BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK
Bildung & Begabung

Aufgaben und Lösungen

2. Runde 2015

Über Kommentare und Ergänzungen zu diesen Lösungsbeispielen freuen wir uns!

» **KORREKTURKOMMISSION | KARL FEGERT**

» **BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK**

Kortrijker Straße 1, 53177 Bonn | Postfach 20 02 01, 53132 Bonn | Tel.: (02 28) 9 59 15-20, Fax: (02 28) 9 59 15-29
info@bundeswettbewerb-mathematik.de, www.bundeswettbewerb-mathematik.de

Stand: Oktober 2015

GEFÖRDERT VOM

Bundesministerium für Bildung und Forschung

STIFTERVERBAND

KULTUSMINISTER KONFERENZ

Aufgabe 1: Ein Rechteck mit Seitenlägen a und b wird in $a \cdot b$ Einheitsquadrate aufgeteilt (a,b sind positive ganze Zahlen, beide gerade).

Anja und Bernd färben nun abwechselnd jeweils ein Quadrat, das aus einem oder mehreren bislang noch ungefärbten Einheitsquadraten dieses Rechtecks besteht. Wer nicht mehr färben kann, hat verloren. Anja beginnt.

Bestimme alle Paare (a,b), für die sie den Gewinn erzwingen kann.

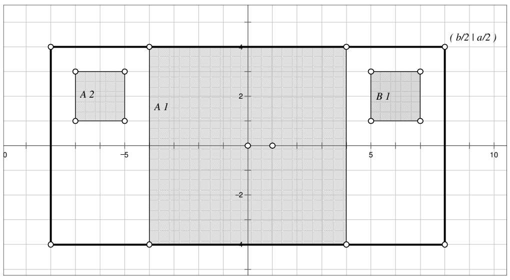
Anmerkung: Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.

Ergebnis: Anja kann in jedem Fall gewinnen.

1.Beweis: Es sei o.B.d.A. $a \leq b$ (für den Fall $a > b$ vertauschen wir im Beweis die Bezeichnungen a und b). Wir legen über das Rechteck ein rechtwinkliges Achsenkreuz, sodass die x–Achse die Mittelsenkrechte der Seiten mit Länge a ist, die y–Achse die Mittelsenkrechte der Seite mit Länge b. Die beiden Achsen sind dann Symmetrieachsen für das Rechteck, die Gitterlinien bestimmen dann die Grenzen der Einheitsquadrate, und die Ecken des Rechtecks haben so die Koordinaten ($\pm^b/_2 \mid \pm^a/_2$); und weil a und b beide gerade sind, sind beide Koordinaten ganzzahlig.

Ein mögliche Gewinnstrategie für Anja ist nun:

> Färbe im ersten Zug das Quadrat mit den Ecken ($\pm^a/_2 \mid \pm^a/_2$). Beantworte jede Färbung von Bernd mit der Färbung des Quadrates, das achsensymmetrisch bezüglich der y–Achse liegt.



Nachweis, dass diese Strategie möglich ist und zum Erfolg führt: Der erste Zug ist immer möglich, weil $a \leq b$ und $^b/_2$ ganzzahlig ist, das genannte Quadrat vollständig im vorgegebenen Rechteck liegt und es beim ersten Zug noch keine gefärbten Einheitsquadrate gibt.

Wenn nun $a = b$, dann ist das Spiel beendet und Anja hat gewonnen. Wenn $a < b$, dann hat Anja eine Figur hergestellt, die in Form und Färbung symmetrisch bezüglich der y–Achse ist und gleichzeitig in zwei getrennte, symmetrisch zur Achse liegende Bereiche aufgeteilt ist derart, dass jeweils nur in einem Bereich gefärbt werden kann. Jeder Zug von Bernd muss nun diese Symmetrie zerstören: Es git kein ungefärbtes einzelnes Einheitsquadrat, das symmetrisch bez. der y–Achse liegt, und würde er zwei Einheitsquadrate färben, die symmetrisch bez. der Symmetrieachse liegen, dann enthielte das Quadrat, das Bernd färbt, auch die Mitte zwischen diesen beiden Einheitsquadraten, d.h. ein Einheitsquadrat benachbart zur y–Achse, das aber Anja im ersten Zug gefärbt hat. Aber Anja kann nun diese Symmetrie durch Färbung des entsprechenden, symmetrisch liegenden Quadrates wieder herstellen. Da die Schlussposition, nämlich "alle Einheitsquadrate sind gefärbt", symmetrisch bez. der y–Achse ist und mit jedem Zug die Anzahl der ungefärbten Einheitsquadrate um mindestens 1 abnimmt, gewinnt nach endlich vielen Zügen tatsächlich Anja.

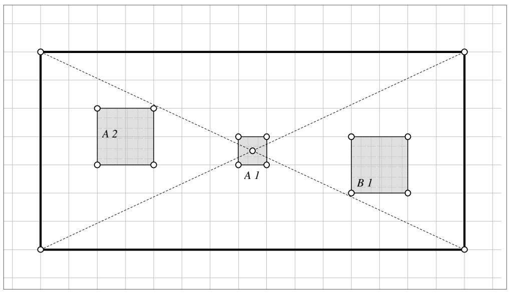
Bemerkung: In obigem Beweis kann man bei geringfügiger Umänderung der Argumentation die Begriffe "achsensymmetrisch bez. y–Achse" ersetzen durch "punktsymmetrisch bez. des Ursprungs". So erhält man eine Beweisführung, die eine schärfere Aussage ermöglicht:

2. Beweis: Über Aussage in der Aufgabenstellung hinaus zeigen wir, dass Anja immer gewinnen kann, wenn a und b von gleicher Parität sind; dies schließt den Fall, dass a und b beide gerade sind, ein.

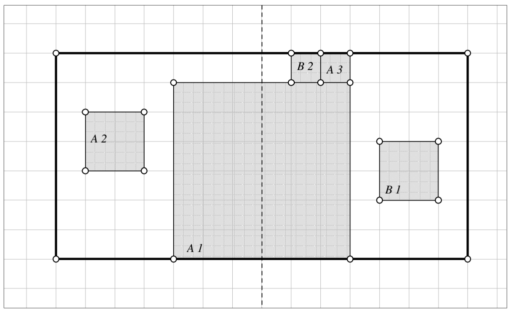
Der Schnittpunkt der beiden Diagonalen des Rechtecks – er sei M benannt – ist dann entweder gemeinsamer Eckpunkt von vier Einheitsquadraten (nämlich wenn a und b beide gerade und damit insbesondere beide größer als 1 sind), oder Mittelpunkt eines Einheitsquadrates (nämlich wenn a und b beide ungerade sind).

Eine mögliche Gewinnstrategie von Anja ist nun:

> Färbe als erstes ein Quadrat, das als Mittelpunkt ebenfalls diesen Schnittpunkt hat. Beantworte jede Färbung von Bernd durch Färbung desjenigen Quadrates, das punktsymmetrisch zu demjenigen Quadrat liegt, das von Bernd gefärbt wurde.



Nachweis, dass diese Strategie möglich ist und zum Erfolg führt: Falls a,b beide gerade sind, bilden die vier Einheitsquadrate, von denen M eine Ecke ist, ein Quadrat mit Seitenlänge 2; dessen Mittelpunkt ist M, und es kann gefärbt werden; und falls a,b beide ungerade sind, kann man das Einheitsquadrat mit Mittelpunkt M färben. Der erste Zug von Anja ist also immer möglich; er führt zu einer Figur, die in Form und Färbung punktsymmetrisch zu M ist und bei der M im Innern eines gefärbten Bereiches liegt. Jeder Zug von Bernd muss nun diese Symmetrie zerstören: Er kann nicht ein einzelnes punktsymmetrisch zu M liegendes Einheitsquadrat färben (dieses hat Anja bereits gefärbt), und wären zwei Einheitsquadrate, die Bernd färbt, symmetrisch bez. M, dann enthielte Bernds Quadrat (das ja konvex ist und somit zu zwei Punkten im Innern stets auch den Mittelpunkt zu deren Verbindungsstrecke enthält), ebenfalls das von Anja bereits gefärbte Symmetriezentrum M. Anja kann wiederum jedes Mal diese Symmetrie durch Färbung des entsprechenden symmetrisch liegenden Quadrates wieder herstellen. Da die Schlussposition (alle Einheitsquadrate sind gefärbt) symmetrisch bez. des Punktes M ist und mit jedem Zug die Anzahl der ungefärbten Einheitsquadrate um mindestens 1 abnimmt, gewinnt schließlich tatsächlich Anja.



Bemerkung: Wenn $a = 1$, kann man nur abwechselnd Einheitsquadrate färben. In diesem Fall kann Anja genau dann den Gewinn erzwingen, wenn n ungerade ist.

