BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK
Bildung & Begabung

Aufgaben und Lösungen

2. Runde 2016

Über Kommentare und Ergänzungen zu diesen Lösungsbeispielen freuen wir uns!

» **KORREKTURKOMMISSION | KARL FEGERT**

» **BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK**

Kortrijker Straße 1, 53177 Bonn | Postfach 20 02 01, 53132 Bonn | Tel.: (02 28) 9 59 15-20, Fax: (02 28) 9 59 15-29
info@bundeswettbewerb-mathematik.de, www.bundeswettbewerb-mathematik.de

Stand: 23. Oktober 2016

GEFÖRDERT VOM

Bundesministerium für Bildung und Forschung

STIFTERVERBAND

KULTUSMINISTER KONFERENZ

Aufgabe 1: Mit n verschiedenen Zahlen kann man bekanntlich auf $\frac{n(n-1)}{2}$ Arten Summen von je zwei verschiedenen von ihnen bilden.

Für welche n $(n \geq 3)$ gibt es n verschiedene ganze Zahlen, für die diese Summen $\frac{n(n-1)}{2}$ aufeinander folgende Zahlen sind?

Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.

Ergebnis: Dies ist für $n = 3$ und für $n = 4$ möglich, für alle anderen Zahlen $n \geq 5$ nicht.

1. Beweis: Für $n = 3$ und für $n = 4$ ist dies möglich, nämlich z.B. für

$n = 3$: Zu den Zahlen $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ und $a_3 = 3$ gibt es die 3 Summen 3, 4 und 5, und für

$n = 4$: Zu den Zahlen $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$ und $a = 5$ gibt es die 6 Summen 3, 4, 5, 6, 7 und 8.

Nun nehmen wir an, dass für ein $n \geq 3$ die Zahlen $a_1, a_2, ..., a_n$ mit $a_1 < a_2 < ...< a_n$ die Bedingung der Aufgabe erfüllen. Da insbesondere keine zwei der Summen gleich sind, gibt es keine zwei Paare (a_r, a_s) und (a_t, a_u) $(r, s, t, u$ paarweise verschieden), für die $a_r + a_s = a_t + a_u$ ist. Anders ausgedrückt:

Lemma 1: Für paarweise verschiedene Indices r, s, t, u gibt es niemals eine ganze Zahl d, für die $a_r + d = a_u$ und gleichzeitig $a_t + d = a_s$.

Weiter ist $a_1 + a_2 < a_1 + a_3$; und da diese beiden Summen die beiden kleinsten der möglichen Summen aus zwei verschiedenen der a_i sind, bilden sie aufeinander folgende Zahlen, d.h. es ist $a_1 + a_2 +1 = a_1 + a_3$, also $a_2 +1 = a_3$. Entsprechendes gilt für $a_n + a_{n-1} > a_n + a_{n-2}$: diese beiden Summen sind größer als alle andern möglichen Summen aus zwei verschiedenen der a_i, sie bilden also ebenfalls aufeinander folgende Zahlen. Zusammenfassend gilt also

Lemma 2: Es ist stets $a_2 + 1 = a_3$ und $a_{n-2} + 1 = a_{n-1}$.

Betrachtet man Lemma 1 und Lemma 2 gemeinsam, so folgt sofort, dass $2, 3, n-2$ und $n-1$ nicht paarweise verschiedene Indices sein können; hieraus folgt sofort $3 \geq n-2$, also $n \leq 5$.

Damit ist nur noch der Fall $n = 5$ zum Widerspruch zu führen, dies können wir auf drei Arten tun:

Variante 1: Für $n = 5$ gibt es 10 mögliche Summen von je zwei der fünf Zahlen. Sei S die Summe dieser 10 Summen. Darin kommt jede der fünf Zahlen genau vier Mal vor, d.h. S ist durch 4 teilbar. Andererseits ist $S = 10s + (0 + 1 + 2 + ... + 9) = 10s + 45$ (dabei sei s der Wert der kleinsten Summe), d.h. S ist ungerade und damit sicher nicht durch 4 teilbar.

Variante 2: Für $n = 5$ gibt es 10 mögliche Summen, und da die Werte dieser Summen 10 aufeinander folgende Zahlen sind, sind genau fünf dieser Summen gerade und ihre beiden Summanden besitzen jeweils gleiche Parität. Die Anzahl solcher Summen berechnet sich zu (die Variable u bezeichne die Anzahl der ungeraden Zahlen unter den fünf Zahlen)

$$\binom{u}{2}+\binom{5-u}{2} = {}^1/_2[\, u \cdot (u-1) + (5-u) \cdot (5-u-1)$$

$$= {}^1/_2[\, u^2 - u + 25 - 5u - 5 - 5u + u^2 + u)] = u^2 + 10 - 5u.$$

Aber diese Zahl ist für jeden Wert von u gerade, kann also nie den Wert 5 annehmen.

Variante 3: Wir wählen ganze Zahlen k und m so, dass $a_2 = a_1 + k$ und $a_n = a_{n-1} + m$ und nehmen an, dass $n = 5$. Dann gilt $a_3 = a_{n-2}$; zusammen mit Lemma 2 ergibt sich

$$a_2 = a_1 + k, \quad a_3 = a_1 + k + 1, \quad a_4 = a_3 + 1 = a_1 + k + 2, \quad a_5 = a_1 + k + 2 + m.$$

Es ist $a_2 + 1 = a_3$ und $a_3 +1 = a_4$, also kann nach Lemma 1 weder $a_1 + 1 = a_2$ noch $a_4 + 1 = a_5$ sein, es ist also $k \neq 1$ und $m \neq 1$. Es kann aber auch nicht gleichzeitig $a_1 + 2 = a_2$ und $a_4 + 2 = a_5$, d.h. nicht gleichzeitig $k = 2$ und $m = 2$. Es ist also $k + m \geq 5$.

