in der Figur nicht mit einer Strecke verbunden sind, einen Abstand haben, der größer als 1 ist, erscheint offensichtlich und wurde nicht bewiesen. Ein mögliche Beweisführung würde die betr. Punkte in ein Dreieck einbinden, in dem eine Seite die Länge 1 hat, und dann nachweisen, dass der Seite mit der Länge 1 der kleinere Winkel gegenüberliegt.

Aufgabe 2: Eine Summe aus 335 paarweise verschiedenen positiven ganzen Zahlen hat den Wert 100 000.

a) Wie viele ungerade Summanden müssen in der Summe mindestens vorkommen?

b) Wie viele ungerade Summanden können es höchstens sein?

Anmerkung: Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen!

Bezeichnungen: Mit "Zahlen" sind immer positive ganze Zahlen gemeint.

Antwort: zu a): In dieser Summe kommen **mindestens 20 ungerade** Summanden vor.

zu b): Es können **höchstens 314 ungerade** Summanden sein.

1. Beweis: Im Beweis benützen wir die aus dem Schulunterricht bekannte Formel für die Summe der ersten n Zahlen (häufig nach Gauss benannt, aber sicher nicht von ihm erfunden)

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

dazu die unmittelbar hieraus folgende Formel für die Summe der ersten n geraden Zahlen

$$2 + 4 + 6 + ... + 2n = n\,(\,n + 1)$$

und für die Summe der ersten n ungeraden Zahlen

$$1 + 3 + ... + (2n - 1) = n^2.$$

zu a): Die Summe der 316 kleinsten geraden Zahlen ist nach obiger Formel $316 \cdot 317 = 100\,172 > 100\,000$. Hieraus schließen wir, dass jede Summe mit 316 geraden positiven ganzen Zahlen größer ist als 100 000, d.h. in der geforderten Summe können sicher nicht mehr als 315 gerade Zahlen vorkommen. Demnach müssen mindestens $335 - 315 = 20$ ungerade Summanden vorkommen.

Tatsächlich gibt es eine solche Summe mit genau 20 ungeraden Zahlen: Es ist offensichtlich

$$1 + 3 + 5 + ... + 37 \quad + \quad 99 \quad + \quad 2 + 4 + 6 + ... + 2\cdot 315$$
$$= 19^2 + 99 + 315\cdot 316 = 361 + 99 + 99\,540 = 100\,000$$

eine Summe mit 20 ungeraden positiven Summanden und 315 geraden positiven Summanden, zusammen also 335 ganzen positiven Zahlen, und ihre Summe ist 100 000.

zu b): Die Summe der 317 kleinsten ungeraden Zahlen ist nach obiger Formel $317^2 = 100\,489 > 100\,000$. Hieraus schließen wir, dass jede Summe mit 317 ungeraden positiven ganzen Zahlen größer ist als 100 000, d.h. in der geforderten Summe können sicher nicht mehr als 316 ungerade Zahlen vorkommen. Die geforderte Summe kann aber nicht genau 316 ungerade Summanden haben: Denn die Summe der 316 kleinsten ungeraden Zahlen hat schon den Wert $316^2 = 99\,856$, die Summe der restlichen Summanden, also der geraden Summanden – dies sind $335 - 316 = 19$ Summanden – dürfte dann höchstens den Wert $100\,000 - 99\,856 = 144$ haben. Die kleinstmögliche Summe mit 19 geraden positiven Summanden hat aber schon den Wert $19\cdot 20 = 380 > 144$.

Die geforderte Summe kann aber auch nicht genau 315 ungerade Summanden haben: In diesem Fall käme in der Gesamtsumme eine ungerade Anzahl von ungeraden Summanden vor, der Wert der Summe wäre also ungerade und könnte insbesondere nicht den Wert 100 000 annehmen.

