BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK

Bildung & Begabung

Aufgaben und Lösungen

2. Runde 2018

Über Kommentare und Ergänzungen zu diesen Lösungsbeispielen freuen wir uns!

» **KORREKTURKOMMISSION | KARL FEGERT**

» **BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK**

Kortrijker Straße 1, 53177 Bonn | Postfach 20 02 01, 53132 Bonn | Tel.: (02 28) 9 59 15-20, Fax: (02 28) 9 59 15-29
info@bundeswettbewerb-mathematik.de, www.bundeswettbewerb-mathematik.de

Stand: 22. Oktober 2018

GEFÖRDERT VOM

Bundesministerium für Bildung und Forschung

STIFTERVERBAND

KULTUSMINISTER KONFERENZ

talanx.

GEFÖRDERT VON GESAMTMETALL

think ING.

Aufgabe 1: Anja und Bernd nehmen abwechselnd Steine von einem Haufen mit anfangs n Steinen ($n \geq 2$). Anja beginnt und nimmt in ihrem ersten Zug wenigstens einen, aber nicht alle Steine weg. Danach nimmt, wer am Zug ist, mindestens einen, aber höchstens so viele Steine weg, wie im unmittelbar vorhergehenden Zug weggenommen wurden. Wer den letzten Stein wegnimmt, gewinnt.

Bei welchen Werten von n kann Anja den Gewinn erzwingen, bei welchen kann es Bernd?

Anmerkung: Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.

Antwort: Wenn n ($n \geq 2$) keine Zweierpotenz ist, kann Anja den Gewinn erzwingen; in allen anderen Fällen, d.h. wenn n eine Zweierpotenz ist, kann Bernd den Gewinn erzwingen.

1. Beweis: (Angabe einer Strategie): Zunächst stellen wir fest: Es gibt zu jeder positiven ganzen Zahl a

– eindeutig bestimmte ganze Zahlen r und s mit $r \geq 0$ und $0 \leq s < 2^r$, d.h. für die $a = 2^r + s$, dabei ist 2^r die größte Zweierpotenz, die kleiner oder gleich a ist.

– eindeutig bestimmte ganze Zahlen k und u mit $k \geq 0$ und u ungerade, für die $a = 2^k \cdot u$.

Vor jedem Zug ist die Spielsituation vollständig beschrieben durch die Parameter m := Anzahl der Steine auf dem Tisch und M := maximale Anzahl der Steine, die entfernt werden dürfen.

Die Situation vor einem Zug nennen wir V – Stellung, wenn $m = 2^k \cdot u$ und $M \leq 2^{k-1}$ für geeignetes k und ungerades u. Wir werden folgenden Hilfssatz beweisen:

HS: Wenn ein Spieler während des Spieles vor seinem Zug eine V–Stellung vorfindet, gewinnt der Gegenspieler mit folgender Strategie:

"Beantworte jeden Zug folgendermaßen:
Wenn Dein Gegenspieler $a = 2^r + s$ ($r \geq 0$; $0 \leq s < 2^r$) Steine wegnimmt,
dann nimm – wenn erlaubt – alle restlichen Steine weg, andernfalls $b = 2^r - s$ Steine weg".

Beweis des HS: o.B.d.A. finde Anja eine V–Stellung vor ihrem Zug vor. Dann gilt:

* Bernd kann immer den vorgeschlagenen Zug durchführen: Zunächst stellen wir fest, dass $M \leq 2^{k-1} < 2^k < 2^k \cdot u = m$. Anja kann also nicht alle Steine wegnehmen, also nicht mit ihrem Zug gewinnen. Bernd kommt also nochmals an den Zug. Da stets $0 < 2^r - s \leq 2^r + s$, ist der in der Strategie vorgeschlagenen Zug auch immer erlaubt.

* Bernds Strategie führt zum Gewinn: Bernd gewinnt mit seinem Zug oder es werden $2^r + s + 2^r - s = 2^{r+1}$ Steine vom Tisch entfernt. Wenn nicht alle Steine entfernt wurden, findet Anja vor ihrem nächsten Zug folgende Situation vor:

  $$m_{neu} = 2^k \cdot u - 2^{r+1} = 2^{r+1}(2^{k-(r+1)} \cdot u - 1) > 0 \quad \text{und } M_{neu} \leq 2^r.$$

  Dies ist in jedem Falle eine V – Stellung, weil $m_{neu} = 2^R \cdot u_{neu}$ mit $R \geq r+1 > r$ und ungeradem u_{neu}. Mit Befolgung der Strategie kann Anja nie einen Gewinnzug machen. Da mit jedem Zug Steine vom Tisch genommen werden, ist nach endlich vielen Zügen kein Stein mehr auf dem Tisch und es gibt einen Gewinner. Dieser muss Bernd sein.

Falls nun zu Beginn Anja $n = 2^k$ Steine vorfindet, darf sie höchstens $2^k - 1$ Steine wegnehmen, also nicht alle. Nun erzwingt Bernd mit der genannten Strategie bei jedem möglichen ersten Zug von Anja den Gewinn: Wenn Anja mindestens 2^{k-1} Steine wegnimmt, bleiben höchstens 2^{k-1} Steine übrig und Bernd gewinnt sofort durch Wegnahme aller restliche Steine; und wenn Anja weniger als 2^{k-1} Steine wegnimmt, handelt sie wie aus einer V–Stellung heraus und Bernd gewinnt mit der angegebenen Strategie.

Falls Anja keine Zweierpotenz vorfindet, ist $2 < n = 2^r + s$ mit geeignetem $r \geq 1$ und $0 < s < 2^r$. Ein möglicher Gewinnzug von Anja ist die Wegnahme von s Steinen. Nun ist Bernd in der gleichen Situation wie Anja im vorigen Abschnitt: Er findet $m = 2^r$ und darf höchstens $M = s < 2^r$ Steine wegnehmen. Damit kann nun Anja den Gewinn erzwingen.

2. Beweis: Alle vorkommenden Variablen bezeichnen nicht negative ganze Zahlen.

Vor jedem Zug ist die Spielsituation vollständig beschrieben durch die Parameter m = Anzahl der Steine auf dem Tisch und M = maximale Anzahl der Steine, die entfernt werden dürfen. Wir stellen m und M dar als Produkt aus der größten Zweierpotenz, die m bzw. M teilt, und einem ungeraden Faktor, d.h. m und M haben die Form

$$m = 2^k \cdot u \text{ und } M = 2^r \cdot v,\ u \text{ und } v \text{ ungerade.}$$

Wir stellen noch fest, dass nach Vorgabe von $m,M > 0$ die Parameter k, u, r, v eindeutig bestimmt sind. Gelegentlich ergänzen wir einen Index, wenn wir uns auf die Situation vor verschiedenen Zügen beziehen.