Anja kann auch den Gewinn erzwingen, wenn $1 < a < b$, a ungerade, b gerade: Wir legen das Rechteck so, dass unten die lange Kante mit Länge b ist. Nun färbt Anja zuerst ein Quadrat mit Seitenlänge $a–1$ derart, dass rechts und links zwei gleichgroße ungefärbte Rechtecke mit Seitenlängen a und $^{(b-a)}/_2$ bleiben und entlang der oberen langen Kante ein Streifen aus $a–1$ Einheitsquadraten. Es entsteht eine Figur, die in Form und Färbung achsensymmetrisch bez. der senkrechten Symmetrieachse des ursprünglichen Rechtecks ist. Jedes Quadrat, das Bernd nun färbt, ist entweder ein Einheitsquadrat in dem oberen Streifen oder ein Quadrat, das vollständig in einem der beiden Rechtecke an der Seite liegt. In beiden Fällen kann Anja die Färbung von Bernd mit der entsprechenden symmetrischen Färbung beantworten; wobei sie auch die Färbung eines Einheitsquadrates in dem 1x(a–1) Streifen mit der Färbung eines beliebigen anderen Einheitsquadrates in diesem Streifen beantworten kann.

Mir ist derzeit kein allgemeines Kriterium bekannt, nach dem entschieden werden kann, wer den Gewinn erzwingen kann, wenn $a < b$, a gerade, b ungerade.

Aufgabe 2: Die Dezimaldarstellung eines Bruches $\frac{m}{n}$ mit positiven ganzen Zahlen m und n enthält irgendwo nach dem Komma die Ziffernfolge 7143.

Zeige, dass $n > 1250$ ist.

Vorbemerkung: Es ist 893:1250 = 0,7144 = 0,71439999999..., ein scheinbarer Widerspruch zur Aufgabenstellung, in der man einen Ausschluss von Dezimaldarstellungen mit unendlicher Zifferfolge ...999... hätte aufnehmen sollen.

1. Beweis: Wir benützen folgenden Hilfssatz:

HS: Seien a, b, c, d, m, n positive ganze Zahlen und $\frac{a}{b} < \frac{m}{n} < \frac{c}{d}$ und $bc - ad = 1$.

Dann ist $n \geq b + d$.

Beweis des HS: Aus der erste Ungleichung folgt $an < bm$; und da nur ganze Zahlen beteiligt sind, folgt sogar $bm - an \geq 1$; aus der zweiten Ungleichung folgt analog $cn - dm \geq 1$. Also können wir abschätzen:

$$n = n(bc - ad) = nbc - bdm + bdm - nad = b(cn - dm) + d(bm - an) \geq b + d.$$

Dies verwenden wir im eigentlichen Beweis: Sei $k \geq 0$ die Anzahl der Stellen zwischen dem Komma und der ersten Ziffer der Folge ...7143... und sei $r \geq 0$ die größte nicht–negative ganze Zahl, für die $m - rn \geq 0$ (deren Existenz ist gesichert). Dann enthält der Bruch $\frac{10^k(m - rn)}{n}$ die Ziffernfolge 7143 direkt nach dem Komma. Es gibt also eine positive ganzer Zahlen m', für die $0{,}7143 \leq \frac{m'}{n} < 0{,}7144$. Diese Ungleichungskette ergänzen wir zu $\frac{5}{7} = 0{,}\overline{714285} < 0{,}7143 \leq \frac{m'}{n} < 0{,}7144 = \frac{893}{1250}$.

Weil $7 \cdot 893 - 5 \cdot 1250 = 1$, folgt mit dem Hilfssatz sofort die schärfere Aussage $n \geq 1250 + 7$.

2. Beweis: Die Ziffernfolge 7143 in der Dezimaldarstellung des Bruches $\frac{m}{n}$ beginne an der k+1–ten Stelle hinter dem Komma ($k \geq 0$). Nun multiplizieren wir diesen Bruch mit 10^k, d.h. wir verschieben das Komma soweit nach rechts, dass die Ziffernfolge 7143 unmittelbar nach dem Komma steht. Dann gibt es eine nicht–negative ganze Zahl r, für die gilt

$$r + 0{,}7143 \leq 10^k \cdot \frac{m}{n} < r + 0{,}7144.$$

Multiplikation jeden Terms mit dem (sicher positiven!) Term $7n$ führt zur äquivalenten Aussage

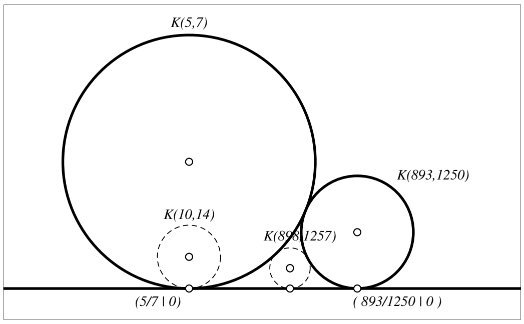
$$7nr + 5{,}0001n \leq 7m \cdot 10^k < 7nr + 5{,}0008n.$$

Nach Subtraktion von $(7r + 5)n$ steht links die positive Zahl $0{,}0001n$, in der Mitte eine positive ganze Zahl, sodass man die linke Seite durch 1 ersetzen kann. Es gilt also (diese Aussage ist für $n < 10\,000$ schärfer):

$$1 \leq 7m \cdot 10^k - (7r + 5)n < 0{,}0008n \qquad (*),$$

was nach Weglassen des mittleren Teils das gewünschte Ergebnis $n > 1 : 0{,}0008 = 1250$ liefert.

3. Beweis (nur eine Beweisskizze, mit Ford-Kreisen): Der *Ford–Kreis des Bruches positiver ganzer Zahlen* $\frac{m}{n}$ ist der Kreis $K(m,n)$ im Achsenkreuz mit Mittepunkt ($\frac{m}{n} \mid \frac{1}{2n^2}$) und Radius $\frac{1}{2n^2}$. Damit liegt jeder Fordkreis im ersten oder zweiten Quadranten und berührt die x–Achse. Wie man 'leicht' nachrechnet (vgl. *http://mathworld.com/FordCircle.html*), haben zwei Fordkreise $K(m,n)$ und $K(m',n')$ höchstens einen Punkt gemeinsam, nämlich genau dann, wenn $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ oder $|nm' - mn'| = 1$. (Die Darstellung in der Figur ist nicht maßstäblich.)



Im ersten Fall liegt der Kreis, der zum größeren Nenner gehört, im Innern des Kreises mit dem kleineren Nenner und der gemeinsame Punkt ist der Berührpunkt mit der x–Achse; im zweiten Fall berühren sich die Kreise von außen. Da $7\cdot 893 - 5\cdot 1250 = 1$, berühren sich $K(5,7)$ und $K(893,1250)$ von außen in einem Punkt, dessen x–Koordinate größer als $^5/_7$ und kleiner als $^{893}/_{1250}$ ist. Also wird von der x–Achse und diesen beiden Kreisen eine Gebiet begrenzt, in dessen Innere jeder Punkt eine y–Koordinate hat, die kleiner als $2\cdot\frac{1}{2\cdot 1250^2}$ ist. Also kann es in diesem Bereich nur Fordkreise geben, bei denen der zugehörige Nenner größer als 1250 ist; also gibt es im Intervall [$^5/_7$; $^{893}/_{1250}$] nur Brüche, deren Nenner größer als 1250 ist.

Bemerkungen: Für $n < 2500$ nimmt der Bruch auf der rechten Seite von (*) im 2 Beweis den Wert 2 an, was zu den notwendigen Bedingungen $1 \le 7m\cdot 10^k - (7r+5)n < 2$ und $1 = 7m\cdot 10^k - (7r+5)n$, also zu $(7r+5)n \equiv 6 \bmod 7$ und schließlich zu $n \equiv 4 \bmod 7$ führt. Die kleinste Zahl $n > 1250$, die dies erfüllt, ist $n = 1257$. Tatsächlich hat $\frac{898}{1257} = 0{,}7143993...$ eine Dezimalbruchentwicklung mit der geforderten Ziffernfolge. Also ist $n = 1257$ der kleinste Nenner eines Bruches, in dessen Dezimalbruchentwicklung diese Ziffernfolge 7143 vorkommt.