Es können also nicht mehr als 314 ungerade Summanden sein. Tatsächlich gibt es eine solche Summe mit genau 314 ungeraden Summanden, z.B.

$$1+3+5+\ldots+(2\cdot 314-1) \quad + \quad 2+4+6+\ldots+40 \quad + \quad 984$$
$$= \; 314^2 + 20\cdot 21 + 984 \; = \; 98\,596 + 420 + 984 \; = \; 100\,000.$$

2. Beweis: Jede Summe aus 335 paarweise verschiedenen positiven ganzen Summanden, von denen n ungerade sind, hat einen Wert, der nicht kleiner ist als die Summe aus den n kleinsten ungeraden Zahlen und den $335-n$ kleinsten geraden Zahlen. Nach bekannten Formeln ist dies

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) + \sum_{i=1}^{335-n} 2i \; = \; n^2 + 2\cdot\frac{(335-n)(335-n+1)}{2} \; = \; 2n^2 - 671n + 112\,560.$$

Für jede Summe S mit 335 paarweise verschiedenen Summanden, von denen genau n ungerade sind, gilt also $2n^2 - 671n + 112\,560 \le S$.

Sei nun eine Summe mit 335 paarweise verschiedenen Summanden mit genau n ungeraden Summanden gegeben, für die $2n^2 - 671n + 112\,560 \le 100\,000$ gilt, dies ist äquivalent zu $2n^2 - 671n + 12\,560 \le 0$. Entweder hat die Summe den Wert 100 000 oder wir können ihren größten Summanden um eine geeignete Zahl so vergrößern, dass die Summe den Wert 100 000 annimmt und die Summanden weiterhin paarweise verschieden sind. Wenn die Summe zusätzlich gerade ist – dies ist genau dann der Fall, wenn n gerade ist –, wird dieser größte Summand um eine grade Zahl vergrößert und die Anzahl ungerader Summanden bleibt gleich, ebenso die Anzahl der geraden Summanden. Wenn die Summe ungerade ist, ist dies nicht möglich. Somit haben wir folgende notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Summe im Sinne der Aufgabenstellung mit genau n ungeraden Summanden existiert: Es muss $2n^2 - 671n + 12\,560 \le 0$ sein und n gerade.

Der Koeffizient von n^2 im quadratischen Term auf der linken Seite der Ungleichung ist positiv. Nach bekannten Unterrichtsinhalten wird die Ungleichung genau von den Zahlen n erfüllt, die im Intervall zwischen den Nullstellen der linken Seite liegen, d.h. von allen Zahlen n, für die

$$\frac{671-\sqrt{671^2-4\cdot 2\cdot 12560}}{4} \;\le\; n \;\le\; \frac{671+\sqrt{671^2-4\cdot 2\cdot 12560}}{4}.$$

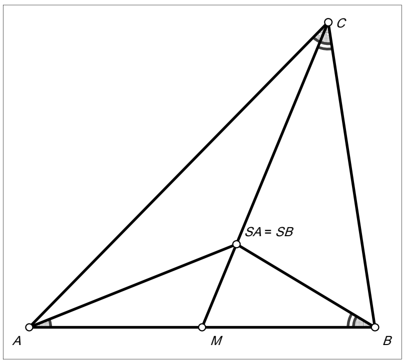
Dies sind alle Zahlen n im Intervall [19,89... ; 315,60...]. Da n zusätzlich positiv ganz und gerade sein muss, lesen wir ab, dass $n = 20$ die Mindestzahl an ungeraden Zahlen in der Summe ist und $n = 314$ die Maximalzahl.

Aufgabe 3: Im Dreieck ABC sei M der Mittelpunkt des Seite AB. An den Strahl [AB wird in A der Winkel $\angle ACM$ angetragen, an den Strahl [BA in B der Winkel $\angle MCB$; dabei wird die Drehrichtung jeweils so gewählt, dass die freien Schenkel auf der gleichen Seite von AB wie der Punkt C liegen.

Beweise, dass sich die freien Schenkel auf der Geraden CM schneiden.