Für $n = 5$ gibt es $^1/_2 \cdot 5 \cdot 4 = 10$ Summen. Da sie aufeinander folgende Zahlen bilden, ist die Differenz aus größter Summe und kleinster Summe 9. Konkret:

$$9 = (a_5 + a_4) - (a_1 + a_2) = (a_1 + k + 2 + m + a_1 + k + 2) - (a_1 + a_1 + k) = k + m + 4,$$

d.h. es gilt $k + m = 5$. Die einzigen beiden Möglichkeiten hierfür führen zu einem Widerspruch zu Lemma 1: Aus $k = 2$ und $m = 3$ folgt $a_1 + 3 = a_3$ und $a_2 + 3 = a_5$, und aus $k = 3$ und $m = 2$ folgt $a_1 + 4 = a_3$ und $a_2 + 4 = a_5$.

2. Beweis: Wir nehmen an, dass die Zahlen $a_1 < a_2 < ... < a_n$ mit $n \geq 3$ die Bedingung der Aufgabe erfüllen. Aus der Bedingung der Aufgabe folgt insbesondere, dass es keine zwei Zahlenpaare (a_r, a_s) und (a_t, a_u) mit paarweise verschiedenen Indices r, s, t, u gibt, für die $a_r + a_s = a_t + a_u$.

Wir können o.B.d.A. annehmen, das $a_1 = 0$: Falls $a_1 \neq 0$, ersetzen wir jedes der a_i durch $b_i := a_i - a_1$ $(i = 1, 2, ..., n)$, dann ist $b_1 = 0$ und für alle $i \neq j$, $r \neq s$ gilt

$$(b_i + b_j) - (b_r + b_s) = (a_i - a_1 + a_j - a_1) - (a_r - a_1 + a_s - a_1) = (a_i + a_j) - (a_r + a_s);$$

d.h. zwei Summen aus je zwei verschiedenen b_i unterscheiden sich um den gleichen Betrag wie die zwei Summen aus den entsprechenden a_i. Damit bilden die Summen der a_i genau dann eine Folge von aufeinander folgenden Zahlen, wenn dies auch die Summen der b_i tun.

Sei also $a_1 = 0$, ferner $a_2 =: k$. Dann ist $a_1 + a_2 = k$, und dies ist die kleinste Summe von zwei verschiedenen der a_i. Also sind die Zahlen k, $k + 1$, $k + 2, ..., k + {}^1/_2 \cdot n(n-1) - 1$ die Werte der möglichen Summen von zwei verschiedenen der a_i.

Es ist $a_3 \geq k + 1$, damit gilt für alle $i \geq 2$ und $j \geq 3$, $i \neq j$ die Abschätzung $a_i + a_j \geq a_2 + a_3 \geq 2k + 1$. Hieraus schließen wir, dass jede der $k + 1$ Zahlen $k, k + 1, k + 2, ..., 2k$ eine Summe der Form $a_1 + a_j = a_j$ $(j = 2, 3, ..., k + 2)$ ist, und hieraus schließen wir wiederum, dass

$$a_j = k + j - 2 \text{ für alle } j = 2, 3, ..., k + 2. \quad (*)$$

Insbesondere ist auch $n \geq k + 2$.

Wäre nun $k \geq 3$, also auch $n \geq 5$, so wäre nach (*) $a_2 + a_5 = k + k + 3 = a_3 + a_4$ im Widerspruch zur Eingangsbemerkung.

Falls $k = 2$, ist $n \geq 4$; und nach (*) ist $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 4$. Diese vier Zahlen haben die paarweisen Summen 2, 3, 4, 5, 6 und 7, sie erfüllen also die Bedingungen der Aufgabe, d.h. für $n = 4$ ist eine Auswahl von n Zahlen im Sinne der Aufgabe möglich. Den Fall $k = 2$ und $n \geq 5$ führen wir zum Widerspruch: a_5 kann dann keinen der Werte 5, 6 oder 7 annehmen. da sonst die Summe $a_1 + a_5$ den gleichen Wert hätte wie $a_2 + a_3$ bzw. $a_2 + a_4$ bzw. $a_3 + a_4$. Also ist $a_5 \geq 8$, andererseits muss es eine Summe aus zwei verschiedenen a_i mit Wert 8 geben, also ist $a_5 = a_1 + a_5 = 8$. Dann erzeugen die Zahlen $a_1, ..., a_5$ die zehn Summen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11 und 12. Die Lücke 9 wird notwendigerweise durch $a_6 = a_1 + a_6 = 9$ gefüllt, was aber zum Widerspruch $a_2 + a_6 = a_3 + a_5$ führt.

Falls $k = 1$, ist $n \geq 3$; und nach (*) ist $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$. Diese drei Zahlen haben die paarweisen Summen 1, 2, und 3, sie erfüllen also die Bedingungen der Aufgabe, d.h. für $n = 3$ ist eine Auswahl von n Zahlen im Sinne der Aufgabe möglich. Ist $n = 4$, so kann a_4 nicht den Wert 3 annehmen, weil sonst $a_1 + a_4 = a_2 + a_3$ wäre; und da die auf die Zahl 3 folgende Zahl 4 der Wert einer Summe sein muss, ist notwendigerweise $a_4 = a_1 + a_4 = 4$. Diese vier Zahlen haben die paarweisen Summen 1, 2, 3, 4, 5 und 6, erfüllen also die Bedingungen der Aufgabe. Den Fall $k = 1$ und $n \geq 5$ führen wir zum Widerspruch: Mit ähnlicher Argumentation wie im Fall $k = 2$ stellen wir fest, dass $a_5 = 7$. Dies führt zu den Summen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 und 11 und die Lücke muss durch ein $a_6 = 10$ gefüllt werden. Hier erhalten wir nun den Widerspruch $a_2 + a_6 = a_4 + a_5 = 11$.

Damit sind alle Fälle abgearbeitet und die Behauptung bewiesen.

Bemerkung: Aus den Beweisen kann man leicht ableiten, dass genau diejenigen Zahlentripel und Zahlenquadrupel der Form $(d, d+1, d+2)$, $(d, d+1, d+2, d+4)$ oder $(d, d+2, d+3, d+4)$ mit beliebig gewähltem ganzzahligen d die Bedingung der Aufgabe erfüllen.

Aufgabe 2: Beweise, dass es unendlich viele positive ganze Zahlen gibt, die sich nicht als Summe aus einer Dreieckszahl und einer Primzahl darstellen lassen.