Von den Situationen, die ein Spieler vor seinem Zug vorfinden kann, untersuchen wir zwei (die übrigen Situationen sind für unsere Untersuchung nicht interessant):

Fall V: Es ist $r < k$ und $v = 1$.

Fall G: Es ist $r \geq k$, v beliebig.

Wer vor seinem Zug einen V–Fall vorfindet – o.B.d.A. sei dies Bernd – , darf höchstens $M = 2^r \cdot 1$ Steine wegnehmen; und da $r < k$, ist auch $2^r < 2^k \cdot u$, d.h. er kann nicht alle Steine wegnehmen, insbesondere kann Bernd mit seinem Zug nicht gewinnen. Jede mögliche Anzahl von Steinen, die er wegnehmen kann, ist von der Form $2^s \cdot w$ mit w ungerade und $2^s \cdot w \leq 2^r$, also insbesondere $s \leq r$. Nach seinem Zug ist dann die Anzahl der Steine auf dem Tisch

$$m_{neu} = 2^k \cdot u - 2^s \cdot w = 2^s \cdot (2^{k-s} \cdot u - w) > 0 \text{ und es ist } M_{neu} = 2^s \cdot w.$$

Die Zahl $(2^{k-s} \cdot u - w)$ ist wegen $k - s \geq 1$ sicher ungerade, es ist also $m_{neu} = 2^s \cdot u_{neu}$. Also ist $k_{neu} = s = r_{neu}$. Wenn Bernd also vor seinem Zug einen V–Fall vorfindet, kann er nur so ziehen, dass Anja den Fall $k_{neu} = s = r_{neu}$ vorfindet, also einen G–Fall; und weil $m_{neu} > 0$, kann Bernd nicht gewinnen.

Wenn Bernd vor seinem Zug einen G–Fall vorfindet, kann er wegen $k \leq r$ stets 2^k Steine entfernen.

Dann ist $m_{neu} = 2^k \cdot u - 2^k = 2^k \cdot (u-1)$ und $M_{neu} = 2^k$.

Falls $u - 1 = 0$, hat er gewonnen. Falls $u - 1 > 0$, kann man, da $u - 1$ gerade ist, die Zahl m_{neu} darstellen in der Form $m_{neu} = 2^{k+t} \cdot z$ mit ungeradem z und positivem t. Es ist also $k_{neu} > k = r_{neu}$. Damit steht Anja wieder vor einer V–Situation. Wer also vor seinem Zug einen G–Fall vorfindet, kann durch intelligentes Spiel entweder sofort gewinnen oder so ziehen, dass sein Gegenspieler einen V–Fall vorfindet.

Da bei jedem Zug Steine vom Tisch entfernt werden und anfangs endlich viele Steine auf dem Tisch sind, ist das Spiel nach endlich vielen Zügen beendet und es gibt einen Gewinner und einen Verlierer. Wer dabei irgendwann vor einem G–Fall steht, kann also den Gewinn erzwingen, wer irgendwann vor einem V–Fall steht, kann sich gegen einen Verlust nicht wehren.

Um festzustellen, wer dies sein wird, untersuchen wir die Situation vor dem ersten Zug: Dort ist $m = n = 2^k \cdot u$ und $M = n - 1 = 2^k \cdot u - 1 = 2^r \cdot v$ für geeignete k, u, v mit $k \geq 1$, u und v ungerade. Wir unterscheiden auch hier zwei Fälle:

Fall 1: n ist Zweierpotenz, d.h. $u = 1$: Dann liegen 2^k Steine auf dem Tisch. Jeder mögliche Zug von Anja besteht aus der Wegnahme von $2^s \cdot w$ Steinen, wobei w ungerade ist und $2^s \cdot w < 2^k$. Insbesondere ist dann $s < k$. Die Situation nach dem Zug ist beschrieben durch

$$m_{neu} = 2^k \cdot u - 2^s \cdot w = 2^s \cdot (2^{k-s} \cdot u - w) > 0,\ M_{neu} = 2^s \cdot w,$$

Weil $s < k$ ist, ist $(2^{k-s} \cdot u - w)$ ungerade, d.h. es ist $m_{neu} = 2^s \cdot u_{neu}$ und somit $k_{neu} = s = r_{neu}$. Damit steht Bernd nach jedem ersten Zug von Anja vor einem G–Fall und kann somit schließlich den Gewinn erzwingen.

Fall 2: n ist keine Zweierpotenz, d.h. $u \geq 3$: Im ersten Zug ist $2^k \cdot u > 2^k \geq 1$, d.h. Anja darf 2^k Steine entnehmen. Die Anzahl der Steine auf dem Tisch nach dem Zug ist

$$m_{neu} = 2^k \cdot (u-1) \text{ und } M_{neu} = 2^k.$$

Da $u - 1$ gerade und positiv ist, ist $m_{neu} = 2^{k+t} \cdot z$ mit geeignetem ungeradem z und positivem t. Also ist $r_{neu} = k < k_{neu}$, d.h. Bernd steht vor seinem ersten Zug vor einer V–Situation und Anja kann den Gewinn erzwingen.

Bemerkung: Man kann den Beweis auch führen, indem man die Strategie vorgibt:

> "Entferne im ersten Zug die höchste Zweierpotenz, die n teilt. Danach entferne stets die höchste Zweierpotenz an Steinen, die sowohl m als auch M teilt.

und dann zeigt, dass Anja dieser Strategie folgen kann, wenn n keine Zweierpotenz ist; und dass Bernd ihr folgen kann, wenn n Zweierpotenz ist, unabhängig davon, welchen ersten Zug Anja macht.

3. Beweis (mit Binärdarstellung der Anzahl Steine auf dem Tisch): Die höchste Zweierpotenz, die eine Zahl teilt, kann man direkt aus deren Binärdarstellung ablesen: Es ist die Zahl, die gebildet wird aus den ersten Nullen und der ersten Ziffer 1 von rechts. Damit kann man einfacher argumentieren:

Fall 1: Sei n keine Zweierpotenz. Wir werden zeigen, dass Anja dann den Gewinn z.B. mit folgender Strategie erzwingen kann:

> "Stelle die Anzahl der Steine im Haufen im Binärsystem dar. Wenn darin an r–ter Stelle von rechts zum ersten Mal die Ziffer 1 erscheint, nimm 2^{r-1} Steine weg, d.h. nimm so viele Steine weg, dass in der Binärdarstellung von n die erste Ziffer 1 von rechts durch ein Ziffer 0 ersetzt wird und sich sonst nichts ändert."