Anmerkung: Mit Strahl [XY (in manchen Lehrbüchern auch Halbgerade [XY genannt) wird derjenige Teil der Geraden XY bezeichnet, der aus der Strecke XY zusammen mit ihrer geradlinigen Verlängerung über Y hinaus besteht.

1. Beweis 1 (Ähnlichkeit zweier Teildreiecke): Den Schnittpunkt der Geraden CM mit dem freien Schenkel des Winkels in A bezeichnen wir mit S_A, den Schnittpunkt der Geraden CM mit dem freien Schenkel des Winkels in B bezeichnen wir mit S_B. Der Punkt S_A existiert, weil $\angle ACM + \angle CMA = 180° - \angle MAC < 180°$, analog weisen wir die Existenz von S_B nach. Ferner liegen C, S_A und S_B in der gleichen Halbebene bezüglich der Geraden AB.

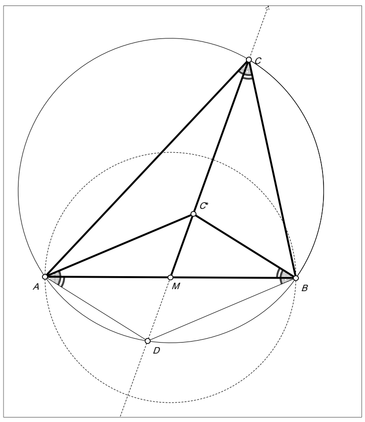


Nun sind die Dreiecke ΔAMC und ΔS_AMA ähnlich, weil sie in zwei Winkeln übereinstimmen: Der Winkel bei M ist Innenwinkel in beiden Dreiecken und die Winkel $\angle MAS_A$ und $\angle ACM$ sind nach Voraussetzung gleich. Mit analoger Argumentation schließen wir auf die Ähnlichkeit der Dreiecke ΔBMC und ΔS_BMB. Also ist

$$\frac{\overline{MS_A}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{MC}} \text{ und } \frac{\overline{MS_B}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}},$$

und da nach Voraussetzung $\overline{MA} = \overline{MB}$, folgt sofort $\overline{MS_A} = \frac{\overline{MA}^2}{\overline{MC}} = \frac{\overline{MB}^2}{\overline{MC}} = \overline{MS_B}$; und da zusätzlich S_A und S_B in der gleichen Halbebene bez. der Geraden AB liegen, sind die Punkte S_A und S_B identisch. Hieraus folgt sofort die Behauptung.

2. Beweis (Umfangswinkelsatz, Eigenschaften eines Parallelogramms): Der Schnittpunkt der beiden freien Schenkel sei mit C* bezeichnet. Er existiert, weil die beiden angetragenen Winkel zusammen die Weite des Winkels $\angle ACB < 180°$ haben, hieraus folgt auch, dass C* und C in der gleichen Halbebene bzgl. der Geraden AB liegen.



Nun betrachten wir den von C verschiedenen Schnittpunkt der Geraden CM mit dem Umkreis des Dreiecks ABC, er sei mit D bezeichnet. Da die Gerade CM die Sehne AB im Innern des Umkreises schneidet, liegen C und D auf verschiedenen Seiten von AB. Nach Umfangswinkelsatz und Voraussetzung gilt dann $\angle ABD = \angle ACD = \angle ACM = \angle MAC^* = \angle BAC^*$. Insbesondere ist dann $AC^* \parallel BD$; und mit analogen Argumenten erhalten wir $\angle DAB = \angle DCB = \angle MCB = \angle C^*BM = \angle C^*BA$ und $AD \parallel BC^*$. Also ist das Viereck ADBC* ein Parallelogramm. Da in jedem Parallelogramm sich die Diagonalen gegenseitig halbieren, ist DM die zweite Diagonale, d.h. C* liegt auf der Geraden DM, diese ist nach Konstruktion identisch mit der Geraden CM. Das war zu zeigen.