Wenn man nicht mit dem Term $7n$, sondern dem Term Kn multipliziert, so erhält man $(K\cdot 0{,}7143 - \lfloor K\cdot 0{,}7143\rfloor)\cdot n \le Z < (K\cdot 0{,}7144 - \lfloor K\cdot 0{,}7144\rfloor)\cdot n$ mit einer geeigneten positiven ganzen Zahl Z. Nun wählt man K so, dass die linke Seite positiv, aber möglichst kleine ist. Dann kann man die linke Seite durch 1 ersetzen und erhält eine starke Abschätzung. In obiger Abhandlung wurde $K = 7$ gewählt, was $K\cdot 0{,}7143 - \lfloor K\cdot 0{,}7143\rfloor = 0{,}0001$ ergibt. Dem interessierten Leser sei überlassen, die Schärfe der Abschätzung für verschiedene K auszuprobieren – oder umgekehrt: eine interessante kurze Ziffernfolge zu finden, die zu einem großen n führt.

Aufgabe 3: Jede der positiven ganzen Zahlen 1, 2, ... , n wird entweder rot oder blau oder gelb gefärbt, wobei folgende Regeln eingehalten werden:

(1) Eine Zahl und die nächstgrößere Zahl gleicher Farbe (falls es eine solche gibt) haben stets verschiedene Parität.
(2) Wenn jede Farbe bei der Färbung verwendet wird, dann gibt es genau eine Farbe, für die die kleinste Zahl dieser Farbe gerade ist.

Bestimme die Anzahl solcher Färbungen.

Anmerkung: Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.

Bezeichnungen: Eine Färbung der Zahlen 1, 2,..., n mit den Farben rot, blau oder gelb, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, heiße *zulässig*. Die Anzahl zulässiger Färbungen der Zahlen 1, 2, ..., n werde mit $F(n)$ bezeichnet.

Ergebnis: Es ist $F(n) = 3(2^n - 1)$.

1. Beweis (vollständige Induktion):

Induktionsanfang: Offensichtlich ist jede Färbung der Zahl 1 mit einer der drei Farben blau, rot, gelb eine zulässige Färbung, d.h. es ist $F(1) = 3 = 3(2^1 - 1)$.

Induktionsannahme: Für ein bestimmtes $n \geq 1$ gelte $F(n) = 3(2^n - 1)$.

Induktionsschluss: Dann gilt auch $F(n+1) = 3(2^{n+1} - 1)$:

Der längliche Nachweis hierfür gliedert sich in drei Schritte: Wir

(A) konstruieren zunächst auf eine geeignete Weise aus jeder der $3(2^n - 1)$ zulässigen Färbungen der Zahlen 1, 2, ..., n drei Färbungen der Zahlen 1, 2, ..., n, n+1,

(B) zeigen anschließend, dass davon $3(2^{n+1} - 1)$ Färbungen zulässig sind und

(C) zeigen schließlich, dass es keine weiteren zulässigen Färbungen der Zahlen 1, 2, ..., n, n+1 gibt.

(A) Ausgehend von einer zulässigen Färbung der Zahlen 1, 2, ..., n vergrößern wir jede dieser Zahlen unter Beibehaltung ihrer Farbe um 1, anschließend färben wir die Zahl 1 der Reihe nach mit einer der drei vorgegebenen Farben. Wir bemerken noch, dass offensichtlich keine zwei dieser Färbungen gleich sind.

(B) Für die Untersuchung, welche davon zulässig sind, führen wir folgende Bezeichnungen ein (diese sind immer auf die gerade betrachtete Färbung der Zahlen 1, 2, ... , n bezogen): Mit $e \in$ {rot, blau, grün} sei die "erste" Farbe bezeichnet, d.h. die Farbe der Zahl 1; mit z die "zweite" Farbe, d.h. die Farbe der kleinsten anders gefärbten Zahl (soweit vorhanden), und mit d die "dritte", d.h. die von e und z verschiedene dritte Farbe. (Wenn es keine Zahl zweiter Farbe gibt, kann die Zuordnung beliebig erfolgen.) Weiter sei K_x mit $x \in \{e,z,d\}$ die kleinste Zahl mit der Farbe x in der Färbung der Zahlen 1, 2, ..., n; und N_x die kleinste Zahl mit der Farbe x in der Färbung von 1, 2, ..., n, $(n + 1)$. Weiter bemerken wir zunächst, dass jede Zahl um genau 1 vergrößert wurde, d.h. dass Zahlen verschiedener Parität nach dem Vergrößern weiter Zahlen verschiedener Parität sind. Damit gilt die Eigenschaft (1) stets in der neu gefärbten Zahlenmenge {2, ..., n, $(n + 1)$}. Da außerdem $K_e = 1$ ungerade ist, folgt aus der Eigenschaft (2), dass K_z und K_d von verschiedener Parität sind.

Um zu untersuchen, ob die Eigenschaft (1) auch in der Zahlenmenge {1, 2, ..., n, $(n + 1)$} gilt, genügt es also zu untersuchen, ob die neu gefärbte Zahl 1 und die zweitkleinste Zahl dieser Farbe verschieden Parität haben. Nun unterscheiden wir drei Fälle:

Fall 1: Jede der Zahlen 1, 2, ..., n ist mit der gleichen Farbe e gefärbt. Dann führt jede Färbung der Zahl 1 mit einer der drei vorgegebenen Farben zu einer Färbung der Zahlen 1, 2, ... n+1 vom Typ $e, e, e, \ldots, e$ oder $z, e, e, \ldots, e$ oder $d, e, e, \ldots, e$. Jede dieser drei Färbungen ist zulässig, weil die Bedingung (1) erfüllt und die Bedingung (2) nicht relevant ist.

Fall 2: Es gibt zwei verschiedene Farben und K_z ist ungerade:

Die Färbung der Zahl 1 mit der Farbe e führt immer zu einer zulässigen Färbung: Dann ist $N_e = 1$ ungerade und die darauffolgende Zahl gleicher Farbe ist die Zahl 2, die Zahlen 1 und 2 haben verschieden Parität, d.h. die Bedingung (2) ist erfüllt. Bedingung (3) ist ebenfalls erfüllt, da N_z und N_d ebenso wie K_z und K_d verschiedene Parität haben, d.h. genau eine von diesen beiden ist gerade.

Die Färbung der Zahl 1 mit der Farbe z führt ebenfalls zu einer zulässigen Färbung: Es ist dann $N_z = 1$ ungerade und die darauffolgende Zahl der Farbe z ist $K_z + 1$, diese ist gerade.

Dagegen führt die Färbung der Zahl 1 mit der Farbe d nicht zu einer zulässigen Färbung: Es ist dann $N_d = 1$ ungerade, $N_e = 2$ gerade, $N_z = K_z + 1$ ebenfalls gerade, was der Bedingung (2) widerspricht.

Fall 3: Es gibt zwei verschiedene Farben und K_z ist gerade:

Die Färbung der Zahl 1 mit der Farbe e führt mit gleicher Begründung wie im Fall 2 zu einer zulässigen Färbung.

Die Färbung der Zahl 1 mit der Farbe z führt dagegen nicht zu einer zulässigen Färbung: Es ist dann $N_z = 1$ ungerade und die darauffolgende Zahl der Farbe z ist $K_z + 1$, diese ist ebenfalls ungerade, d.h. die Bedingung (2) ist nicht erfüllt.

Die Färbung der Zahl 1 mit der Farbe d führt wiederum zu einer zulässigen Färbung: Es ist dann $N_d = 1$ ungerade, $N_e = 2$ gerade, $N_z = K_z + 1$ ungerade, d.h. Bedingung (2) ist erfüllt. Weiter sind – soweit es eine Zahl der Farbe d in der Färbung der Zahlen 1, 2, ... , n gibt – die Zahlen 1 und $K_d + 1$ aufeinander folgende Zahlen gleicher Farbe und verschiedener Parität, d.h. die Bedingung (1) ist auch erfüllt.

Wir berechnen noch die Anzahl der so konstruierten zulässigen Färbungen: Im Fall 1 haben wir genau 3 Färbungen der Zahlen 1, 2, ... , n betrachtet, zu jeder gibt es genau 3 neue Färbungen, also zu $3 \cdot 3 = 9$ neue Färbungen. Im Fall 2 und 3 haben wir die restlichen $F(n) - 3$ Färbungen betrachtet, jede führte zu genau 2 neuen Färbungen, also zu $2(F(n) - 3)$ neuen Färbungen. Insgesamt ist also

$$3 \cdot 3 + 2(\mathrm{F}(n) - 3) \;=\; 9 + 2 \cdot [3(2^n - 1) - 3] \;=\; 9 + 3 \cdot 2^{n+1} - 6 - 6 \;=\; 3 \cdot (2^{n+1} - 1).$$

(C) Es bleibt noch zu zeigen, jede zulässige Färbung der Zahlen $1, 2, ..., n, (n + 1)$ aus einer zulässigen Färbung der Zahlen $1, 2, ..., n$ nach oben beschriebener Methode entsteht.