Anmerkung: Unter einer Dreieckszahl versteht man eine Zahl der Form $\frac{k(k+1)}{2}$, wobei k eine positive ganze Zahl ist.

Bezeichnungen: Es sei $d(k)$ die k – te Dreieckszahl, also $d(k) := \frac{k(k+1)}{2}$.

Beweis: Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es einen eindeutig bestimmten Index k_n, sodass $d(k_n) \leq n < d(k_n+1)$ ist; weiter gibt es hierzu eine eindeutig bestimmte Zahl $r(n)$, sodass $n = d(k_n) + r(n)$; dabei ist $0 \leq r(n) < d(k_n+1) - d(k_n)$.

Es genügt nun zu zeigen, dass es unendlich viele Zahlen n gibt, für die jede Differenz $n - d(j)$ mit $j \in \{1, 2, ..., k_n\}$ keine Primzahl ist (dies schließt den Fall $n = d(k_n)$ mit ein). Wir formen um (zur besseren Lesbarkeit lassen wir den Index n weg):

$$\begin{aligned} n - d(j) &= r(k) + d(k) - d(j) = r(k) + \frac{k(k+1)}{2} - \frac{j(j+1)}{2} \\ &= r(k) + \frac{(k^2 - j^2) + (k-j)}{2} = r(k) + \frac{(k-j)(k+j+1)}{2}, \end{aligned}$$

wobei $j \in \{1, 2, ..., k-1\}$.

Um Sonderfälle nicht untersuchen zu müssen, betrachten wir nur solche n, für die $k_n \geq 4$. Die beiden Faktoren $(k-j)$ und $(k+j+1)$ sind stets beide positiv, und genau einer von ihnen ist gerade, sodass der Bruch rechts stets gekürzt werde kann, d.h. dass sein Wert stets eine positive ganze Zahl ist.

Falls $j \leq k-3$, ist $k - j \geq 3$ und $k + j + 1 \geq k$, d.h. beide Faktoren des Zählers sind größer als 2. Da genau einer gegen die 2 gekürzt werden kann, bleibt nach dem Kürzen eine Zahl, die Produkt von zwei Zahlen ist, die beide größer als 1 sind; damit ist der Wert dieses Produktes sicher keine Primzahl. Es liegt daher nahe, $r(k) = 0$ für alle k zu wählen und zu hoffen, dass man genügend k findet, für die der Bruch sowohl für $j = k-1$ als auch für $j = k-2$ keine Primzahl ist. (Man beschränkt sich also bei der Suche nach den unendlich vielen Zahlen auf Dreieckszahlen). Tatsächlich wird man da fündig:

Für $j = k-1$ vereinfacht sich der Bruch zu $\frac{(k-(k-1))(k+k-1+1)}{2} = k$, und

für $j = k-2$ vereinfacht sich der Bruch zu $\frac{(k-(k-2))(k+k-2+1)}{2} = 2k-1$.

Für jede der unendlich vielen positiven ganzzahligen t ist nun $k := 2(3t+1)$ sicher keine Primzahl, ebenso ist $2k - 1 = 2{\cdot}2(3t+1) - 1 = 3(4t+1)$ keine Primzahl. Beide Terme sind streng monoton wachsend mit t, d.h. sie erzeugen auch unendliche viele verschiedene Werte. Das war zu zeigen.

Bemerkungen: Die Bedingung, dass die Zahl k von der Form $6t + 2$ ist, ist hinreichend, aber nicht notwendig, wie die Zahl $k = 18 = 6{\cdot}3 + 0$ mit $2k - 1 = 35 = 5{\cdot}7$ zeigt.

$n = 61 = d(10) + 6$ ist keine Dreieckszahl (also eine Zahl mit $r(n) \neq 0$), hat aber trotzdem die geforderte Eigenschaft. Eine Suche mit dem Computer lässt es zweifelhaft erscheinen, dass es unendlich viele solche n mit $r(n) \neq 0$ und der geforderten Eigenschaft gibt.

Aufgabe 3: Bestimme alle Funktionen f, die für alle reellen Zahlen außer $1/3$ und $-1/3$ definiert sind und die für jede solche Zahl x die Gleichung $f\left(\frac{x+1}{1-3x}\right)+f(x)=x$ erfüllen.

Anmerkung: Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.

Ergebnis: Es ist $f(x) = \ = \frac{1}{2}\left(\frac{(x+1)(9x^2-3x+2)}{(3x+1)(3x-1)}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{9x^3+6x^2-x+2}{9x^2-1}$.

1. Beweis (mit Herleitung): Sei $g(x) := \frac{x+1}{1-3x} = -\frac{1}{3}+\frac{4}{3(3x-1)}$ für alle $x \neq 1/3$. Offensichtlich nimmt $g(x)$ nie den Wert $-1/3$ an und es gilt $g(x) = 1/3 \Leftrightarrow x = -1/3$, d.h. wenn wir den Definitionsbereich von g auf $D := \mathbb{R} \setminus \{-1/3, +1/3\}$ beschränken, nimmt $g(x)$ nur Werte aus D an. Damit sind die Funktionen $g(g(x))$ und $g(g(g(x)))$ für $x \in D$ wohldefiniert. Ferner gilt für alle $x \in D$ (keiner der vorkommenden Nenner kann den Wert 0 annehmen):

$$g(g(x)) = \frac{\frac{x+1}{1-3x}+1}{1-3\frac{x+1}{1-3x}} = \frac{x+1+(1-3x)}{1-3x-3(x+1)} = \frac{2-2x}{-2-6x} = \frac{x-1}{3x+1}, \text{ sowie}$$

$$g(g(g(x))) = \frac{\frac{x-1}{3x+1}+1}{1-3\frac{x-1}{3x+1}} = \frac{x-1+3x+1}{3x+1-3(x-1)} = x.$$

Nun betrachten wir die vorgegebene Funktionsgleichung und ersetzen x durch $g(x)$ und $g(g(x))$. Dies ist möglich, weil nach oben Gesagtem die Argumente von f jeweils nur Werte aus D annehmen. Man erhält mit $g(g(g(x))) = x$ folgende drei Funktionsgleichungen, die für alle $x \in D$ erfüllt werden müssen:

$$f\left(\frac{x+1}{1-3x}\right) + f(x) = x \qquad (1)$$

$$f\left(\frac{x-1}{3x+1}\right) + f\left(\frac{x+1}{1-3x}\right) = \frac{x+1}{1-3x} \qquad (2)$$

$$f(x) + f\left(\frac{x-1}{3x+1}\right) = \frac{x-1}{3x+1}. \qquad (3)$$

Addition der Gleichungen $1/2\,[(1) - (2) + (3)]$ ergibt die notwendige Bedingung