Variante (nur skizziert): Man definiert D als Bild von C* bei Punktspiegelung an M. Kurze Winkelrechnung ergibt $\angle BDA + \angle ACB = 180°$, damit ist ADBC ein Kreisviereck. Der Umfangswinkelsatz liefert $\angle BAC^* = \angle ABD = \angle ACD = \angle ACM$ und analog $\angle C^*BM = \angle MCB$. Zusammen mit der Eindeutigkeit der Konstruktion folgt die Behauptung.

3. Beweis (vgl. Figur zu Beweis 2): Wir betrachten die Spiegelung am Thaleskreis über der Strecke AB; das Bild von C bei dieser Spiegelung sei C*. Nach Definition der Kreisspiegelung ist C* derjenige

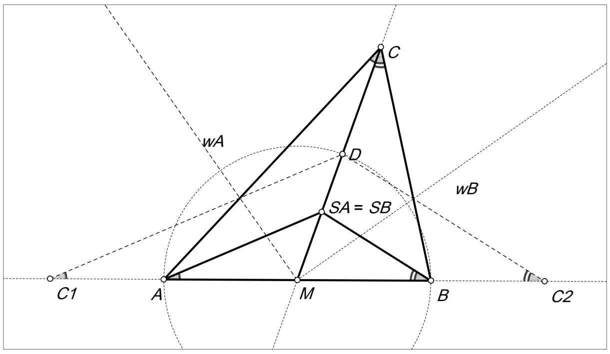
Punkt, der auf dem Strahl [MC liegt und für den $\overline{MC}\cdot\overline{MC^*} = \overline{MA}^2$ gilt; und da zusätzlich $\overline{MA} = \overline{MB}$, können wir dies auflösen zu

$$\frac{\overline{MC^*}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{MC}} \text{ und } \frac{\overline{MC^*}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.$$

Damit stimmen die Dreiecke ΔAMC^* und CMA im Verhältnis zweier Seiten überein, zudem ist der Winkel, den diese Seiten einschließen, gleich, d.h. es ist $\angle C^*MA = \angle CMA$. Also sind sie ähnlich, also gilt auch $\angle MAC^* = \angle ACM$. Mit analoger Schlussweise folgt $\angle C^*BM = \angle MCB$.

Da die in der Aufgabenstellung beschriebene Konstruktion zu eindeutig bestimmten freien Schenkeln führt, ist C* auf der Geraden MC der Schnittpunkt dieser beiden freien Schenkel.

4. Beweis (Spiegelung, zentrische Streckung): Die Schnittpunkte der freien Schenkel der in A und B angetragenen Winkel mit der Seitenhalbierenden CM heißen S_A bzw. S_B. Der Punkt S_A existiert, weil
$\angle ACM + \angle CMA = 180° - \angle MAC < 180°$,
analog weist man die Existenz von S_B nach.



Wir spiegeln das Dreieck ΔAMC an der Winkelhalbierenden w_A des Winkels $\angle CMA$. Das Bild von C heiße C_1, das Bild von A heiße D, der Punkt M wird auf sich selbst abgebildet. Da die Symmetrieachse gleichzeitig Winkelhalbierende ist, liegt C_1 auf dem Strahl [MA und D auf dem Strahl [MC.

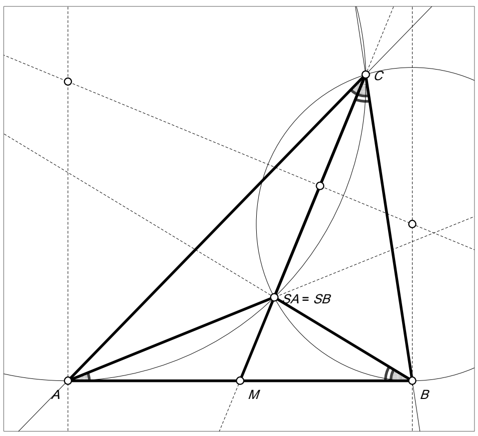
Weil zusätzlich $\overline{MB} = \overline{MA} = \overline{MD}$, ist D der Schnittpunkt des Strahls [MC mit dem Thaleskreis über der Strecke AB. Weiter haben nach Voraussetzung der Winkel $\angle MC_1D$ und der in A angetragene Winkel die gleiche Weite, nämlich die des Winkels $\angle ACM$. Sie sind ferner Stufenwinkel, also ist $C_1D \parallel AS_A$. Damit ist S_A das Bild von D bei der zentrischen Streckung mit Zentrum M und dem Streckfaktor $\overline{AM} : \overline{C_1M}$.