Betrachten wir also eine zulässige Färbung der Zahlen $1, 2, ..., n, (n + 1)$, $(n \geq 1)$. Die Zahl 1 ist ungerade und gleichzeitig kleinste Zahl ihrer Farbe, mit Eigenschaft (2) folgt, dass von den kleinsten Zahlen der zweiten und dritten Farbe – sofern beide existieren – genau eine gerade ist, sie also verschiedene Parität haben. Weiter folgt aus Eigenschaft (1), dass die zweitkleinste Zahl, die die Farbe der Zahl 1 hat, – soweit sie existiert – gerade ist.

Nun kehren wir den oben beschriebenen Umfärbeprozess um, d.h. wir verkleinern jede Zahl um 1, behalten dabei ihre Farbe und untersuchen die dadurch entstandene Färbung der Zahlen $1, 2, ..., n$ (die Zahl 0 wird natürlich nicht weiter berücksichtigt). Die neue Färbung besitzt weiter die Eigenschaft (1), weil zwei Zahlen x und y genau dann verschiedene Parität besitzen, wenn auch $x+1$ und $y+1$ verschiedene Parität besitzen. Sie besitzt auch weiter die Eigenschaft (2): Von den Zahlen der zweiten und dritten Farbe ist genau eine gerade, diese Eigenschaft bleibt nach dem Verkleinern um 1 erhalten; falls nach dem Verkleinern nur noch zwei Farben vorhanden sind, ist eine weitere Untersuchung nicht nötig.

Damit ist jede Färbung der Zahlen $1, 2, ..., n$, die so aus einer zulässigen Färbung der Zahlen $1, 2, ..., n, (n + 1)$ entstanden ist, zulässig; der Umkehrschluss besagt, dass eine zulässige Färbung von $1, 2, ..., n, (n + 1)$ nur aus einer zulässigen Färbung von $1, 2, ..., n$, entstanden sein kann.

2. Beweis (ca. 23 Paritätsbetrachtungen): Wir betrachten zunächst nur Färbungen der Zahlen 1, 2, ... , n mit den Farben a, b, c , bei denen die Zahl 1 die Farbe a hat, die kleinste Zahl anderer Farbe (soweit vorhanden) die Farbe b; die Farbe c kann dann nur bei noch größeren Zahlen vorkommen. Diese Färbungen nennen wir P_n–Färbungen, die Anzahl der P_n–Färbungen, die zulässig sind, sei mit $A(n)$ bezeichnet.

Die Menge aller zulässigen Färbungen der Zahlen 1, 2, ... , n erhalten wir aus der Menge der zulässigen P_n–Färbungen, indem wir jeder der Farben a,b,c genau eine der Farben *rot*, *blau*, *gelb* zuordnen, ohne eine Farbe dabei zweimal zu vergeben; dies ist auf 3·2·1 = 6 Arten möglich. Wenn bei der P_n–Färbung mindestens zwei Farben tatsächlich verwendet wurden, dann sind diese 6 Färbungen auch verschieden; wurde nur eine Farbe verwendet (es gibt nur eine einzige solche P_n–Färbung, und diese ist auch zulässig), sind jeweils zwei der erzeugten Färbungen gleich, d.h. es wurden nur 3 neue zulässige Färbungen erzeugt. Damit kann man die Anzahl der zulässigen Färbungen aus der Anzahl der zulässigen P_n–Färbungen berechnen: es ist $F(n) = 6(A(n) - 1) + 3 \cdot 1 = 3(2A(n) - 1)$.

Für die Beweisführung führen wir noch einige Bezeichnungsweisen für P_n–Färbungen ein:

Für $x \in \{a,b,c\}$ sei mit x_i sei die i–te Zahl der Farbe x bezeichnet, d.h. diejenige Zahl, die die Farbe x hat und zu der es genau i–1 kleinere Zahlen mit der Farbe x gibt; mit x_{max} die größte Zahl der Farbe x (dabei ist der Index max nicht als Zahl zu verstehen); mit $\#x$ die Anzahl der Zahlen der Farbe x. Es ist also z.B. $a_1 = 1$, $\#a + \#b + \#c = n$. Mit diesen Bezeichnungsweisen lässt sich nun formulieren:

Eine Färbung der Zahlen 1, 2, ... , n mit den Farben a, b, c ist genau dann eine zulässige P_n–Färbung, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind (den Zusatz "wenn existent" lassen wir in Zukunft weg):

(P) $a_1 = 1$, $b_1 < c_1$,

(1) x_i und x_j (mit $x \in \{a,b,c\}$) sind von verschiedener Parität genau dann, wenn i und j von verschiedener Parität sind,

(2) b_1 und c_1 sind von verschiedener Parität.

Die Bedingungen (1) und (2) sind offensichtlich äquivalent zu den Bedingungen (1) und (2) in der Aufgabenstellung: (1) folgt durch mehrfache Anwendung, (2) folgt aus der Tatsache, dass $a_1 = 1$ ungerade ist.

Lässt man bei einer zulässigen P_{n+1}–Färbung die Zahl n+1 weg, so erhält man eine P_n–Färbung; diese ist offensichtlich ebenfalls zulässig. Im Umkehrschluss heißt dies, dass jede zulässige P_{n+1}–Färbung aus einer zulässigen P_n–Färbung durch geeignete Färbung der Zahl n+1 konstruiert werden kann. Wir werden zeigen, dass dies stets mit genau zwei Farben möglich ist. Dann ist $A(n) = 1$, $A(n+1) = 2A(n)$, also $A(n) = 2^{n-1}$ für alle n. Einsetzen ergibt

$$F(n) = 3(2 \cdot 2^{n-1} - 1) = 3(2^n - 1) .$$

Vor einer Fallunterscheidung stellen wir zunächst fest: Aus (1) folgt sofort, dass zwischen zwei Zahlen gleicher Farbe es stets eine gerade Gesamtzahl von Zahlen der anderen Farben gibt.

Die Zahl n+1 kann man stets mit der Farbe der Zahl n färben: Die Eigenschaft (1) ist für alle Zahlen aus $\{1,2...,n\}$ erfüllt, ebenso für die aufeinander folgenden Zahlen gleicher Farbe n und n+1, die ja verschiedene Parität haben. Die Eigenschaft (2) ist nicht relevant, da n+1 dann sicher nicht kleinste Zahl mit der Farbe c ist. Nun unterscheiden wir vier Fälle:

Fall 1: Die P_n–Färbung verwendet nur die Farbe a: Dann kann die Zahl n+1 mit der Farbe a oder b, aber wegen Bedingung (P) nicht mit der Farbe c gefärbt werden.

Fall 2.: Die P_n–Färbung verwendet mindestens zwei Farben und die Zahl n hat die Farbe a: Es ist $a_1 = 1$ und $a_{max} = n$, zwischen diesen beiden Zahlen der Farbe a ist also eine gerade Anzahl von Zahlen der Farbe b und c, d.h. es ist $\#b + \#c$ gerade.

Falls es keine Zahl der Farbe c gibt, ist also $\#b$ gerade, d.h. b_1 und b_{max} haben verschiedene Parität und genau eine dieser beiden Zahlen hat gleiche Parität wie n+1. Ist es b_{max}, dann kann n+1 nicht die Farbe b haben, aber die Farbe a oder c; ist es b_1, dann kann n+1 die Farbe a oder b haben, nicht aber die Farbe c (sonst wären b_1 und c_1 von gleicher Parität im Widerspruch zu (2)).

Falls es Zahlen der Farbe c gibt, dann haben $\#b$ und $\#c$ gleiche Parität, d.h. aus der unterschiedlichen Parität von b_1 und c_1 folgt die unterschiedliche Parität von b_{max} und c_{max}. Wieder hat genau eine dieser beiden Zahlen die gleiche Parität wie n+1, wieder kann n+1 mit der Farbe a und wegen (1) mit genau einer der Farben b oder c gefärbt werden.

Fall 3: (Die P_n–Färbung verwendet mindestens zwei Farben und) die Zahl n hat die Farbe b: Seien die ersten v Zahlen mit Farbe a gefärbt, d.h. v ist der größte Index mit $v = a_v$ und es ist $b_1 = v+1$; insbesondere haben a_v und b_1 verschiedene Parität. Nun stehen zwischen b_1 und $b_{max} = n$ eine gerade Anzahl von Zahlen der Farbe a oder c (diese und die folgende Argumentation gilt auch für den Fall $b_1 = b_{max}$).

Gibt es keine Zahlen der Farbe c, so ist die Anzahl der Zahlen mit Farbe a zwischen b_1 und n gerade, d.h. a_v und a_{max} haben gleiche Parität, also b_1 und a_{max} verschiedene, d.h. genau eine dieser beiden Zahlen hat gleiche Parität wie n+1. Ist es b_1, so kann n+1 außer mit Farbe b noch mit Farbe a gefärbt werden, aber nicht mit Farbe c (dann wären c_1 und b_1 von gleicher Parität), und ist es a_{max}, so kann man n+1 mit den Farben b und c, aber nicht mit a färben.