Im Weiteren verkürzen wir den Begriff "die Ziffern der Binärdarstellung der Zahl n" zu "die Ziffern der Zahl n".

* Anja kann beim ersten Zug die Strategie befolgen: Nach Voraussetzung ist die Anzahl der Steine im Haufen vor dem ersten Zug keine Zweierpotenz, d.h. die Binärdarstellung von n enthält mindestens zwei Ziffern 1. Wenn Anja den vorgeschlagenen Zug macht, bleibt mindestens eine andere Ziffer 1 stehen, und somit verbleiben noch Steine auf dem Tisch.

* Anja kann nach jedem Zug von Bernd die Strategie befolgen: Vor einem Zug von Bernd habe Anja erlaubter Weise $2^{r-1} = 100\ldots0|_2$ Steine (r Ziffern) entfernt. Nach Voraussetzung bewirkt dies, dass auf den letzten r Stellen der neuen Anzahl Steine auf dem Tisch nur Ziffern 0 stehen. Wenn auch weiter links keine weitere Ziffer 1 steht (das kommt beim ersten Zug nicht vor), dann hat Anja alle Steine entfernt und gewonnen. Wenn nicht, dann sei B die Anzahl der Steine, die Bernd im folgenden Zug entnimmt. Nach Spielregel muss B die Bedingung $1 \leq B \leq 2^{r-1} = 100\ldots0|_2$ erfüllen. Für jedes solche B gibt es dann ein $r' \leq r$ ($r' \geq 1$) so, dass in der Zahl B an der r'–ten Stelle von rechts die erste Ziffer 1 erscheint. Führt man den schulüblichen Subtraktionsalgorithmus im Binärsystem durch, so erkennt man, dass auch die neue Anzahl von Steinen auf dem Tisch an der r'–ten Stelle von rechts die erste Ziffer 1 hat. Es sind also noch Steine auf dem Tisch und Bernd hat nicht gewonnen und Anja kann nun durch Wegnahme von $2^{r'-1}$ Steinen diese erste Ziffer 1 von rechts entfernen; dies ist erlaubt, weil $2^{r'-1} \leq B$.

* Anjas Strategie führt zum Gewinn: Da mit jedem Zug die Zahl der Steine auf dem Tisch kleiner wird, endet das Spiel nach endlich vielen Zügen. Da Anja nach jedem Zug von Bernd noch ziehen kann, ist sie es, die irgendwann den letzten Zug macht, also gewinnt.

Fall 2: n ist eine Zweierpotenz ($n \geq 2$): Sei also $n = 2^k$ für ein geeignetes ganzzahliges $k \geq 1$, d.h. die Zahl n beginnt mit Ziffer 1 und hat dann nur noch k Ziffern 0. Wir zeigen, dass jeder mögliche erste Zug von Anja eine Situation hinterlässt, in der Bernd gewinnt. Die Anzahl Steine, die Anja im ersten Zug entnimmt, sei A. Nach Spielregel ist die Wegnahme für jedes A mit $1 \leq A < 2^k$ und nur für diese erlaubt. Jedes erlaubt A hat also eine Ziffer 1 an einer r–ten Stelle von rechts mit $r \leq k$. Führt man den Subtraktionsalgorithmus im Binärsystem durch, sieht man sofort, dass dann bei der Zahl $n - A$, also der Anzahl der Steine auf dem Tisch nach Anjas Zug, die erste Ziffer 1 von rechts ebenfalls an der r–ten Stelle auftaucht. Nun kann Bernd die im Fall 1 beschriebene Strategie von Anja anwenden: er entfernt 2^{r-1} Steine, d.h. er entfernt "die erste Ziffer 1 von rechts". Im ersten seiner Züge ist dies erlaubt, weil $2^{r-1} \leq A$. Falls die einzige Ziffer 1 war, hat er gewonnen, falls weitere Ziffern 1 da sind, ist Bernd in der im Fall 1 beschriebenen Situation von Anja, kann also schließlich gewinnen.

4. Beweis (vollst. Induktion, ohne Angabe einer konkreten Strategie): Wir zeigen zuerst folgenden Hilfssatz:

HS: Wenn ein Spieler vor seinem Zug auf dem Tisch 2^k (k positiv ganz) Steine vorfindet und diese nicht auf einmal wegnehmen darf, besitzt der Gegenspieler eine Gewinnstrategie.

Induktionsanfang: Die Aussage ist richtig für $k = 1$: Es liegen $2^1 = 2$ Steine auf dem Tisch, o.B.d.A. sei Anja am Zug. Sie darf nur einen Stein wegnehmen, damit bleibt ein Stein auf dem Tisch, den Bernd regelgerecht wegnehmen kann und somit gewinnt.

Induktionsannahme: Die Aussage sei richtig für ein $k \geq 1$.

Induktionsschluss: Die Aussage ist dann auch richtig für $k + 1$: Anja findet auf dem Tisch 2^{k+1} Steine vor, die sie nicht alle wegnehmen darf, d.h. sie entnimmt a Steine mit $1 \leq a \leq 2^{k+1}$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

> Fall 1: $2^k \leq a < 2^{k+1}$: Dann liegen nach Anjas Zug höchstens 2^k Steine, die Bernd den Regeln entsprechend alle wegnehmen kann und er hat gewonnen.
>
> Fall 2: $1 \leq a < 2^k$: Dann trennen wir vor Anjas Zug in Gedanken den Haufen von 2^{k+1} Steinen in zwei Haufen mit je 2^k Steinen und nehmen an, dass Anja zuerst nur Steine von einem der beiden Haufen wegnimmt. Nach Bedingung der Fallunterscheidung kann sie nicht alle auf einmal wegnehmen. Also besitzt nach Induktionsannahme Bernd für diesen Haufen eine Gewinnstrategie, d.h. er kann so ziehen, dass er – evtl. nach mehreren Zügen – von diesem Haufen den letzten Stein und nur diesen entnimmt. Danach steht Anja erneut vor einem Haufen von 2^k Steinen, und da die Maximalzahl wegnehmbarer Steine nie größer wird, darf sie wiederum nicht alle auf einmal wegnehmen. Damit hat Bernd wieder nach der Induktionsvoraussetzung eine Gewinnstrategie, d.h. er kann von diesem Haufen wieder den letzten Stein wegnehmen und somit gewinnen.