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x-\frac{x+1}{1-3x}+\frac{x-1}{3x+1}\right) \qquad \text{für alle } x \in D.$$

Diese Funktion f erfüllt auch tatsächlich die geg. Funktionsgleichung, wie die Probe sofort zeigt: Es ist

$$f\left(\frac{x+1}{1-3x}\right)+f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{1-3x}-\frac{x-1}{3x+1}+\frac{\frac{x+1}{1-3x}-1}{3\frac{x+1}{1-3x}+1}\right)+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x+1}{1-3x}+\frac{x-1}{3x+1}\right) = x \quad \text{für alle für alle } x \in D.$$

2. Beweis (Verallgemeinerung): Sei g eine Funktion der reellen Zahlen auf sich und ihre Definitionsmenge $D \neq \varnothing$ so eingeschränkt, dass g nur Werte aus D annimmt. Dann sind die Funktionen $g(x)$, $g(g(x))$, $g(g(g(x)))$ für alle $x \in D$ definiert und haben nur Werte in D. Ferner habe g die Eigenschaft, dass $g(g(g(x))) = x$ für alle $x \in D$. Weiter sei f eine Funktion, die für alle $x \in D$ definiert ist und für die folgende Funktionalgleichung gilt:

$$f(g(x)) + f(x) = x \quad \text{für alle } x \in D. \qquad (1)$$

Da $g(x)$ nur Werte in D hat, ist $f(g(x))$ wohldefiniert. Dann müssen auch folgende Funktionsgleichungen gelten (man ersetze x durch $g(x)$, danach x durch $g(g(x))$ und verwende $g(g(g(x))) = x$)

$$f(g(g(x))) + f(g(x)) = g(x) \quad \text{für alle } x \in D. \qquad (2)$$

$$f(x) + f(g(g(x))) = g(g(x)) \quad \text{für alle } x \in D. \qquad (3)$$

Hieraus folgt sofort durch geeignetes Addieren bzw. Subtrahieren der Gleichungen (nämlich (1) – (2) + (3) bzw. (1) + (2) – (3)), dass notwendigerweise $f(x)$ und $f(g(x))$ von folgender Form sind:

$$f(x) = {}^1\!/_2\,[\,x - g(x) + g(g(x))\,] \quad \text{für alle } x \in D \qquad (4) \text{ und}$$

$$f(g(x)) = {}^1\!/_2\,[\,x + g(x) - g(g(x))\,] \quad \text{für alle } x \in D \qquad (5).$$

Bisher wurde der Gesamtausdruck $f(g(x))$ als Variable betrachtet, ohne die darin enthaltene zusätzliche Bedingung zu beachten, dass sich die rechte Seite von (5) ergeben muss, wenn man $g(x)$ in die Funktion f einsetzt. Dies ist noch zu überprüfen: Tatsächlich folgt die Gleichung (5) auch aus Gleichung (4) zusammen mit $g(g(g(x))) = x$:

$$f(g(x)) = {}^1\!/_2\,[\,g(x) - g(g(x)) + g(g(g(x)))\,] = {}^1\!/_2\,[\,x + g(x) - g(g(x))\,] \quad \text{für alle } x \in D.$$

Aus den Gleichungen (4) und (5) folgt durch Addition sofort die gegebenen Funktionalgleichung (1).

Dies wenden wir auf unsere Aufgabenstellung an: Die Funktion $g(x) := \frac{x+1}{1-3x} = -\frac{1}{3} + \frac{4}{3(3x-1)}$ mit $D := \mathbb{R} \setminus \{-{}^1\!/_3, +{}^1\!/_3\}$ erfüllt obige Bedingung, weil $g(x) \neq \pm{}^1\!/_3$ für alle $x \neq \pm{}^1\!/_3$, und weiter

$$g(g(x)) = \frac{\frac{x+1}{1-3x}+1}{1-3\frac{x+1}{1-3x}} = \frac{x+1+(1-3x)}{1-3x-3(x+1)} = \frac{2-2x}{-2-6x} = \frac{x-1}{3x+1}, \text{ und weiter}$$

$$g(g(g(x))) = \frac{\frac{x-1}{3x+1}+1}{1-3\frac{x-1}{3x+1}} = \frac{x-1+3x+1}{3x+1-3(3x-1)} = x.$$

Also folgt $f(x) = {}^1\!/_2\,[\,x - g(x) + g(g(x))\,] = \frac{1}{2}\left(x - \frac{x+1}{1-3x} + \frac{x-1}{3x+1}\right)$ für alle $x \in D = \mathbb{R} \setminus \{-{}^1\!/_3, +{}^1\!/_3\}$.

Bemerkungen: Man kann die drei Gleichungen aus den beiden Beweisen als lineares Gleichungssystem mit den Variablen $A = f\left(\frac{x+1}{1-3x}\right)$, $B = f\left(\frac{x-1}{3x+1}\right)$, $C = f(x)$ und der Determinante $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ auffassen. Da die Determinante verschieden von Null ist, besitzt das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung $[\,A, B, C\,] = [\,A(x), B(x), C(x)\,]$. Damit ist ausreichend begründet, dass $C(x)$ eine Lösung ist und wir $f(x) = C(x)$ setzen können. Es fehlt allerdings noch eine Überlegung, warum wir tatsächlich $B(x) = C(g(x))$ setzen können. $B(x)$ muss ja nicht nur das Gleichungssystem erfüllen, sondern $B(x)$ muss auch dadurch entstehen, dass man $g(x)$ in die Funktion C einsetzt. Dies muss gesondert gezeigt werden; eine Bemerkung in diesem Zusammenhang, dass die Gleichung (2) aus Gleichung (1) entstanden ist, indem man x durch $g(x)$ ersetzt, würde auch genügen.