Falls es Zahlen mit der Farbe c gibt, so sind c_1 und b_1 wegen (2) von verschiedener Parität, also a_v und c_1 von gleicher Parität. Weiter ist $(\#a - v) + \#c$ gerade, also sind diese beiden Summanden von gleicher Parität, d.h. a_{max} und c_{max} wieder von verschiedener Parität. Wieder ist genau eine dieser beiden Zahlen ist von gleicher Parität wie n+1, wieder kann n+1 außer mit Farbe b mit genau einer der Farben a oder c gefärbt werden.

Fall 4: (Die P_n–Färbung verwendet mindestens zwei Farben und) die Zahl n hat die Farbe c: Es genügt zu zeigen, dass a_{max} und b_{max} von verschiedener Parität sind. Seien r und s die größten Indices mit $a_r < c_1$ und $b_s < c_1$ und v der Index mit $a_v = b_1 - 1$. Zwischen c_1 und $c_{max} = n$ ist die Anzahl von Zahlen der Farben a oder b gerade, insbesondere ist die Anzahl der Zahlen mit Farbe a und die Anzahl der Zahlen mit Farbe b von gleicher Parität. Gleiches gilt im Bereich zwischen b_1 und c_1: Diese beiden Zahlen sind von verschiedener Parität, d.h. die Gesamtzahl der Zahlen dazwischen ist gerade und es kommen nur Zahlen der Farbe a und b vor. Weil nun a_v und $b_1 = a_v$+1 verschiedene Parität haben, überträgt sich die Verschiedenheit der Parität auf a_r und b_s und schließlich auch auf a_{max} und b_{max}.

Aufgabe 4: Es sei ABC ein Dreieck, bei dem der Inkreismittelpunkt I und der Umkreismittelpunkt U verschieden sind. Für jeden Punkt X im Innern dieses Dreiecks sei $d(X)$ die Summe der Abstände von X zu den drei (evtl. geradlinig verlängerten) Dreieckseiten.

Beweise: Wenn für zwei verschiedene Punkte P und Q im Innern des Dreiecks ABC die Bedingung $d(P) = d(Q)$ erfüllt ist, dann stehen die Geraden PQ und UI senkrecht aufeinander.

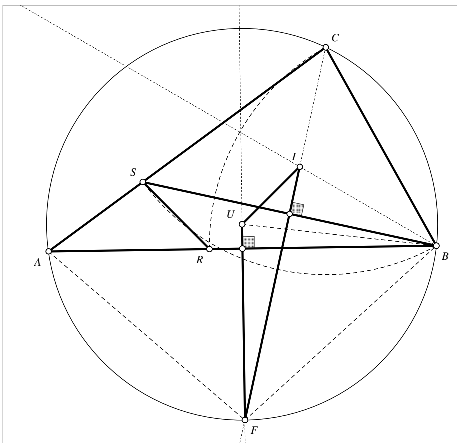
Vorbetrachtung: Die Ecken des Dreiecks ABC seien gegen den Uhrzeigersinn bezeichnet. Wir verwenden die üblichen Bezeichnungen, insbesondere $s := {}^1/_2(a+b+c)$. Weiter seien die Schnittpunkte der Mittelsenkrechten m_{BC}, m_{CA} und m_{AB} mit denjenigen Teilbögen des Umkreises, die die jeweils gegenüberliegende Ecke nicht enthalten, mit D, E bzw F bezeichnet. Da aus Symmetriegründen $\overline{AF} = \overline{FB}$, ist nach Umfangswinkelsatz auch $\angle ACF = \angle FCB = {}^{\gamma}/_2$, d.h. F ist ein Punkt auf der Winkelhalbierenden w_γ; und mit analoger Begründung schließt man, dass auch E auf w_β und D auf w_α liegt. (Dieser Zusammenhang ist seit einiger Zeit auch unter dem Begriff "Südpolsatz" in der Literatur zu finden).

1. Beweis (elementargeometrisch): Umkreis und Inkreismittelpunkt fallen genau dann zusammen, wenn jede Mittelsenkrechte gleichzeitig Winkelhalbierende durch die jeweils gegenüberliegenden Ecke ist; dies ist genau dann der Fall, wenn das Dreieck bezüglich jeder Seite als Basis gleichschenklig und somit gleichseitig ist. Das vorgegebene Dreieck ist also nicht gleichseitig, es gibt also verschieden lange Seiten und wir können so o.B.d.A. annehmen, dass $a \le b \le c$ und $a < c$ ist.

Wir wählen auf der Strecke AB den Punkt R und auf der Strecke AC den Punkt S so, dass die Strecken BR und CS beide die Länge a haben; dies ist möglich, weil $a \le b \le c$. Weil zusätzlich $a < c$, kann der Punkt S mit Punkt A zusammenfallen, aber nicht R mit A, es ist also sicher $R \ne S$. Dann gilt:

HS: $RS \perp UI$.

Beweis des Hilfssatzes: Im Fall $a = b < c$ ist das Dreieck ABC gleichschenklig mit Basis AB, also achsensymmetrisch bez. m_{AB}. Dann liegen U und I auf m_{AB}, ferner ist $A = S$, d.h. die Graden RS und AB sind identisch. Insbesondere ist dann $RS \perp UI$.



In allen anderen Fällen ist $a < b \le c$. Das Dreieck SCB ist gleichschenklig mit Basis SB, also ist w_γ gleichzeitig Mittelsenkrechte auf SB. Also stehen die Schenkel der Winkel $\angle IFU$ und $\angle SBA$ paarweise aufeinander senkrecht; und weil F und I auf verschiedenen Seiten von AB sind, sind diese Winkel gleich.

Weiter hat im Dreieck BFI der Winkel bei F die Weite α (nach Umfangswinkelsatz über der Sehne BC), und der Winkel bei B die Weite ${}^{\gamma}/_2 + {}^{\beta}/_2$ (nach Umfangswinkelsatz über der Sehne AF und weil BI Winkelhalbierende bei B ist). Nach Satz von der Innenwinkelsumme im Dreieck bleibt für den Innenwinkel bei I die Weite $180° - \alpha - ({}^{\gamma}/_2 + {}^{\beta}/_2) = {}^{\gamma}/_2 + {}^{\beta}/_2$; dies ist der gleiche Wert wie für den Winkel bei B. Damit ist das Dreieck BFI gleichschenklig mit Basis BI, d.h. die Strecken FB und FI haben die gleiche Länge.

Das Dreieck FUB ist gleichschenklig und hat den Spitzenwinkel γ (Umfangswinkelsatz); gleiches gilt für das Dreieck SCB. Also sind sie ähnlich. Zusammen mit den vorigen Ergebnissen ist also

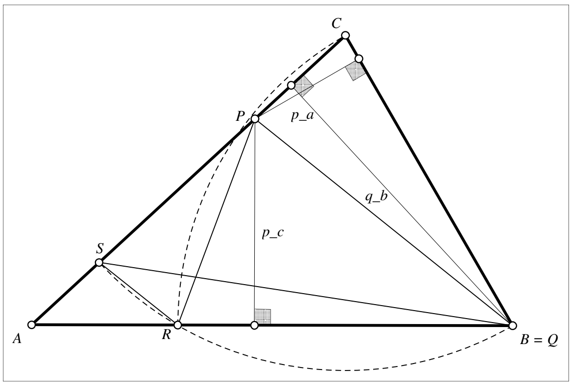
$$BR : BS = BC : BS = BU : BF = FU : FI.$$

d.h. die Dreiecke FUI und BRS stimmen überein im Verhältnis zweier Seiten und dem eingeschlossenen Winkel, sind also ähnlich, sogar gleichsinnig ähnlich. Damit ist wegen $FU \perp BR$ und $FI \perp BS$ auch $UI \perp RS$.

Bemerkung: Die Aussage bleibt gültig, auch wenn man auf die Einschränkung $a \le b \le c$ und $a < c$ verzichtet und nur fordert, dass das Dreieck ABC nicht gleichseitig ist. Man definiert dann

R und S als Punkte auf den Strahlen $[BA$ bzw. $[CA$, für die die Dreiecke RBC und SCB gleichschenklig mit Basis RC bzw. SB sind.

Nun zeigen wir die Aussage für eine spezielle Lage der beiden Punkte P und Q, dabei sei der Abstand des Punktes Q zur Seite AC mit q_b bezeichnet, der Abstand des Punktes P zu den Seiten BC und AB mit p_a bzw. p_c.