Ist also zu Beginn n eine Zweierpotenz, so besitzt Bernd eine Gewinnstrategie. Ist n keine Zweierpotenz, also $n = 2^k + r$ mit positivem ganzzahligem k und $1 \leq r < 2^k$, kann Anja bei ihrem ersten Zug stets r Steine wegnehmen. Bernd findet dann vor seinem Zug 2^k Steine auf dem Tisch vor und kann diese wegen $r < 2^k$ nicht alle wegnehmen. Damit hat nach dem HS Anja eine Gewinnstrategie.

5. Beweis (etwas knapp formuliert, ohne konkrete Angabe einer Strategie): Sei n die Anzahl der Steine zu Beginn des Spieles.

Wenn $n = 2$, hat Bernd eine Gewinnstrategie (schärfer: er kann gar nicht verlieren): Anja darf nur einen Stein wegnehmen und Bernd entfernt dann regel– und pflichtgemäß den letzten Stein.

Wenn n ungerade und $n \geq 3$, hat Anja eine Gewinnstrategie: Sie entfernt einen Stein, danach müssen sowohl Bernd als auch Anja in jedem ihrer folgenden Züge jeweils genau einen Stein entfernen. Nach einem Zug von Anja ist die Gesamtzahl der Steine auf dem Tisch gerade, nach einem Zug von Bernd ist sie ungerade, insbesondere größer als Null. Also gewinnt Anja.

Wenn n gerade ist, dann hat derjenige Spieler eine Gewinnstrategie, der für die Anfangszahl $^n/_2$ eine Gewinnstrategie hat:

> Falls nämlich Anja für $^n/_2$ eine Gewinnstrategie hat, so geht sie folgendermaßen vor: Im ersten Zug und solange Bernd eine gerade Anzahl von Steinen entfernt, ist die Gesamtzahl der Steine auf dem Tisch gerade. Anja dividiert diese Zahl durch 2 und nimmt doppelt so viele Steine vom Tisch wie die Gewinnstrategie für $^n/_2$ fordert. Entweder entfernt Bernd bei jedem seiner Züge eine gerade Anzahlen von Steinen, dann gewinnt Anja gemäß ihrer Spielstrategie, oder Bernd entfernt irgendwann zum ersten Mal eine ungerade Anzahl Steine. Danach ist die Gesamtzahl der Steine auf dem Tisch ungerade. Nun entfernt Anja genau einen Stein und gewinnt wie oben für ungerades n beschrieben.
>
> Falls aber Bernd für $^n/_2$ eine Gewinnstrategie hat, so geht er nach Anjas erstem Zug genauso vor wie oben Anja und gewinnt in analoger Weise.

Induktiv können wir nun schließen: Bernd gewinnt, wenn $n = 2 \cdot 2^k$ (k ganzzahlig, $k \geq 0$), d.h. wenn n eine Zweierpotenz ist. Anja gewinnt, wenn $n = u \cdot 2^k$ ist (u ganzzahlig ungerade und $u \geq 3$, k ganzzahlig, $k \geq 0$), d.h. wenn n keine Zweierpotenz ist.

Aufgabe 2: Wir betrachten alle reellen Funktionen f mit der Eigenschaft
$f(1-f(x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$

a) Weise die Existenz einer solchen Funktion durch Angabe eines konkreten Beispiels nach.

b) Wir definieren für jede solche Funktion f die Summe

$$S_f = f(-2017) + f(-2016) + ... + f(-1) + f(0) + f(1) + ... + f(2017) + f(2018).$$

Bestimme die Menge aller Werte, die derartige Summen S_f annehmen können.

Anmerkung: Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.

1. Beweis (geometrischer Zugang): Unter der Annahme, dass es eine solche Funktion f tatsächlich gibt, ist die Bedingung "$f(1-f(x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$" äquivalent zur Bedingung, dass zu jedem Punkt $(x \mid f(x))$ des Graphen G_f auch der Punkt $(1-f(x) \mid x)$ ein Punkt von G_f ist. Es gibt eine geometrische Abbildung, die diese Punkte ineinander überführt: Eine Spiegelung des Punktes $(x \mid f(x))$ an der ersten Winkelhalbierenden führt zunächst zum Punkt $(f(x) \mid x)$, eine anschließende Spiegelung an der Geraden $y = 0{,}5$ führt zum Punkt $(1-f(x) \mid x)$. Da sich die zugehörigen Spiegelachsen im Punkt $(0{,}5 \mid 0{,}5)$ unter einem Winkel von 45° schneiden, kann diese Zweifachspiegelung auch als Drehung um den Punkt $(0{,}5|0{,}5)$ um $2 \cdot 45° = 90°$ im Uhrzeigersinn beschrieben werden. Also bildet eine Drehung um $2 \cdot 90° = 180°$ um $(0{,}5|0{,}5)$ den Graphen auf sich selbst ab, insbesondere ist G_f punktsymmetrisch zu $(0{,}5|0{,}5)$. Dies ist – nach gelegentlich auch in der Schule behandelter Formel – genau dann der Fall, wenn $f(0{,}5-x) + f(0{,}5+x) = 2 \cdot 0{,}5$ für alle $x \in \mathbb{R}$; oder äquivalent (man ersetze x durch $x - 0{,}5$, diese Substitution ist eindeutig umkehrbar), wenn

$$f(1-x) + f(x) = 1 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \quad (*).$$

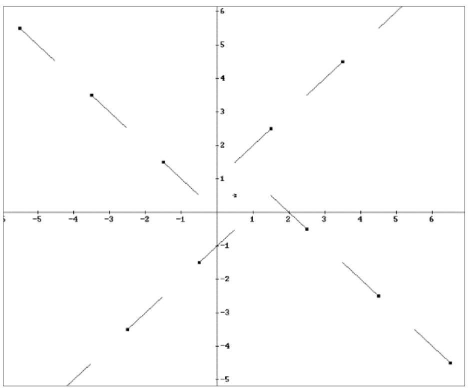
zu b): Hieraus folgt sofort $S_f = \sum_{i=-2017}^{2018} f(i) = \sum_{i=1}^{2018} \left(f(1-i) + f(i) \right) = \sum_{i=1}^{2018} 1 = 2018.$

zu a): Zum Nachweis der Existenz einer solchen Funktion f genügt es nach oben Gesagtem eine Punktmenge G mit den Eigenschaften

i) Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es genau einen Punkt $(x|y) \in G$,

ii) Jede Drehung um $(0{,}5|0{,}5)$ um 90° führt G in sich selbst über.

zu konstruieren und sie als Graph einer Funktion f zu deuten.