Nun spiegeln wir das Dreiecks ΔBMC an der Winkelhalbierenden w_B des Winkels $\angle BMC$. Analog schließen wir: M wird auf sich selbst abgebildet; das Bild von C heiße C_2, es liegt auf dem Strahl [MB. Das Bild von B ist der Schnittpunkt von [MC mit dem Thaleskreis über der Strecke AB. Damit ist D sowohl Bild von B bei der Spiegelung an w_B als auch Bild von A bei der Spiegelung an w_A. Weiter ist auch $C_2D \parallel BS_B$ und damit S_B das Bild von D bei zentrischer Streckung mit Zentrum M und Streckfaktor $\overline{BM} : \overline{C_2M}$.

Beide genannten Streckungen haben das gleiche Zentrum, und da nun zusätzlich $\overline{C_1M} = \overline{MC} = \overline{MC_2}$ und $\overline{AM} = \overline{BM}$, sind auch ihre Streckfaktoren gleich, also ist $S_A = S_B$, dies war zu zeigen.

Bemerkungen: Zu einem vollständigen Beweis gehört eine Begründung für die Existenz des Schnittpunktes der beiden freien Schenkel; bei manchen Beweisen muss auch gezeigt werden, dass dieser Schnittpunkt und der Punkt C in der gleichen Halbebene bez. der Gerade AB liegen.

Aus dem oben Gesagten folgt, dass der betrachtete Schnittpunkt das Bild von C bei Spiegelung am Thaleskreis über AB ist. Damit ermöglicht die Konstruktion der Aufgabe einen alternativen Zugängen zur Kreisspiegelung. Wendet man die in der Aufgabe vorgegebene Konstruktion auf das Dreieck ΔABS_A an, so erhält man wieder das Dreieck ΔABC.



Zum Beweis könnte man auch "schweres Geschütz" auffahren: Nach Sehnen–Tangenten–Satz (eine Erweiterung des Umfangswinkelsatzes auf den Grenzfall, dass der Umfangswinkel über einer Sehne seinen Scheitel im Endpunkt der Sehne hat und so zum Winkel zwischen dieser Sehne und der Tangente wird) ist die Gerade AB Tangente an den Umkreis des Dreiecks ΔCS_AA im Punkt A, und auch Tangente an den Umkreis des Dreiecks ΔCS_BB im Punkt B (Bez. aus dem 1. Beweis). Dann gilt nach Sekantensatz (oder Theorie der Potenz eines Punktes bezüglich eines Kreises) $\overline{MC} \cdot \overline{MS_A} = \overline{MA}^2 = \overline{MB}^2 = \overline{MC} \cdot \overline{MS_B}$, woraus $S_A = S_B$ folgt.

Aufgabe 4: Das soziale Netzwerk "BWM" hat viele Mitglieder. Man weiß: Wählt man irgendwelche vier Mitglieder davon aus, dann ist immer eines von diesen vier Mitgliedern mit den drei anderen befreundet.

Ist dann unter irgend vier Mitgliedern immer eines, das mit allen Mitgliedern von "BWM" befreundet ist?

Anmerkungen: Wenn Mitglied A mit Mitglied B befreundet ist, dann ist auch Mitglied B mit Mitglied A befreundet.
Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.

Antwort: Ja, unter irgend vier Mitgliedern ist immer eines, das mit allen Mitgliedern von "BWM" befreundet ist.

1. Beweis: Wenn jedes Mitglied mit jedem befreundet ist, gibt es insbesondere in jeder Vierergruppe eines, das mit allen Mitgliedern von "BWM" befreundet ist und es ist nichts mehr zu zeigen.