Es sei $Q = B$ gewählt und P so auf der Strecke AC, dass $d(P) = d(Q)$. Mit diesen Bezeichnungen ist dann die Bedingung $d(P) = d(Q)$ äquivalent zu $q_b = p_a + p_c$. Dass die Wahl möglich ist, zeigt man folgendermaßen: Liegt P auf C, so ist $d(P) = p_c \le q_b$ (einfache Flächenbetrachtung am Dreieck ABC zusammen mit $b \le c$), und liegt P auf A, so ist $d(P) = p_a \ge q_b$ wegen $a \le b$; und da sich $d(P)$ beim Verschieben zwischen A und C stetig ändert, wird irgendwann der Wert $d(P) = d(Q)$ angenommen.

Die Punkte R und P zerlegen das Dreieck ABC in die Teildreiecke ΔARP, ΔRPB und ΔBCP; für deren Flächeninhalte gilt also

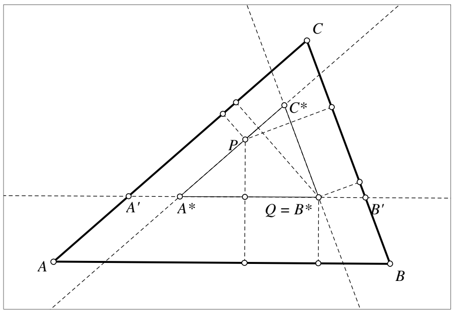
$$\begin{aligned} bq_b &= 2|ACB| = 2|ARP| + 2|RPB| + 2|BCP| \\ &= (c-a)p_c + ap_c + ap_a = (c-a)p_c + a(p_c + p_a) = (c-a)p_c + aq_b \text{ und somit} \end{aligned}$$

$$(b-a)q_b = (c-a)p_c \qquad \text{oder auch} \quad \frac{p_c}{q_b} = \frac{b-a}{c-a} = \frac{\overline{AS}}{\overline{AR}} \quad (*);$$

übrigens sind die beiden Nenner von Null verschieden, da $a < c$ und q_b Höhe in einem Dreieck mit positivem Flächeninhalt ist.

Andererseits sind p_c und q_b Höhen im gleichen Dreieck ABP, sie verhalten sich also umgekehrt wie die Längen der zugehörigen Seiten AB und AP. Damit kann man die obige Verhältnisgleichung (*) ergänzen zu $\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{p_c}{q_b} = \frac{\overline{AS}}{\overline{AR}}$, woraus nach Strahlensatz sofort $RS \parallel PQ$ und schließlich $PQ \perp UI$ folgt.

Schließlich gehen wir von einer beliebige Lage der Punkte P und Q mit der Eigenschaft $d(P) = d(Q)$ aus. Hierzu betrachten wir die Parallelen zu AB durch die Punkte P und Q: Eine dieser beiden bestimmt mit den Geraden BC und CA ein Dreieck $A'B'C$ derart, dass keiner der Punkt P und Q außerhalb dieses Dreiecks liegt, diese Parallele wählen wir aus. Da der Abstand der Punkte P und Q zu den Seiten $B'C$ und CA' gleich geblieben ist und zur neuen Seite $A'B'$ um den gleichen Betrag kleiner geworden ist, gilt die Beziehung $d(P) = d(Q)$ auch bezogen auf das neue Dreieck $A'B'C$.



Da man sich das neue Dreieck $A'B'C$ durch zentrischen Streckung von C aus dem Dreieck ABC entstanden vorstellen kann, ist auch die Verbindungsstrecke der Punkte UI parallel zur Verbindungsstrecke $U'I'$ des neuen Dreiecks, d.h. die Gerade PQ schließt mit UI und mit $U'I'$ den gleichen Winkel ein.

Diesen Prozess führen wir nun mit dem neuen Dreieck und der Seite B'C durch, anschließend mit der Seite analog nochmals $B'C''$. So erhalten wir schließlich eine Dreieck $A^*B^*C^*$, bei dem einer der Punkte – dies sei o.B.d.A. der Punkt Q – auf zwei der Seiten, also auf einer Ecke liegt, und der andere Punkt, also P, auf der gegenüberliegenden Seite. Die Beziehung $d(P) = d(Q)$ gilt auch bezüglich diesen neuen Dreiecks und PQ schließt mit UI und U^*I^* den gleichen Winkel ein. Übrigens muss Q mit derjenigen Ecke zusammenfallen, in der die kürzeste und die längste Seite des Dreiecks zusammenkommen, also mit der Ecke B: Wäre $Q = A$, so ergibt eine Flächenbetrachtung zusammen mit $a \le b \le c$ und $a < c$ den Widerspruch $aq_a = cp_c + bp_b > a(p_c + p_b) = aq_a$, analog mit <–Zeichen die Annahme $Q = C$. Hieraus ergibt sich dann, dass P auf A^*C^* liegt.

Es genügt also, für den Beweis eine solche Lage anzunehmen, dies haben wir oben getan.

2. Beweis: Mit den oben gewählten Bezeichnungen können wir die relative Lage von U und I folgendermaßen beschreiben:

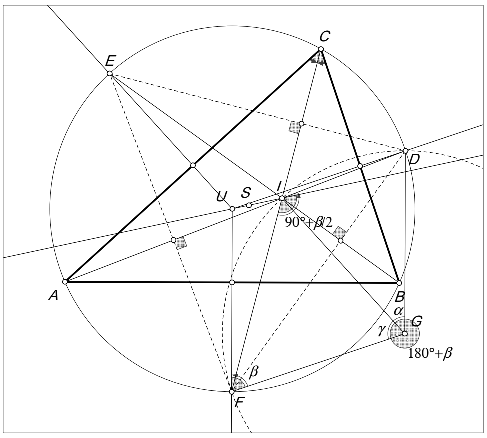
HS (Formulierung mit Vektoren): Es gilt $\overrightarrow{UI} = \overrightarrow{UD} + \overrightarrow{UE} + \overrightarrow{UF}$.

HS (Formulierung des gleichen Sachverhaltes ohne Vektoren): Dann ist I die Ecke des nach Vorgabe von U und F eindeutig konstruierbaren Vierecks $UFGI$ mit den Eigenschaften $\overline{UF} = \overline{FG} = \overline{GI}$, $\angle GFU = \angle CBA = \beta$, $\angle IGF = \angle ACB = \gamma$, wobei der Drehsinn jeweils gegen den Uhrzeigersinn gemäß der Reihenfolge der Punkte in den Winkelbezeichnungen gegeben ist.

HS (Variante der 2. Formulierung): Ergänze UFD durch den Punkt G zur Raute $UFGD$. Dann ist I der Punkt, der UGE zur Raute $UGIE$ ergänzt.

1. Beweis des HS (vektorielle Form): Die Dreiecke ABC und DEF haben den gleichen Umkreis. Nach Umfangswinkelsatz ist $\angle ADF = \angle ACF = \gamma/2$ und $\angle DFE = \angle DFC + \angle CFE = \angle DAC + \angle CBE = \alpha/2 + \beta/2$; d.h. der dritte Winkel im Dreieck, das durch die Winkelhalbierende AD und den Geraden DF und FE bestimmt ist, ist $180° - (\alpha/2 + \beta/2 + \gamma/2) = 90°$. Entsprechendes gilt für die anderen Winkelhalbierenden; diese sind also Höhen im Dreieck DEF. Damit hat das Dreieck DEF den Umkreismittelpunkt U und den Höhenschnittpunkt I. Deren Verbindungsgerade ist die Eulergerade, von der man weiß, dass sie den Schwerpunkt S des Dreiecks DEF enthält; dieser teilt gleichzeitig die Strecke UI im Verhältnis 1:2. Also ist $\overrightarrow{UI} = 3\cdot\overrightarrow{US} = 3\cdot{}^1/_3(\overrightarrow{UD} + \overrightarrow{UE} + \overrightarrow{UF})$.

2. Beweis des HS (in seiner konstruktive Formulierung): Wir ergänzen den Punkt G so, dass $UFGD$ eine Raute ist, dann ist $\overline{UF} = \overline{FG} = \overline{GD}$. Weiter ist $\angle GFU = \beta$, da die Schenkel dieser Winkel paarweise aufeinander senkrecht stehen, und $\angle DGF = 180° - \beta$.