Nebenstehende Skizze zeigt eine solche Punktmenge. Sie besteht neben dem Punkt $(^1/_2|^1/_2)$ aus Teilstrecken auf den Geraden $y = x + 1$, $y = 2 - x$, $y = x - 1$ und $y = -x$, wobei jeweils der vom Ursprung weiter entfernte Endpunkte zu G gehört (jeweils dick markiert), der andere Endpunkt nicht. Die Konstruktion ist aus der Figur ablesbar, ebenso die Tatsache, dass die beiden Bedingungen *i*) und *ii*) erfüllt sind. Formal kann man schreiben:

$$f_a(x) = \begin{cases} x+1 & \text{falls } x \in]\,0{,}5+2k\,;\,0{,}5+2k+1\,], \quad k \geq 0 \\ 2-x & \text{falls } x \in]\,0{,}5+2k+1\,;\,0{,}5+2k+2], \quad k \geq 0 \\ 0{,}5 & \text{falls } x = 0{,}5 \\ 1-f_a(1-x) & \text{falls } x < 0{,}5 \end{cases}$$

2. Beweis (analytischer Zugang): Es genügt, alle Funktionen g zu untersuchen, die die einfachere Funktionalgleichung

$$g(-g(x)) = x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \quad (**) \text{ erfüllen.}$$

Jede solche Funktion g führt nämlich über $f(x) = g(x-0{,}5)+0{,}5$ zu einer Funktion f, die (*) erfüllt. Dies zeigt die Umformung

$$\begin{aligned} f(1-f(x)) &= g[(1-f(x))-0{,}5]+0{,}5 = g[-f(x)+0{,}5]+0{,}5 \\ &= g[-(g(x-0{,}5)+0{,}5)+0{,}5]+0{,}5 = g[-g(x-0{,}5)]+0{,}5 = (x-0{,}5)+0{,}5 \\ &= x. \end{aligned}$$

Umgekehrt führt jede Funktion f, die (*) erfüllt, mit $g(x) = f(x+0{,}5)-0{,}5$ zu einer Funktion g, die (**) erfüllt; dies kann durch eine analoge Rechnung bestätigt werden.

Sei also g eine Funktion, die (**) erfüllt. Dann ist g für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert und für jede reelle Zahl y gibt es eine reelle Zahl $w := -g(y)$, für die $g(w) = g(-g(y)) = y$ ist, d.h. der Wertebereich von g ist $\mathbb{R}$. Weiter folgt aus $g(x) = g(y)$, dass $x = g(-g(x)) = g(-g(y)) = y$ gilt, d.h. die Funktion g ist injektiv. Damit existiert die Umkehrfunktion g^- zu g, und diese ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Hieraus folgt wiederum

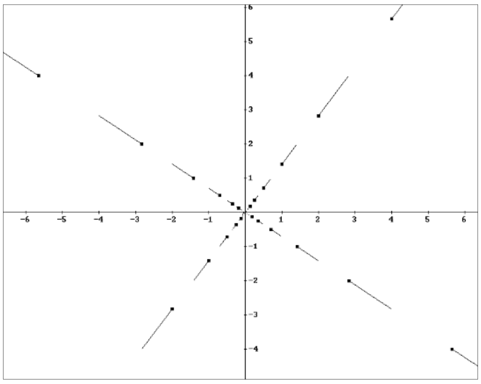
$$\begin{aligned} g(-x) &= g(-g(g^-(x))) &&= g^-(x) \quad \text{und} \\ -g(x) &= g^-(g(-g(x))) &&= g^-(x) \end{aligned}$$

also insbesondere $g(x)+g(-x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dies ist äquivalent zu

$$g(x-0{,}5)+0{,}5+g(-(x-1)-0{,}5)+0{,}5 = 1, \text{ also } f(x)+f(1-x) = 1 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

zu b): Insbesondere gilt $S_f = \sum_{i=-2017}^{2018} f(i) = \sum_{i=1}^{2018}\left(f(1-i)+f(i)\right) = \sum_{i=1}^{2018} 1 = 2018.$

zu a) Für $a > 1$ definieren wir (vgl. Figur, dort ist $a = \sqrt{2}$)



$$g_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0 \\ ax & \text{falls } \lfloor \log_a(|x|) \rfloor \text{ gerade} \\ -\frac{1}{a}x & \text{falls } \lfloor \log_a(|x|) \rfloor \text{ ungerade} \end{cases}$$

$g_a(x)$ erfüllt alle notwendigen Bedingungen:

g_a ist offensichtlich für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert.

Für $x = 0$ gilt offensichtlich $g_a(-g_a(x)) = x$.

Für $x \neq 0$ gilt

$$\lfloor \log_a(|-g_a(x)|) \rfloor = \lfloor \log_a(|a^{\pm 1}x|) \rfloor = \lfloor \log_a(|x|) \rfloor \pm 1,$$

d.h. $\lfloor \log_a(|-g_a(x)|) \rfloor$ und $\lfloor \log_a(|x|) \rfloor$ sind stets von verschiedener Parität; somit gilt entweder

$g_a(-g_a(x)) = \frac{1}{a}(ax) = x$ oder $g_a(-g_a(x)) = a\left(-\left(-\frac{1}{a}x\right)\right) = x$, in jedem Fall also $g_a(-g_a(x)) = x$.

Ergänzende Hinweise zur Konstruktion einer solchen Funktion g (für Funktionen f gelten die Aussagen entsprechend): Aus $g(x) = x$ folgt $x = g(-g(x)) = g(-x)$ und hieraus wegen der Injektivität von g, dass $x = -x$, also $x = 0$. Dies folgt auch aus $x = -g(x)$: beidseitige Anwendung von g ergibt $g(x) = g(-g(x)) = x$, also wieder $x = 0$.

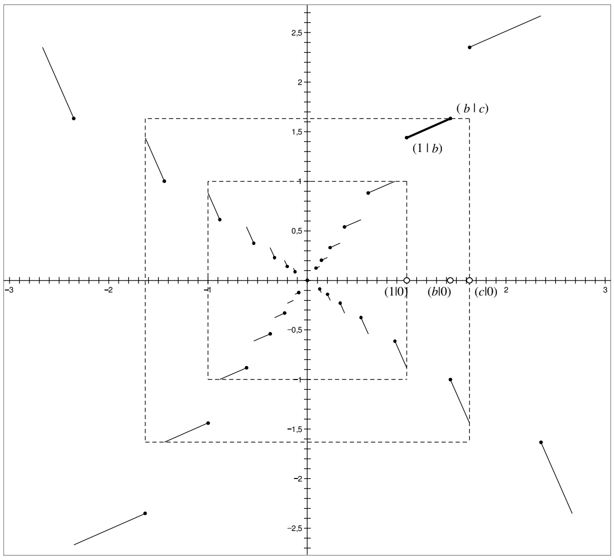
Für jede solche Funktion g gilt also: $g(0) = 0$, und falls $x \neq 0$, ist $g(x) \neq \pm x$.