Wie man leicht nachrechnet, erfüllt jede Funktion $g_{ac}(x) = \frac{ax+(-a^2-ac-c)}{x+c}$ (wobei $a \neq 0$, $a \neq -c$) über $D = \mathbb{R} \setminus \{\,a, -c\,\}$ die Bedingung $g(g(g(x))) = x$, ebenso auch $g(x) = x$.

Man kann nachweisen, dass $g(x) = x$ die einzige stetige auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion mit $g(g(g(x))) = x$ ist.

Aufgabe 4: Jede Seitenfläche eines regulären Dodekaeders liegt in einer eindeutig bestimmten Ebene. Diese Ebenen zerteilen den Raum in eine endliche Anzahl von disjunkten Raumteilen.

Bestimme deren Anzahl.

Anmerkung: Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.
Die Ebenen selbst oder Teile davon zählen nicht als eigenständige Raumteile.

Ergebnis: Die Anzahl der disjunkten Raumteile ist 185.

Vorbetrachtung: Wir betrachten zunächst eine beliebige Menge von paarweise verschiedenen Ebenen im Raum. Diese zerlegen den Raum in Raumteile. Zu einem Punkt A im Raum, der in keiner Ebene liegt, kann formal der zugehörige Raumteil definiert werden als offene Menge aller Punkte B, für die die Verbindungsstrecke AB mit keiner Ebene einen Punkt gemeinsam hat. Jeder dieser Raumteile wird von einer endlichen Anzahl von paarweise verschiedenen Ebenen begrenzt. Diese Raumteile sind also konvexe Polyeder, die wir über ihre Flächen, Kanten und Ecken beschreiben können. Wir merken noch an, dass einige der Flächen und Kanten sich ins Unendliche erstrecken können und dass wir auch "entartete Fälle" zulassen (z.B. die Zerlegung des Raumes durch genau zwei parallele Ebenen).

Zwei nicht identische Ebenen, die sich schneiden, haben eine Schnittgerade gemeinsam. Wir wählen irgendeine Ebene E aus und betrachten die Schnittgeraden, die E mit den übrigen Ebenen gemeinsam hat. Diese Schnittgeraden liegen alle in E, jeder Schnittpunkt zweier solcher Geraden liegt dann auf mindestens drei Ebenen, bildet also eine Ecke von mindestens drei dieser Polyeder. Umgekehrt liegt auch jeder Eckpunkt der Zerlegung in mindestens drei Ebenen.

Die Ecken auf einer Schnittgeraden zerlegen diese in Kanten, diese liegen dann in mindestens zwei Ebenen. Umgekehrt liegt auch jede Kante in mindestens zwei Ebenen. Jedes durch die Geraden in E definierte zusammenhängende Flächenstück bildet eine Seitenfläche von genau zwei Zerlegungspolyedern, wobei jede Fläche immer in genau einer Ebene liegt und immer genau zwei Raumteile begrenzt.

1. Beweis (erweiterter Eulerscher Polyedersatz): Wir benützen folgenden Hilfssatz:

HS: Bei jeder Zerlegung des Raumes durch paarweise verschiedene Ebenen (parallele Ebenen sind zugelassen) in r Raumteile mit e Ecken, k Kanten und f Flächen gilt stets

$$e - k + f - r = -1.$$

Beweis des HS (vollständige Induktion nach der Anzahl p von Ebenen):

Ind'.Anf.: Die Aussage ist richtig für $p = 0$, da dann $e = k = f = 0$ und $r = 1$.

(Man kann die Induktion auch bei $p = 1$ oder $p = 2$ beginnen: Für $p = 1$ ist mit $e = k = 0, f = 1$ und $r = 2$ die Aussage ebenfalls richtig; für $p = 2$ ist im allgemeinen Fall mit $e = 0$, $k = 1, f = r = 4$ bzw. – falls die Ebenen parallel sind – mit $e = k = 0, f = 2$, $r = 3$ die Aussage ebenfalls richtig.)

Ind'.Ann.: Für ein bestimmtes $p \geq 1$ gelte in jeder Konfiguration mit p Ebenen die Gleichung $e - k + f - r = -1$.

Ind'.Schluss: Wir betrachten eine Konfiguration mit $p + 1$ Ebenen, die den Raum in r' Raumteile mit e' Ecken, k' Kanten und f' Flächen zerlegt. Aus ihr entfernen wir eine beliebige Ebene, es bleibt eine Konfiguration mit p Ebenen, r Raumteilen, e "alten" Ecken, k "alten" Kanten und f "alten" Flächen; nach Induktionsvoraussetzung gilt $e - k + f - r = -1$.

Nun fügen wir die Ebene $p + 1$ wieder hinzu, dadurch entstehen "neue" Raumteile mit "neuen" Ecken, Kanten und Flächen. Die Anzahl derjenigen neuen Ecken, Kanten und Flächen, die in E_{p+1} liegen, seien mit e_n, k_n bzw. f_n bezeichnet. Man beachte, dass evtl. nicht jede Ecke und nicht jede Kante in E_{p+1} neu ist.

Neue Ecken müssen alle auf E_{p+1} liegen, also ist $e' = e + e_n$.

Neue Kanten können auf zwei Arten entstanden sein: Entweder liegt die neue Kante in E_{p+1}, oder E_{p+1} schneidet eine Kante, die nicht in E_{p+1} liegt, in genau zwei Teile; dann und nur dann entsteht eine neue Ecke in E_{p+1}. Also ist $k' = k + k_n + e_n$.

Neue Flächenstücke können auf zwei Arten entstanden sein: Entweder liegen sie in E_{p+1}, oder E_{p+1} schneidet ein bestehendes Flächenstück in genau zwei Teile. Letzteres geschieht genau dann, wenn eine neue Kante in E_{p+1} entsteht. Damit ist $f' = f + f_n + k_n$.