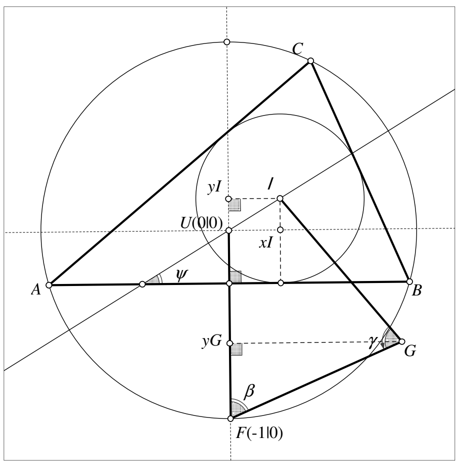


Im Dreieck DFI ist $\angle DFI = \angle DFC = \angle DAC = \alpha/2$ und $\angle IDF = \angle ADF = \angle ACF = \gamma/2$; d.h. es ist $\angle FID = 180° - (\alpha/2 + \gamma/2) = 90° + \beta/2$. Andererseits ist $\angle DGF = \angle FUD = 180° - \beta$, d.h. es ist (gegen den Uhrzeigersinn gemessen) $\angle FGD = 360° - (180° - \beta) = 180° + \beta = 2\cdot\angle FID$. Der Umfangswinkelsatz liefert nun, dass die Punkte D, I und F alle auf dem gleichen Kreis um G liegen. Also sind die Dreiecke DGI und IGF gleichschenklig mit Basis DI bzw. IF. Deren Innenwinkel können wir berechnen: Es ist $DG \| UF \perp AB$; also bestimmen die Geraden DG, AB und AD ein rechtwinkliges Dreieck, in dem $\angle IDG = 90° - \alpha/2$; hieraus berechnet sich schnell $\angle DGI = 180° - 2\cdot\angle IDG = \alpha$, und es bleibt $\angle IGF = \angle DGF - \angle DGI = 180° - \alpha - \beta = \gamma$.

3. Beweis des HS: Siehe unten im 2. Beweis der Aussage der Aufgabe.

Nun zum eigentlichen Beweis (trigonometrisches Rechnen): Wir wählen den Umkreisradius als Längeneinheit, dann ist $a = 2\sin(\alpha)$, $b = 2\sin(\beta)$, $c = 2\sin(\gamma)$.

Bekanntlich sind in einem Dreieck die Mittelpunkte von Umkreis und Inkreis genau dann verschieden, wenn das Dreieck nicht gleichseitig ist. Es gibt also zwei verschieden lange Seiten, wir können also o.B.d.A. annehmen, dass $\overline{BC} < \overline{AC}$ und somit $\sin(\beta) - \sin(\alpha) > 0$. Zunächst leiten wir eine Bedingung her für den Winkel ψ, den die Gerade UI mit der Geraden AB einschließt (d.h. den Winkel, um den die Gerade AB gegen den Uhrzeigersinn gedreht werden muss, bis sie parallel zu UI ist, $-90° < \psi \le 90°$): Dazu denken wir uns ein kartesisches Koordinatensystem so auf die Figur gelegt, dass der Ursprung in U liegt und F die Koordinaten (0|–1) hat, die Koordinaten von I sind dann $(x_I \mid y_I)$.



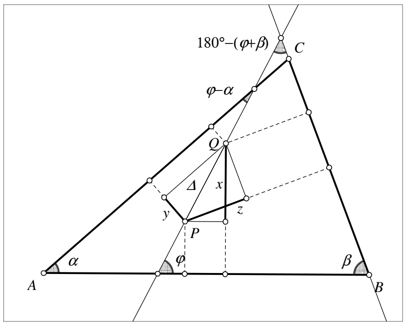
Nach bekannten Sätzen über die Längen der Tangentenabschnitte an den Inkreis ist

$$x_I = (s-a) - {}^c/_2 = {}^b/_2 - {}^a/_2 = \sin(\beta) - \sin(\alpha) > 0, \text{ also } x_I \neq 0, \text{ also } \tan(\psi) = \frac{y_I}{x_I}.$$

Zur Bestimmung von y_I betrachten wir das Viereck $UFGI$ mit den im Hilfssatz vorgegebenen Eigenschaften $UF \perp AB$, $\overline{UF} = \overline{FG} = \overline{GI} = 1$, $\angle GFU = \beta$, $\angle IGF = \gamma$. Aus der Figur entnimmt man sofort $y_G = -1 + \cos(\beta)$; und somit

$y_I = -1 + \cos(\beta) + \sin(\gamma-(90°-\beta)) = \cos(\beta) + \sin(180°-(\beta+\gamma)+90°) - 1 = \cos(\beta) + \cos(\alpha) - 1$, also $\tan(\psi) = \dfrac{\cos(\alpha)+\cos(\beta)-1}{\sin(\beta)-\sin(\alpha)}$.

Nun betrachten wir zwei Punkte P und Q im Innern des Dreiecks. Ihre Entfernung sei Δ, die Gerade PQ schließe mit der Gerade AB den Winkel φ ein (d.h. den Winkel, um den die Gerade AB gegen den Uhrzeigersinn gedreht werden muss, sodass $AB \parallel PQ$, $0° \leq \varphi < 180°$). Dann gilt (vgl. Figur; x, y und z müssen als gerichtete Größen verstanden werden, die Beziehungen gelten auch, wenn $\varphi-\alpha < 0$ oder $180°-(\varphi+\beta) < 0$) und):



$$\begin{aligned} d(Q) - d(P) &= x - y - z \\ &= \Delta\cdot(\sin(\varphi) - \sin(\varphi-\alpha) - \sin(180° - (\varphi+\beta)) \\ &= \Delta\cdot(\sin(\varphi) - [\sin(\varphi)\cos(\alpha) - \sin(\alpha)\cos(\varphi)] - [\sin(\varphi)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\varphi)] \\ &= \Delta\cdot(\sin(\varphi)\,[1-\cos(\alpha)-\cos(\beta)\,] - \cos(\varphi)[\sin(\beta)-\sin(\alpha)]\,). \end{aligned}$$

Gilt nun $d(Q) = d(P)$, so hat die Klammer den Wert 0, d.h. es ist

$$\sin(\varphi)\,[1 - \cos(\alpha) - \cos(\beta)\,] = \cos(\varphi)\,[\sin(\beta) - \sin(\alpha)].$$

Falls $\varphi = 90°$, hat die rechte Seite den Wert 0; und da auf der linken Seite der Faktor $\sin(\varphi) \neq 0$, ist $1-\cos(\alpha)-\cos(\beta) = 0$; also ist $\tan(\psi) = 0$, d.h. $\psi = 0°$ und somit $UI \perp PQ$.

Falls $\varphi \neq 90°$, hat keiner der Faktoren den Wert 0 und wir können umformen zu

$$\tan(\varphi) = \frac{\sin(\beta)-\sin(\alpha)}{1-\cos(\alpha)-\cos(\beta)} = -\frac{1}{\tan(\psi)},$$ d.h. auch hier ist $UI \perp PQ$.

3. Beweis (Vektorrechnung, mit Beweis des Hilfssatzes, vgl. Figur zum 2. Beweis des HS): Wir wählen U als Ursprung und den Umkreisradius als Einheit. Wie üblich identifizieren wir Punkt X mit Ortsvektor $\boldsymbol{x}$. Die Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{e}$, und $\boldsymbol{f}$ haben also alle die Länge 1. Der Abstand eines Punktes X im Innern des Dreiecks zur Gerade AB ist somit das Skalarprodukt $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{x})\circ\boldsymbol{f}$ oder auch $(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{x})\circ\boldsymbol{f}$; dabei haben wir die Richtung der Vektoren tatsächlich so gewählt, dass für innere Punkte X immer positive Werte erzeugt werden. Mit diesen Bezeichnungen ist dann $d(X) = (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{x})\circ\boldsymbol{f} + (\boldsymbol{b}-\boldsymbol{x})\circ\boldsymbol{d} + (\boldsymbol{c}-\boldsymbol{x})\circ\boldsymbol{e}$.