In allen anderen Fällen gibt es mindestens zwei Mitglieder – sie seien mit A und B benannt –, die nicht miteinander befreundet sind. Ein Mitglied, das sowohl mit A also auch mit B befreundet ist, nennen wir *Groupie*, eines, das mit wenigstens einem der Mitglieder A oder B nicht befreundet ist, nennen wir *Nerd*.

Nun betrachten wir zwei beliebige andere Mitglieder X und Y (da in der Aufgabenstellung von "irgend vier Mitgliedern" die Rede ist, nehmen wir an, dass diese existieren). In der Vierergruppe A, B, X, Y gibt es nach Voraussetzung ein Mitglied, das mit jedem anderen in dieser Vierergruppe befreundet ist; und da A und B nicht befreundet sind, kommen hierfür nur X oder Y in Frage. Also schließen wir:

(1) Insbesondere sind dann X und Y befreundet,

(2) mindestens eines der Mitglieder X und Y ist ein Groupie,

(3) höchstens eines der Mitglieder X und Y ist ein Nerd.

Da wir bei der Auswahl von X und Y frei waren, sind nach (1) alle von A und B verschiedenen Mitglieder untereinander befreundet; und da jeder Groupie sowohl mit A als auch mit B befreundet ist, ist jeder Groupie sogar mit allen Mitgliedern des Netzwerks befreundet.

Ferner kann es im gesamten Netzwerk außer A und B noch höchstens einen Nerd geben: Gäbe es nämlich zwei Nerds – wir bezeichnen sie mit N_1 und N_2 –, dann gäbe es in der Vierergruppe A, B, N_1, N_2 entgegen der Voraussetzung kein Mitglied, das mit jedem der drei anderen befreundet ist. Also gibt es im gesamten Netzwerk höchstens 3 Mitglieder, die nicht Groupie sind.

In jeder Vierergruppe gibt es also mindestens ein Groupie, und dieses ist mit jedem Mitglied im Netzwerk befreundet.

2. Beweis: Ein Mitglied heiße *Gruppenfreund in einer Vierergruppe*, wenn es mit jedem der drei anderen Mitglieder dieser Vierergruppe befreundet ist; es heiße *Superfreund*, wenn es mit jedem Mitglied des Netzwerkes befreundet ist.

Wir wählen irgendwelche vier Mitglieder des Netzwerkes aus und weisen für jede mögliche Wahl die Existenz eines Superfreundes in der Vierergruppe nach. Die gewählten vier Mitglieder seien mit A, B, C und D benannt. Nun unterscheiden wir zwei Fälle:

Fall 1: Es gibt zwei Mitglieder unter diesen Vieren, die nicht befreundet sind. O.B.d.A. seien dies C und D. Nach Voraussetzung existiert in dieser Gruppe ein Gruppenfreund, und da dies weder C noch D sein kann, können wir o.B.d.A. annehmen, dass dies A ist. Nun betrachten wir die Vierergruppen A, C, D, X, wobei wir für X der Reihe nach alle von A, C und D verschiedenen Mitglieder einsetzen. Für kein X kann C oder D Gruppenfreund sein, es ist also A oder X Gruppenfreund, jedenfalls sind dann A und X befreundet. Damit kennt A die Mitglieder C und D sowie jedes andere Mitglied X, ist also Superfreund. Für jede Vierergruppe A, B, C, D, in der C und D nicht befreundet sind, haben wir also einen Superfreund nachgewiesen.