Wir rufen uns in Erinnerung, dass sich jeder gesuchten Funktionen g und ihrem Graphen G_g eineindeutig eine Punktmenge G zuordnen lässt, die *i*) rotationssymmetrisch zum Ursprung mit einer vierzähligen Drehsymmetrie ist und bei der zusätzlich *ii*) jede Parallele zur y – Achse genau einen Punkt von G enthält.

Da diese Eigenschaft bei zentrischer Streckung mit Zentrum (0|0) erhalten bleibt, ist zu jeder Funktion $g(x)$ auch $g_a(x) := a \cdot g(^1/_a \cdot x)$ eine solche Funktion.

Mit Hilfe dieser geometrischen Deutung können wir eine ganze Klasse von Funktionen konstruieren:

Wir wählen ein $b > 1$ und setzen $b := g(1)$. Dann wählen wir ein streng monoton steigendes, auf dem rechts offenen Intervall [1;b [definiertes $g(x)$, z.B. ein solches, für das G_g ein Geradenstück ist. Weiter sei $c := \lim\limits_{x \to b} g(x)$, $c > b$, d.h. unser erstes Teilstück von G_g verbindet die Punkte $(1|b)$ und $(b|c)$, wobei allerdings $(b|c)$ nicht zu G_g gehört.



Nun unterwerfen wir dieses Geradenstückchen den Drehungen um den Ursprung um $k \cdot 90°$ (k = 1; 2; 3) und ergänzen G_g durch diese Bilder. Weil $g(b) = -1$ und $\lim\limits_{x \to c} g(x) = -b$, ist nun sichergestellt, dass es zu jedem $x \in [1;c[$ genau einen Punkt $(x|y)$ von G_g gibt. Wegen der Rotationssymmetrie gilt dies auch im Intervall $]-c;1]$ und auch für jeden y–Wert in diesen Intervallen. Die bisher festgelegten Punkte von G_g liegen also vollständig auf dem (außen offenen) Randstreifen eines achsenparallelen Quadrates; wobei diese Randstreifen durch $1 \leq |x| < c$ und $1 \leq |y| < c$ definiert sind.

Schließlich unterwerfen wir diese Punktmenge zentrischen Streckungen mit dem Ursprung als Zentrum und den Streckfaktoren c^k, wobei k alle ganzen Zahlen durchläuft. Die Bilder der Intervalle fügen sich nahtlos aneinander, sodass sichergestellt ist, dass zu jedem $x \neq 0$ und auch jedem $y \neq 0$ es genau einen Punkt $(x|y)$ aus G_g gibt.

Ergänzt man noch $g(0) := 0$, so umfassen Werte– und Definitionsmenge von g genau die reellen Zahlen.

Wählt man als Geradenstückchen Ursprungsgeraden, d.h. wählt man $b : 1 = c : b$ oder äquivalent $c = b^2$, so erhält man die im 2. Beweis angeführte Klasse von Funktionen.

Bemerkungen: Die Bedingung $g(-g(x)) = x$ wird – allerdings nur für $x \in \mathbb{R} \setminus \{1;-1\}$ – auch erfüllt von

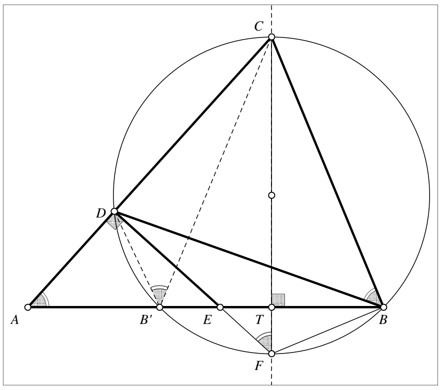
$$g : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{falls} \quad |x| > 1 \\ 0 & \text{falls} \quad x = 0 \\ -\frac{1}{x} & \text{falls} \quad |x| < 1,\ x \neq 0 \end{cases}$$

Nach Erstellung dieser Lösungsbeispiele erreichte mich der Hinweise auf die Arbeit von Martin Griffiths "$f(f(x)) = -x$, Windmills and Beyond" in Mathematics Magazine, Vol. 83, No. 1 (February 2010), pp. 15-23, der ähnliche Ergebnisse enthält.

Aufgabe 3: Gegeben sind eine Strecke AB und auf ihr ein Punkt T, wobei T näher an B liegt als an A.

Zeige, dass es zu jedem von T verschiedenen Punkt C auf der Senkrechten zur Strecke AB durch T jeweils genau einen Punkt D auf der Strecke AC mit $\angle CBD = \angle BAC$ gibt und dass dann das Lot zu AC durch D stets durch ein und denselben, von der Wahl von C unabhängigen Punkt E auf der Geraden AB geht.

Den Nachweis für die Existenz und Eindeutigkeit der Punkte D und E geben wir nur im 1. Beweis.



1. Beweis: Da T näher an B als an A liegt, ist $|AC| > |BC|$ und deshalb $\alpha < \beta$. Trägt man also an BC in B den Winkel α an, so liegt dessen zweiter Schenkel im Winkelfeld von β und schneidet somit die Strecke AC in genau einem Punkt; damit ist die Existenz und Eindeutigkeit des Punktes D nachgewiesen. Da $\alpha \neq 90°$, ist jedes Lot zu AC nicht parallel zu AB, hat also mit dieser Geraden genau einen Schnittpunkt; damit ist Existenz und Eindeutigkeit von E nachgewiesen. Da schärfer $0° < \alpha < 90°$, liegt E auf der Halbgeraden $[AB$, d.h. durch Vorgabe der Länge $|AE|$ ist E eindeutig festgelegt.

Aus $0° < \alpha < 90°$ folgt weiter, dass die Geraden DE und CT nicht parallel sind, sie schneiden sich also in einem Punkt, den wir mit F bezeichnen. Nun ist $DF \perp CA$ und $CF \perp BA$, also gilt

$$\angle CFD = \angle BAC = \angle CBD.$$

Hieraus folgt einerseits die Ähnlichkeit der Dreiecke ATC und FTE (und sogar auch FDC), und andererseits, dass der Thaleskreis über der Strecke CF nicht nur den Punkt D enthält, sondern als Fasskreis über der Sehne DC für den Winkel $\angle CFD$ auch den Punkt B. Das Dreieck FBC ist also rechtwinklig bei B und die Strecke TB ist Höhe in diesem Dreieck. Insbesondere liegen F und C in verschiedenen Halbebenen bez. der Geraden AB und somit E zwischen A und T. Durch die Vorgabe der Länge $|ET|$ ist E also eindeutig festgelegt.