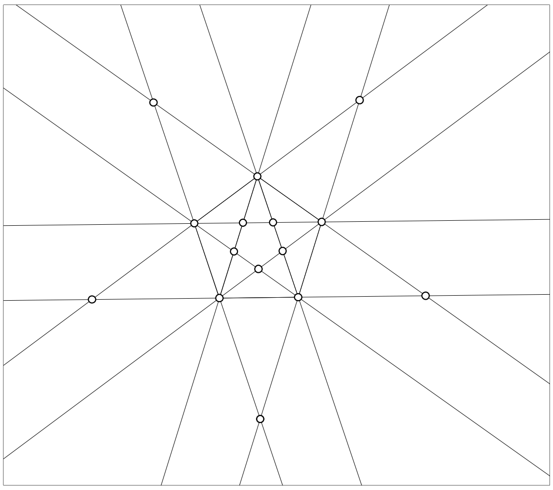
Schließlich entsteht jedes neue Raumteil dadurch, dass E_{p+1} ein altes Raumteil zerschneidet. Genau dann entsteht ein neues Flächenstück in E_{p+1}, also ist $r' = r + f_n$.

Addition ergibt sofort

$$e' - k' + f' - r' = (e + e_n) - (k + k_n + e_n) + f + f_n + k_n - (r + f_n) = e - k + f - r = -1.$$

dies war zu zeigen.

Nun zum eigentlichen Beweis: Wir betrachten eine der durch die Seiten des Dodekaeders definierte Ebene. Aus Symmetriegründen sind die folgenden Überlegungen für jede dieser 12 Ebenen gleich. Die Ebene wird von 10 der übrigen 11 Ebenen geschnitten, dabei gibt es zu jeder der 10 Ebenen genau eine, zu der sie parallel ist. Somit besteht die Figur der Schnittgeraden in dieser Ebene aus 5 Paaren von untereinander parallelen Geraden; aus Symmetriegründen ergibt sich das Muster der nebenstehenden Figur mit den Schnittwinkeln von 72° bzw. 36°, in der Figur gibt es 5 Punkte, in denen sich 4 Geraden schneiden, sowie 10 Punkte, in denen sich 2 Geraden schneiden.



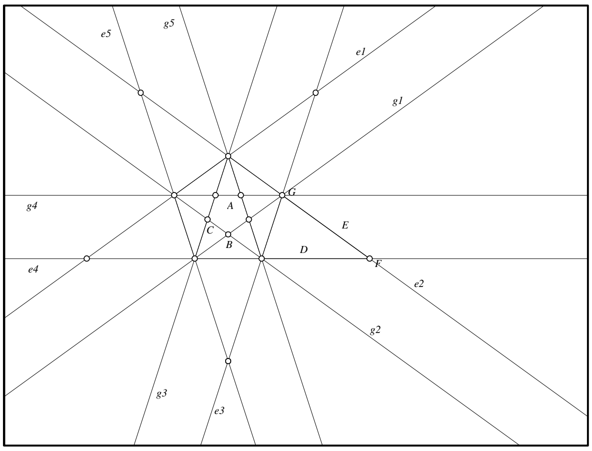
Einfaches Abzählen ergibt, dass die Schnittgeraden in der betrachteten Ebene 36 Begrenzungsflächen erzeugen. Da jede Schnittfläche in genau einer Ebene liegt, erzeugt die Zerlegung $12 \cdot 36 = 432$ Flächen.

Jede der 10 Schnittgeraden wird in 5 Kanten zerlegt, jede Kante liegt in mindestens zwei Ebenen, und da im Fall des Dodekaeders keine Schnittgerade in drei Ebenen liegt, liegt jede Kante in genau zwei Ebenen. Somit erzeugt die Zerlegung $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 10 \cdot 5 = 300$ Kanten.

Schließlich bestimmen wir die Anzahl der Ecken: In der betrachteten Ebene klassifizieren wir die Schnittpunkte nach Anzahl der Schnittgeraden, die durch sie gehen: Es gibt 5 Schnittpunkte, die von jeweils genau 4 Schnittgeraden erzeugt werden und damit in genau 5 Ebenen liegen; weiter gibt es 10 Schnittpunkte, die auf genau 2 Geraden und damit in genau 3 Ebenen liegen. Jeder Schnittpunkt von Schnittgeraden entspricht einer Ecke der Raumzerlegung; es gibt also insgesamt $\frac{1}{5} \cdot 12 \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 10 = 52$ Ecken.

Mit dem Hilfssatz folgt $r = e - k + f + 1 = 52 - 300 + 432 + 1 = 185$.

2. Beweis (konkretes Abzählen): Wir wählen eine beliebige der Seitenflächen des Dodekaeders aus und nennen ihre Trägerebene g; die Trägerebene der dazu parallelen Seitenebene nennen wir u. Um uns die Lage besser vorstellen zu können, stellen wir das Dodekaeder auf den Tisch, sodass die Tischebene mit u identisch ist, damit haben wir "obere" und "untere" Seitenflächen. Die Schnittgeraden von g mit den 10 von u verschiedenen Ebenen erzeugen das in der Figur dargestellte Schnittmuster aus 5 Paaren von parallelen Geraden; dabei seien mit g_1 bis g_5 diejenigen Geraden bezeichnet, die aus den Ebenen der "oberen" Seitenflächen des Dodekaeders erzeugt werden (also die Trägergeraden der Kanten der in g liegenden Seitenfläche), und mit e_1 bis e_5 die Schnittgeraden von g mit den Trägerebenen der "unteren" Seitenflächen, wobei die Indices so gewählt werden, dass Geraden mit gleichem Index parallel sind. Gelegentlich werden wir für die Schnittgerade und die zugehörige Ebene die gleiche Bezeichnung wählen. Aus Symmetriegründen sind die beschriebenen Schnittfiguren bei jeder Auswahl einer Seitenfläche des Dodekaeders auf der Tischebene identisch.