Fall 2: Jedes der vier Mitglieder A, B, C und D ist mit allen anderen der Vierergruppe befreundet. Wenn darunter keines Superfreund wäre, dann gäbe es zu jedem der vier Mitglieder A, B, C und D ein Mitglied X_A, X_B, X_C und X_D, das nicht mit A bzw. B bzw. C bzw. D befreundet ist; man beachte, dass von diesen vier Mitgliedern mehrere identisch sein können, dass aber alle von A, B, C und D verschieden sind. Der Fall, dass alle gleich sind, also dass $X_A = X_B = X_C = X_D$, kann nicht eintreten, weil es sonst in der Vierergruppe A, B, C, X_A (nach Konstruktion sind das wirklich vier verschiedene Mitglieder!) keinen Gruppenfreund gäbe. Aber auch der andere Fall, dass wenigstens zwei verschieden sind, also dass o.B.d.A. $X_A \neq X_B$, kann nicht eintreten, weil sonst die Vierergruppe A, B, X_A und X_B (auch dies sind nach Konstruktion wirklich vier verschiedene Mitglieder) eine Vierergruppe ohne Gruppenfreund wäre. Also haben wir auch für jede Vierergruppe A, B, C, D, in der alle gegenseitig befreundet sind, einen Superfreund nachgewiesen.

3. Beweis: Ein Mitglied, das mit jedem Mitglied des Netzwerkes befreundet ist, heiße *Superfreund*; ein Mitglied, das nicht mit allen befreundet ist, heiße *Nerd*. Jedes Mitglied von BWM ist damit entweder Superfreund oder Nerd.

Ein Mitglied in einer Vierergruppe, das mit den anderen dreien dieser Vierergruppe befreundet ist, heiße *Gruppenfreund* dieser Gruppe.

Zunächst führen wir die Annahme, dass es in BWM vier oder mehr Nerds gibt, zum Widerspruch: Wir wählen von den mindestens vier Nerds einen Nerd N_1 aus, als zweiten Nerd N_2 nehmen wir einen, der mit N_1 nicht befreundet ist. Nun gibt es nur zwei Möglichkeiten, die beide zum Widerspruch führen:

Fall 1: Es gibt zwei weitere (von N_1 und N_2 verschiedene) Nerds N_3 und N_4, die nicht befreundet sind. Dann hat die Vierergruppe N_1, N_2, N_3, N_4 keinen Gruppenfreund.

Fall 2: Jedes weitere Paar von Nerds N_3 und N_4, die beide verschieden von N_1 und N_2 sind, ist miteinander befreundet: Da N_3 und N_4 beide Nerds sind, sind beide mit wenigstens einem von N_1 und N_2 nicht befreundet, d.h. auch hier hat die Vierergruppe N_1, N_2, N_3, N_4 keinen Gruppenfreund.

Also gibt es auch in jeder Vierergruppe höchstens drei Nerds, d.h. mindestens einen, der Superfreund ist; dies war zu beweisen.

Variante: Mit (V4) sei die Eigenschaft eines Netzwerkes bezeichnet, dass in jeder Vierergruppe ein Gruppenfreund existiert. Den Nachweis, dass es dann in BWM höchstens 3 Nerds gibt, führen wir durch vollständige Induktion nach der Azahl n der Mitglieder in BWM:

Induktionsanfang: Für $n = 4$ gibt es genau eine Vierergruppe und nach (V4) in ihr einen Gruppenfreund. Da es außerhalb dieser Vierergruppe keine weiteren Mitglieder gibt, ist dieser Gruppenfreund gleichzeitig Superfreund, d.h. es gibt höchstens 3 Nerds.

Induktionsannahme: Es gebe ein $n \geq 4$ derart, dass es in allen Netzwerken, die die Eigenschaft (V4) und höchsten n Mitglieder haben, höchstens 3 Nerds gibt.

Induktionsbehauptung: Dann gilt dies auch in allen Netzwerken mit $n + 1$ Mitglidern, in denen (V4) gilt.

Induktionsschluss: Wir betrachten ein Netzwerk BWM mit $n + 1$ Mitgliedern ($n \geq 4$), in dem (V4) gilt, die Mitglieder seien mit $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ bezeichnet. Wenn es in BWM keine Nerds gibt, dann gibt es auch nichts zu beweisen; wenn es einen Nerd gibt, dann sei o.B.d.A. das Mitgliede A_{n+1} dieser Nerd. Wir entfernen zunächst dieses Mitglied und lassen alle Freundschaften, an denen A_{n+1} beteiligt ist, fortbestehen.