Mit der Ähnlichkeit der Dreiecke ATC und FTE und dem Höhensatz im rechtwinkligen Dreieck FBC folgt

$$|ET| \cdot |AT| = |TF| \cdot |TC| = |TB|^2 = const,$$

weil $|TB|$ unabhängig von der Wahl von C ist. Da auch $|AT|$ unabhängig von der Wahl von C ist, hat auch $|ET|$ einen festen Wert. Also ist nach obiger Bemerkung die Lage von E auf der Strecke AB fest.

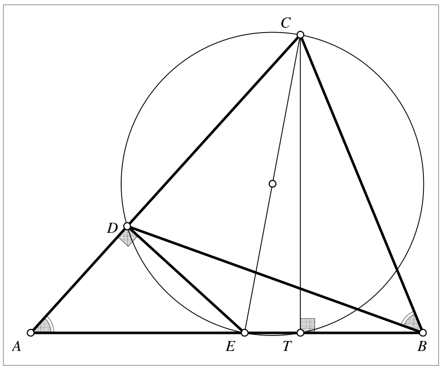
2. Beweis (vgl. Figur zu Beweis 1): Aus dem 1. Beweis übernehmen wir die Definition des Punktes F und die Tatsache, dass der Kreis mit Durchmesser CF die Punkte B und D enthält.

Sei B' das Bild von B bei der Spiegelung an CT. Da diese Spiegelung sowohl die Gerade AB als auch diesen Kreis in sich überführt, ist B' auch der von B verschiedene Schnittpunkt dieses Kreises mit der Gerade AB. Nun können wir die Weite der Winkel mit Scheitel B' bestimmen: Es ist $\angle BB'C = \beta$ (Symmetrie bez. CF), $\angle CB'D = \angle CBD = \alpha$ (Umfangswinkelsatz über Sehne DC), also ist $\angle DB'A = \gamma$ (Summe der drei Winkel bei B' ist 180°). Damit haben die Dreiecke ADB', ABC und BDC gleiche Innenwinkel, sind also ähnlich.

Weiter schneidet die Gerade DE den Umkreis des Dreiecks $B'DB$ im gleichen Punkt wie die Mittelsenkrechte der Strecke BB', also halbiert sie den Winkel $\angle B'DB$ ("Südpolsatz"). Nach dem Satz über die Winkelhalbierenden gilt dann $|EB'| : |EB| = |DB'| : |DB|$; hieraus schließen wir:

$\dfrac{|EB'|}{|EB|} = \dfrac{|DB'|}{|DB|} = \dfrac{|BC|\cdot\dfrac{|AB'|}{|AC|}}{|BA|\cdot\dfrac{|BC|}{|AC|}} = \dfrac{|AB'|}{|BA|} = const.$, und da E zwischen B' und B liegt, ist die Lage von E fest.

3. Beweis: Nach Konstruktion sind in den Dreiecken ABC und BDC zwei Innenwinkel gleich, sie sind also ähnlich und es gilt $|AC| : |BC| = |BC| : |DC|$, also $|BC|^2 = |AC| \cdot |DC|$.

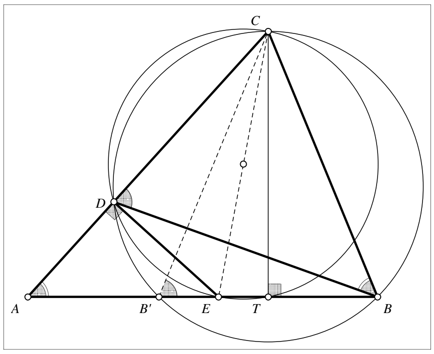


Der Thaleskreis über der Strecke CE enthält die Punkte D und T, also gilt nach Sehnensatz

$$\begin{aligned} |AE| \cdot |AT| &= |AD| \cdot |AC| = (|AC| - |CD|) \cdot |AC| \\ &= |AC|^2 - |AC| \cdot |DC|) = |AC|^2 - |BC|^2 \\ &= (|AT|^2 + |TC|^2) - (|BT|^2 + |TC|^2) \\ &= |AT|^2 - |BT|^2 = const.. \end{aligned}$$

Da auch $|AT|$ unabhängig von der Wahl von C ist, ist es auch $|AE|$; und, da E auf $[AB$ liegt (vgl. 1. Beweis), auch die Lage von E auf der Strecke AB.

4. Beweis: Die Dreiecke ABC und BDC haben beide zwei gleiche weite Innenwinkel, nämlich α und γ. Also sind die jeweils dritten Winkel ebenfalls gleich, d.h. $\angle BDC = \angle CBA = \beta$.

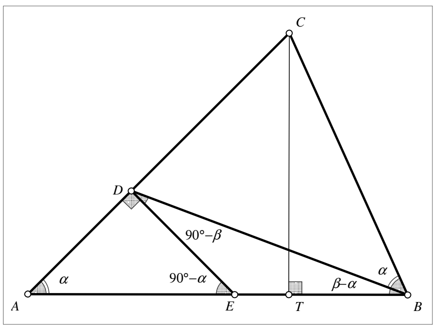


Sei B' das Bild von B bei Spiegelung an CT. Da $CT \perp AB$, liegt B' auf der Geraden AB. Dann ist $\angle CBB' = \angle BB'C = \angle BDC$, also liegen nach Umfangswinkelsatz die Punkte B' und D auf dem gleichen Kreis über der Sehne BC. Der Thaleskreis über der Strecke CE enthält die Punkte D und T. Also gilt nach Sehnensatz

$$|AE| \cdot |AT| = |AD| \cdot |AC| = |AB'| \cdot |AB| = const.$$

5. Beweis (mit Trigonometrie, vgl. Figur): Wir verifizieren leicht die in der Figur angegebenen Winkelmaße. Anwendung des Sinussatzes in den Dreiecken AED, BED und ABC ergibt (Nenner sind nicht 0, da $0° < \alpha,\beta < 90°$):

$$\begin{aligned} \frac{|AE|}{|BE|} &= \frac{|AE|}{|DE|} \cdot \frac{|DE|}{|BE|} = \frac{\sin(90°)}{\sin(\alpha)} \cdot \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(90°-\beta)} \\ &= \frac{1}{\sin(\alpha)} \cdot \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\cos(\beta)} = \frac{\sin(\beta)\cos(\alpha) - \sin(\alpha)\cos(\beta)}{\sin(\alpha)\cos(\beta)} \\ &= \frac{\tan(\beta)}{\tan(\alpha)} - 1 = \frac{\dfrac{|CT|}{|TB|}}{\dfrac{|CT|}{|AT|}} - 1 = \frac{|AT|}{|TB|} - 1 = const. \end{aligned}$$



6. Beweis(~skizze mit Koordinatenrechnung): Wir legen ein Koordinatensystem so auf die Figur, dass TC die y – Achse und AB die x – Achse ist; die Koordinaten der Punkte A, B und C seien $(-a|0)$, $(b|0)$ bzw. $(0|c)$ mit $a,b,c > 0$, $a > b$. Dann hat die Gerade AC den Steigungswinkel α, ihre Steigung ist also $m_{AC} = tan(\alpha) = {}^c/_a$, ihre Funktionsgleichung ist $y = {}^c/_a\cdot(x + a) + c$. Die Gerade BC hat den Steigungswinkel $180° - \beta$ mit $m_{BC} = -tan(\beta) = -{}^c/_b$ (und die Funktionsgleichung $y = -{}^c/_b\cdot(x - b) + c$).