Die Gerade g_i und e_i erzeugen in g das Muster der Figur mit 36 Flächenstücken. Jedes dieser Flächenstücke ist Begrenzungsfläche zu genau zwei Raumteilen (eines "unterhalb" und eines "oberhalb" von g), jede Begrenzungsfläche liegt in genau einer der 12 durch die Seitenflächen bestimmten Ebenen. Wenn ein Raumteil f Begrenzungsflächen hat, dann tritt in genau f Trägerebenen genau eine Fläche dieses Raumteiles auf. Damit führt folgende Zählweise zum gesuchten Ergebnis:

Zu jedem Flächenstück F_i in der Ebene g ($i = 1, 2, ..., 36$) bestimmen wir die Form der beiden angrenzenden Raumteile und die Anzahl ihrer Seitenflächen f_{i1} bzw. f_{i2}. Addition über alle Flächen auf allen 12 Ebenen mit Kompensation der Mehrfachzählungen ergibt , dass $12\cdot\sum_{i=1}^{36}\left(\frac{1}{f_{i1}}+\frac{1}{f_{i2}}\right)$ die Gesamtzahl der Raumteile ist. Diese Addition beschreiben wir in nebenstehender Tabelle, dabei nützen wir Symmetrien aus: es gibt in der Figur nur 7 verschiedene Flächentypen und damit auch nur 7 verschiedene Typen von Raumteilen: eine Fläche vom Typ A, je 5 Flächen vom Typ B , C, D, F und G, je 10 vom Typ E):

c

	X		f_1		f_2	$12\cdot X\cdot(1/f_1+1/f_2)$	
Typ	Anzahl in der Ebene g	nach oben angrenzender Raumteil ist begrenzt durch Ebenen g und	Anzahl Flächen	nach unten angrenzender Raumteil ist begrenzt durch Ebenen g und	Anzahl Flächen	Zählwert	Zwischen-summe
A	1	$g_1\ g_2\ g_3\ g_4\ g_5$	6	alle sonstigen	12	3	3
B	5	$g_1\ g_2\ e_4\ g_3\ g_5$	6	$g_1\ g_2\ e_4$	4	25	28
C	5	$g_1\ g_2\ g_3$	4	$g_1\ g_2\ g_3\ e_4\ e_5$	6	25	53
D	5	$g_2\ g_4\ e_2\ e_3\ e_4$	6	$e_2\ e_3\ e_4\ g_1\ g_5$	6	20	73
E	10	$e_2\ e_4\ g_4$	4	$g_1\ e_2\ e_4\ g_4\ u$	6	50	123
F	5	$e_2\ e_4$	3	$e_2\ e_4\ u$	4	35	158
G	5	$g_1\ g_4\ e_2\ e_3$	5	$g_1\ g_4\ u$	4	27	185

3. Beweis: (Gleitebene): Wir wählen eine Ebene ε derart, dass ε zu keiner Ebene und zu keiner Schnittgeraden parallel ist und dass alle Ecken von Raumteilen auf einer Seite der Ebene liegen; diese Seite nennen wir die positive Seite, die andere Seite die negative. Eine solche Wahl von ε ist möglich, da in der Problemstellung eine nur endliche Anzahl von Ebenen gegeben ist. Anschließend unterwerfen wir diese Ebene einer Parallelverschiebung entlang ihres Normalenvektors, bis alle Ecken von Raumteilen auf der negativen Seite liegen. Genau dann, wenn ε eine Ecke von Raumteilen passiert, schneidet ε neue Raumteile. Deren Anzahl können wir bestimmen und aufaddieren. Im Detail:

In ihrer ersten Lage wird ε von 12 Ebenen in 6 Paaren paralleler Schnittgeraden geschnitten derart, dass keine drei Schnittgeraden durch den gleichen Punkt gehen, denn ein solcher Punkt wäre Schnitt von 3 Ebenen und damit Ecke eines Raumteils. Nun bestimmen wir die Anzahl der Flächenstücke auf ε. Hierzu zeichnen wir in Gedanken die Geraden der Reihe nach ein. Vor dem Einzeichnen der ersten Geraden gibt es ein Flächenstück, das mit dem Einzeichnen der ersten Geraden in zwei Teile geteilt wird, d.h. es kommt ein weiteres Flächenstück hinzu. Nun zeichnen wir weitere fünf Geraden ein, derart, dass keine zwei parallel sind: Wenn wir die k – te Gerade ($2 \le k \le 6$) einzeichnen, so wird diese von den $k-1$ schon eingezeichneten Geraden in k Teilstücke unterteilt, diese Teilstücke unterteilen ihrerseits genau k Flächenstücke in $2k$ Flächenstücke, es kommen also k Flächenstücke hinzu. Schließlich zeichnen wir die 6 Geraden, die zu einer der bisher gezeichneten parallel sind: Die k – te solche Gerade ($1 \le k \le 6$) wird von den bisher eingezeichneten in $5+k$ Abschnitte unterteilt, von denen jeder genau ein Flächenstück in genau zwei Teile teilt, es kommen also $5+k$ Flächenstücke hinzu. Damit gibt es insgesamt $1 + (1+2+...+6) + (6+7+...+11) = 73$ Flächenstücke auf ε, woraus wir schließen, dass auf der negativen Seite von ε genau 73 Raumteile liegen, diese erstrecken sich übrigens alle ins Unendliche.

Nun bestimmen wir die Anzahl der Schnittpunkte der Ebenen, d.h. die Ecken der Raumteile und die Anzahl der Ebenen, in denen sie jeweils liegen. Beim Betrachten der Schnittfigur einer Seitenebene mit den übrigen (vgl. Figur im 1. Beweis) zählen wir ab, dass es in jeder Seitenebene 15 Schnittpunkte gibt; von denen 10 in genau drei Ebenen liegen (weil sie in der Figur Schnittpunkt von zwei Geraden sind), sie seien D – Ecke genannt, und von denen fünf in genau fünf Ebenen liegen, sie seien F– Ecken genannt. Insgesamt hat also die Zerlegung des Raumes $12 \cdot 10 \cdot {}^{1}/_{3} = 40$ D – Ecken und $12 \cdot 5 \cdot {}^{1}/_{5} = 12$ F – Ecken.

Nun überlegen wir, welche neuen Raumteile die Ebene ε beim Passieren einer D – Ecke schneidet. Hierzu vergleichen wir in der Ebene ε die Figur des Schnittes mit den drei Ebenen, die diese Ecke bestimmen, und zwar unmittelbar vor und unmittelbar nach dem Durchgang. Beide Male hat man drei Geraden, die 6 unbegrenzte und eine begrenzte Fläche bestimmen. Die begrenzte Fläche ist Schnitt mit einem Raumteil, der beim Passieren nicht mehr bzw. neu geschnitten wird, während die unbegrenzten Flächen zu Raumteilen gehören, die vor und nach dem Passieren die gleichen sind. Also kommt genau ein Raumteil hinzu.