Dann ist BWM \ { A_{n+1} } ein Netzwerk mit n Teilnehmern, in dem (V4) gilt. Nach Induktionsannahme gibt es in BWM \ { A_{n+1} } höchstens 3 Nerds, d.h. o.B.d.A. seien $A_1, A_2, \ldots, A_{n-3}$ Superfreunde in BWM \ { A_{n+1} }. (Über die Mitglieder A_{n-2}, A_{n-1}, A_n habe wir keine Aussage gemacht). Hieraus folgt, dass jedes der drei Mitglieder A_{n-2}, A_{n-1}, A_n mit jedem der $n - 3$ Mitglieder $A_1, A_2, \ldots, A_{n-3}$ befreundet ist. Letzteres gilt dann auch im Netzwerk BWM.

Nun betrachten wir wieder das Netzwerk BWM und in ihm das Mitglied A_{n+1}. Es kann kann mit höchstens zwei Mitgliedern nicht befreundet sein, weil es mit drei nicht befreundeten Mitgliedern eine Vierergruppe ohne Gruppenfreund bilden würde. Es genügt also, folgende drei Fälle zu betrachten.:

Fall 1: A_{n+1} ist mit jedem der Mitglieder A_1, A_2, ... A_{n-3} und mit mindestens einem der Mitglieder A_{n-2}, A_{n-1}, A_n befreundet: Da A_1, A_2, ... A_{n-3} Superfreunde in BWM \ { A_{n+1} } sind und auch alle mit A_{n+1} befreundet sind, sind sie auch Superfreunde in BWM, d.h. Nerds kommen nur unter den vier Mitgliedern A_{n-2}, A_{n-1}, A_n und A_{n+1} vor. In dieser Gruppe ist aber ein Gruppenfreund; dieser ist dann aber auch Superfreund in BWM. Damit gibt es in BWM höchstens drei Nerds.

Fall 2: A_{n+1} ist mit genau einem der Mitglieder A_1, A_2, ... , A_{n-3} nicht befreundet, o.E. sei dies A_1. Dann muss A_{n+1} mit zweien der Mitglieder A_{n-2}, A_{n-1}, A_n befreundet sein, o.E. seien dies A_{n-2} und A_{n-1}. Nun kann in der Vierergruppe A_1, A_{n-2}, A_{n-1} und A_{n+1} nur A_{n-2} oder A_{n-1} Gruppenfreund sein, d.h. A_{n-2} ist mit A_{n-1} befreundet. Analog folgt in der Vierergruppe A_1, A_{n-2}, A_n und A_{n+1}, dass A_{n-2} und A_n befreundet sind. Damit ist A_{n-2} Superfreund in BWM. Weiter ist in der Vierergruppe A_1, A_{n-1}, A_n und A_{n+1} eines der Mitglieder A_{n-1} oder A_n der Gruppenfreund, dieses ist dann ebenfalls Superfreund in BWM. Damit gibt es in BWM außer A_1 udn A_{n+1} höchstens noch einen weiteren Nerd, nämlich A_n oder A_{n-1}.

Fall 3: A_{n+1} ist mit genau zwei der Mitglieder A_1, A_2, ... , A_{n-3} nicht befreundet (dieser Fall muss nur für $n \geq 5$ betrachtet werden), o.E. seien dies A_1 und A_2: Dann ist A_{n+1} mit jedem der Mitglieder A_{n-2}, A_{n-1} und A_n befreundet; diese drei sind auch untereinander befreundet, weil in der Vierergruppe A_1, A_x, A_y, A_{n+1} $(x,y \in \{n-2, n-1, n\}$ nur A_x oder A_y Gruppenfreunde sein können und damit untereinander befreundet sind. Also sind A_{n-2}, A_{n-1}, A_n Superfreunde in BWM und es gibt in BWM höchstens die drei Nerds A_1, A_2 und A_{n+1}.