Wenn also für zwei verschiedene Punkte P und Q im Innern des Dreiecks ABC die Bedingung $d(P) = d(Q)$ erfüllt ist, dann führt der Hilfssatz zu

$$\begin{aligned} 0 = d(P) - d(Q) &= (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{p})\circ\boldsymbol{f} + (\boldsymbol{b}-\boldsymbol{p})\circ\boldsymbol{d} + (\boldsymbol{c}-\boldsymbol{p})\circ\boldsymbol{e} - [(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{q})\circ\boldsymbol{f} + (\boldsymbol{b}-\boldsymbol{q})\circ\boldsymbol{d} + (\boldsymbol{c}-\boldsymbol{q})\circ\boldsymbol{e}] \\ &= [(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{p}) - (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{q})]\circ\boldsymbol{f} + [(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{p}) - (\boldsymbol{b}-\boldsymbol{q})]\circ\boldsymbol{d} + [(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{p}) - (\boldsymbol{c}-\boldsymbol{q})]\circ\boldsymbol{e} \\ &= (\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p})\circ(\boldsymbol{d}+\boldsymbol{e}+\boldsymbol{f}).\ (*) \end{aligned}$$

Nun zeigen wir, dass $(\boldsymbol{d}+\boldsymbol{e}+\boldsymbol{f})$ der Ortsvektor des Inkreismittelpunktes I ist: Nach Umfangswinkelsatz schließen die Vektoren $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{d}$ ebenso wie $\boldsymbol{c}$ und $\boldsymbol{d}$ den Winkel α ein; die Vektoren $\boldsymbol{e}$ und $\boldsymbol{f}$ stehen auf den Schenkeln des Winkels α senkrecht und schließen so den Winkel $180°-\alpha$ ein. Also ist $\boldsymbol{b}\circ\boldsymbol{d} = \boldsymbol{c}\circ\boldsymbol{d} = -\boldsymbol{e}\circ\boldsymbol{f} = 1\cdot1\cdot\cos(\alpha) = \cos(\alpha)$; analog $\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{e} = \boldsymbol{c}\circ\boldsymbol{e} = -\boldsymbol{d}\circ\boldsymbol{f} = \cos(\beta)$ und $\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{f} = \boldsymbol{b}\circ\boldsymbol{f} = -\boldsymbol{d}\circ\boldsymbol{e} = \cos(\gamma)$. So erhält man für den Abstand des Punktes $(\boldsymbol{d}+\boldsymbol{e}+\boldsymbol{f})$ von der Seite AB bzw. BC bzw. CA drei mal den gleichen Wert, nämlich

$$
\begin{aligned}
[\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{d}+\boldsymbol{e}+\boldsymbol{f})]\circ\boldsymbol{f} &= \boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{f} - \boldsymbol{d}\circ\boldsymbol{f} - \boldsymbol{e}\circ\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{f} &&= \cos(\gamma) + \cos(\beta) + \cos(\alpha) - 1\\
&= [\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{d}+\boldsymbol{e}+\boldsymbol{f})]\circ\boldsymbol{d} &&= \cos(\alpha) - 1 + \cos(\gamma) - 1 + \cos(\beta)\\
&= [\boldsymbol{c} - (\boldsymbol{d}+\boldsymbol{e}+\boldsymbol{f})]\circ\boldsymbol{e} &&= \cos(\beta) + \cos(\gamma) - 1 + \cos(\alpha).
\end{aligned}
$$

Der Punkt hat also von allen drei Seiten den gleichen Abstand, ist also der Inkreismittelpunkt I.

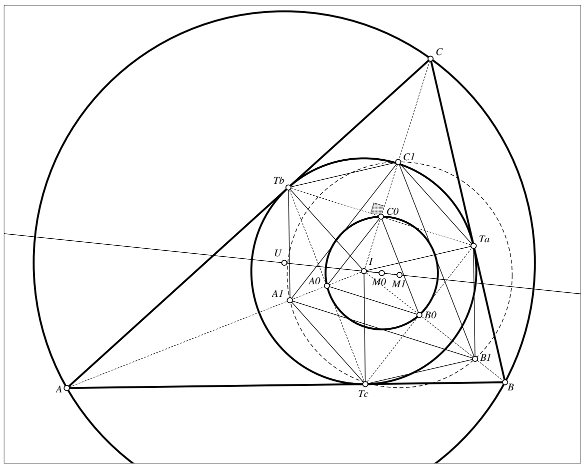
Schließlich bemerken wir, dass bei einem Dreieck In– und Umkreismittelpunkt genau dann verschieden sind, wenn das Dreieck nicht gleichseitig ist, d.h. wenn $\boldsymbol{d}+\boldsymbol{e}+\boldsymbol{f}$ nicht der Nullvektor ist. Also sind im Skalarprodukt (*) beide Vektoren vom Nullvektor verschieden, ist dies gleichbedeutend mit $PQ \perp UI$. Das war zu zeigen.

3. Beweis (teilweise mit Vektorrechnung): Wir wählen I als Ursprung und den Inkreisradius als Einheit. Die Berührpunkte des Inkreises an den Seiten a, b und c seien mit T_a, T_b, T_c bezeichnet, wie üblich identifizieren wir Punkt und zugehörigen Ortsvektor. Der gerichtete Abstand $d_x(P)$ eines Punktes P von einer Dreiecksseite x $(x \in \{a,b,c\})$ berechnet sich dann nach bekannten Formeln (Hesse–Normalenform einer Geraden) mit Hilfe des Skalarproduktes zu $d_x(P) = \overrightarrow{T_x} \circ (\overrightarrow{T_x} - \overrightarrow{P}) = 1 - \overrightarrow{T_x} \circ \overrightarrow{P}$, wobei wir für Punkte P im Inneren des Dreiecks stets positive Werte erhalten. (Um dies nachzuweisen, genügt es, dies für einen beliebigen inneren Punkte nachzuweisen; am besten eignet sich hierfür der sicher innen liegende Punkt I.)

Gilt nun für zwei verschiedene innere Punkte P und Q, dass $d(P) = d(Q)$, so ist

$$0 = \sum_{a,b,c}\left(1 - \overrightarrow{T_x} \circ \overrightarrow{P}\right) - \sum_{a,b,c}\left(1 - \overrightarrow{T_x} \circ \overrightarrow{Q}\right) = \sum_{a,b,c}\left(\overrightarrow{T_x} \circ \overrightarrow{Q} - \overrightarrow{T_x} \circ \overrightarrow{P}\right) = \overrightarrow{PQ} \circ (\overrightarrow{T_a} + \overrightarrow{T_b} + \overrightarrow{T_c}).$$

Da $U \neq I$, ist $(\overrightarrow{T_a} + \overrightarrow{T_b} + \overrightarrow{T_c}) \neq \vec{0}$, und da $P \neq Q$, ist auch $\overrightarrow{PQ} \neq \vec{0}$. Also ist $\overrightarrow{PQ} \perp (\overrightarrow{T_a} + \overrightarrow{T_b} + \overrightarrow{T_c})$. Es ist also noch zu zeigen, dass $\overrightarrow{T_a} + \overrightarrow{T_b} + \overrightarrow{T_c} = \lambda \cdot \overrightarrow{UI}$ mit einem geeigneten $\lambda \neq 0$ ist:



Es sei $\overrightarrow{M_1} := \overrightarrow{T_a} + \overrightarrow{T_b} + \overrightarrow{T_c}$. Wir ergänzen die Punkte T_bIT_a durch den Punkt C_1 zur Raute $T_bIT_aC_1$; analog seien Punkte B_1 und A_1 definiert. Aus der Zeichnung kann man nun sofort ablesen, dass $\overrightarrow{T_a} + \overrightarrow{T_b} = \overrightarrow{C_1}$, also $\overrightarrow{M_1} = \overrightarrow{C_1} + \overrightarrow{T_c} = \overrightarrow{A_1} + \overrightarrow{T_a} = \overrightarrow{B_1} + \overrightarrow{T_b}$. Da alle $\overrightarrow{T_x}$ die Länge 1 haben, liegen A_1, B_1 und C_1 auf einem Kreis mit Mittelpunkt M_1. (Dieser hat übrigens den gleichen Radius wie der Inkreis.)

Der Schnittpunkt der Diagonalen in der Raute $T_bIT_aC_1$ sei C_0, die Punkte A_0 und B_0 seien analog definiert. Die Diagonalen einer Raute halbieren sich gegenseitig, damit entsteht der Umkreis des Dreiecks $A_0B_0C_0$ mit Mittelpunkt M_0 aus dem Umkreis des Dreiecks $A_1B_1C_1$ mit Mittelpunkt M_1 durch zentrische Streckung mit Zentrum I und Streckfaktor $^1/_2$. Insbesondere liegen I und die beiden Mittelpunkte M_1 und M_0 auf einer Geraden.

Weiter ist aus Symmetriegründen die Diagonale IC_1 Symmetrieachse im Drachen T_aCT_bI, d.h. diese Gerade enthält auch den Punkt C und T_aC_0 ist Höhe im Dreieck CIT_a. Dieses ist zudem rechtwinklig bei T_a; nach Kathetensatz gilt also $\overline{IT_a}^2 = \overline{IC_0} \cdot \overline{IC}$. Damit ist C_0 das Bild von C bei der Inversion am Inkreis. Entsprechendes gilt für A_0 und A sowie B_0 und B. Weiter ist die Inversion kreistreu, also ist der Umkreis von Dreieck $A_0B_0C_0$ das Bild des Umkreises von Dreieck ABC. Insbesondere liegen die Mittelpunkte von Umkreis, Bildkreis und Spiegelkreis, also U, I und M_0 auf einer Geraden. Zusammen mit dem Ergebnis des vorigen Absatzes folgt, dass U, I und M_1 auf einer Geraden liegen, dies war zu zeigen.