Beim Passieren einer F – Ecke stellen wir eine analoge Überlegung an: hier hat man fünf Geraden, die zehn unbegrenzte und sechs begrenzte Flächenstücke definieren, also kommen beim Passieren einer F – ecke sechs Raumteile hinzu.

Insgesamt haben wir also $73 + 1 \cdot 40 + 6 \cdot 12 = 185$ Raumteile.

4. Beweis (konkretes Abzählen am Modell): Wir legen das Dodekaeder in das Zentrum einer Kugel, wobei wir den Radius so groß wählen, dass alle Eckpunkte der Raumteile im Innern der Kugel liegen; dies ist möglich, da es nur endlich viele Eckpunkte gibt. Die Schnittlinien der Kugel und der 12 Ebenen erzeugen auf der Kugel sechs Paare von parallelen Kleinkreisen, die ihrerseits die Oberfläche der Kugel in mehrere Teilflächen zerlegen. Nebenstehendes Modell (Christbaumschmuck, von mir vor vielen Jahren schon gebastelt) stellt die Situation dar, wobei die 12 Schnittlinien der Kugel mit den Ebenen durch die rechten und die linken Ränder der sechs Metallbänder dargestellt werden.

Jeder dieser Teilflächen kann eineindeutig ein ins unendliche reichender Raumteil zugeordnet werden. Am Modell kann man nun leicht deren Gesamtzahl abzählen:

12 regelmäßige Fünfecke (je eines über jeder Fläche des Dodekaeders),
20 regelmäßige Dreiecke (je eines über jeder Ecke),

30 Rauten (je eine über jeder Kante) und
60 gleichschenklige Trapeze,

also insgesamt 12 + 20+ 30 + 60 = 122 ins unendliche reichende Raumteile.

Auch die Anzahl der endlichen Raumteile lässt sich leicht an folgendem Modell (vgl. Figur) abzählen: Ein reguläres Dodekaeder steht in der Ebene, die durch eine seiner Seitenflächen definiert ist. Auf dieser Ebene sind die Schnittgeraden mit den anderen Ebenen markiert (wie in der Figur zum 1. Beweis). Weiter enthält das Modell auf jeder Seite die fünfseitige Pyramide, die durch die 5 angrenzenden Ebenen definiert ist.

Bekanntlich hat ein Dodekaeder 12 Flächen, 30 Kanten und 20 Ecken. Aus Symmetriegründen sind die Raumteile, die in gleicher Art an eine Ecke, Fläche oder Kante anstoßen, untereinander kongruent. So kann man folgende endliche Raumteile leicht abzählen:

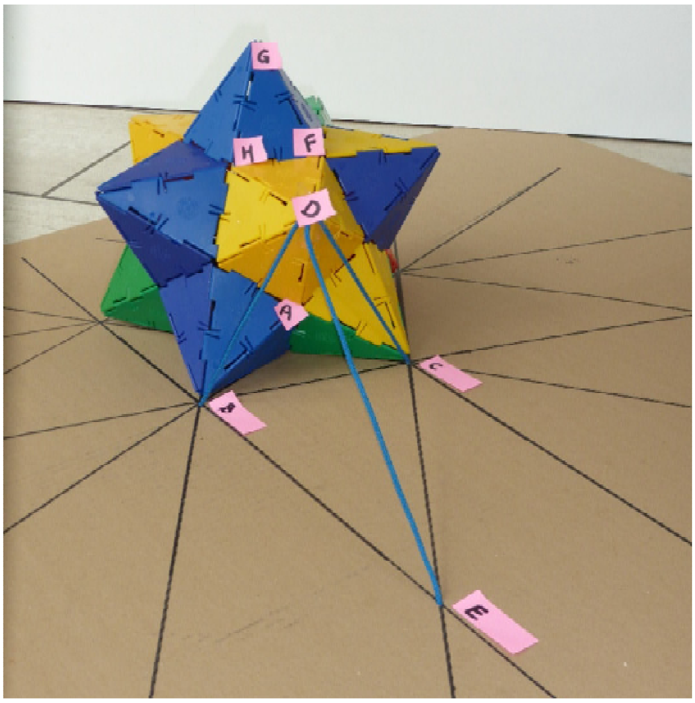
1 Dodekaeder,

12 fünfseitige Pyramiden, gebildet über jeder Fläche durch die 5 Ebenen der anliegenden Flächen,

30 Tetraeder, jeweils bestimmt durch die 4 Ebenen, die an einer Kante und ihren Endpunkten anliegen; im Modell bestimmen z.B. die Ecken $DFGH$ ein solches Tetraeder),

20 Doppelpyramiden (= zwei dreiseitige Pyramiden mit gemeinsamer Grundfläche), gebildet über jeder Ecke; im Modell bestimmen die Ecken $ABCDE$ zusammen mit den durch eine Schnur dargestellten Kanten eine solche Doppelpyramide.

also insgesamt
1 + 12 + 30 + 20 = 63 endliche Raumteile.



Da alle Schnittpunkte und alle endlichen Flächenteile in der Schnittebene beteiligt sind, sind wir sicher, dass wir alle endlichen Raumteile gezählt haben.

Gesamtsumme: 122 + 63 = 185.

Bemerkungen: Während der Bearbeitungszeit fanden wir nach intensiver Internetrecherche doch noch zwei Quellen, die diese Aufgabe abhandeln und die deswegen Spuren in meinen Lösungsbeispielen hinterlassen haben:

Hayes, F. Hayes and Shubin, Tatiana (Editors):
Mathematical Adventures for Students and Amateurs, ISBN 978-0883855485,

Kerr, Jeanne W., Wetzel, John E.:
Platonic Divisions of Space, Mathematics Magazin, Vol. 51, No. 4 (Sep., 1978), pp 229–234.

Die Formel zum erweiterten Polyedersatz fand ich in
Steinitz, E., Rademacher, H: Vorlesungen über die Theorie der Polyeder, Springer Berlin 1934, ISBN: 978–3642656101S. 285 ff.

Es gibt auch einen Beweis, der eine Gleitebene benützt, die parallel zu einer der Seitenflächen ist.