Hieraus können wir nun die Funktionsgleichung der Geraden BD ermitteln: Sie hat den Steigungswinkel $(180° - \beta) + \alpha$, nach bekanntem Additionstheorem ergibt sich (die auftauchenden Nenner sind stets von Null verschieden und damit alle Rechenterme für alle möglichen a,b,c definiert):

$$m_{BC} = \frac{m_{BC}+m_{AC}}{1-m_{BC}m_{AC}} = \frac{-\frac{c}{b}+\frac{c}{a}}{1-\left(-\frac{c}{b}\right)\cdot\frac{c}{a}} = \frac{c(b-a)}{ab+c^2};$$

die Funktionsgleichung der Geraden BD ist also $y = \frac{c(b-a)}{ab+c^2}(x-b)$.

Hieraus berechnen wir mit schulüblichen Mitteln die Koordinaten des Punktes D (die Rechnungen werden nicht im Detail ausgeführt):

$${}^c/_a\cdot(x_D + a) + c = \frac{c(b-a)}{ab+c^2}(x-b) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow c\cdot(a^2 + c^2)\cdot x_D = -ac\cdot(b^2 + c^2),$$

woraus die Koordinaten von D und hieraus schließlich die von $E(-b^2/a \mid 0)$ unabhängig von c ermittelt werden können.

Bemerkungen: Eine Gerade, die die Seite BC unter dem Winkel β schneidet, ist eine Parallele zu AB. Analog nennt man eine Gerade, die die Seite BC unter dem Winkel α schneidet, eine *Antiparallele* zu AB. Unter diesem Stichwort findet man etliche hilfreiche und schöne Sätze zur Dreiecksgeometrie, z.B. in
Honsberger, Ross: Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry, p. 87 ff.
(ISBN 0-88385-639-5)

Aufgabe 4: Bestimme alle natürlichen Zahlen n mit $n > 1$, für die gilt:

Färbt man jeden Gitterpunkt eines quadratischen Gitters in der Ebene mit je einer von n vorgegebenen Farben, dann gibt es immer drei Gitterpunkte gleicher Farbe, die ein gleichschenklig–rechtwinkliges Dreieck bilden, dessen Katheten parallel zu den Gitterlinien sind.

Erläuterung: Die Gitterpunkte eines quadratischen Gitters sind diejenigen Punkte in einem kartesischen Koordinatensystem (d.h. einem Koordinatensystem, bei dem die Achsen senkrecht aufeinander stehen und bei dem die Längeneinheiten auf beiden Achsen gleich sind), bei denen beide Koordinaten ganzzahlig sind. Gitterlinien sind die Geraden, die durch Gitterpunkte gehen und parallel zu einer der beiden Achsen sind.

Bezeichnungen: Ein gleichschenklig–rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten parallel zu den Gitterlinien sind, heiße grp *– Dreieck*. Sind alle seine Ecken mit der gleichen Farbe gefärbt sind, nennen wir es kurz ein *gleichgefärbtes* grp – Dreieck.

Eine Parallele zur zweiten Winkelhalbierenden des Koordinatensystems heiße *Hauptdiagonale des Gitters*.

Zu zwei Gitterpunkten auf einer Hauptdiagonalen gibt es genau zwei Gitterpunkte, die mit ihnen ein grp – Dreieck bilden; denjenigen davon mit der kleineren y – Koordinate (d.h. den Punkt, der "links unterhalb" der Hauptdiagonalen liegt), nennen wir den *zum Punktepaar gehörenden* R *– Punkt*. Wir stellen fest, dass die Zuordnung zwischen R – Punkten und Punktepaaren auf der gleichen Hauptdiagonalen umkehrbar eindeutig ist.

Antwort: Für jede ganze Zahl $n \geq 2$ gibt es ein grp – Dreieck, dessen Eckpunkte alle mit der gleichen Farbe gefärbt sind.

1. Beweis: Wir führen die Annahme, es gebe für ein bestimmtes n kein grp – Dreieck, dessen Eckpunkte die gleiche Farbe haben, für jedes $n \geq 2$ zum Widerspruch.

Hierzu betrachten wir für eine vorgegebene positive ganze Zahl N (über deren Größe wir erst später nachdenken) das rechtwinklige Dreieck mit den Eckpunkten (0|0), $(N-1 \mid 0)$, $(0 \mid N-1)$; mit D bezeichnen wir die Menge der Gitterpunkte, die innerhalb oder auf dem Rand dieses Dreiecks liegen. Es gibt N Hauptdiagonalen, die Punkte aus D enthalten; die Abschnitte der Hauptdiagonalen, die Punkte von D enthalten nennen wir *Hypotenusen*. Keine Hypotenuse enthält mehr als N Punkte aus D (vgl. Figur).

Weiter definieren wir für nicht–negative ganze k eine Folge $F_k := \dfrac{N}{2^{r(k)} \cdot n^{s(k)}}$

mit $r(0) = 0$, $s(0) = 1$, $r(k+1) = 2r(k) + 2$, $s(k+1) = 2s(k) + 1$.

wobei wir feststellen, dass für jedes N die F_k für alle nicht–negativen ganzzahligen k definiert sind, die Folge streng monoton fallend ist und dass $F_k \geq 2$ für alle $k = 1, 2, \ldots, n-1$, wenn $N \geq 2 \cdot 2^{r(n-1)} \cdot n^{s(n-1)}$.

Nun zeigen wir, dass wir ausgehend von einer Hypotenuse H_k mit mindestens $F_k \geq 2$ gleichgefärbten Punkten eine Hypotenuse H_{k+1} mit mindestens F_{k+1} gleichgefärbten Punkten konstruieren können:

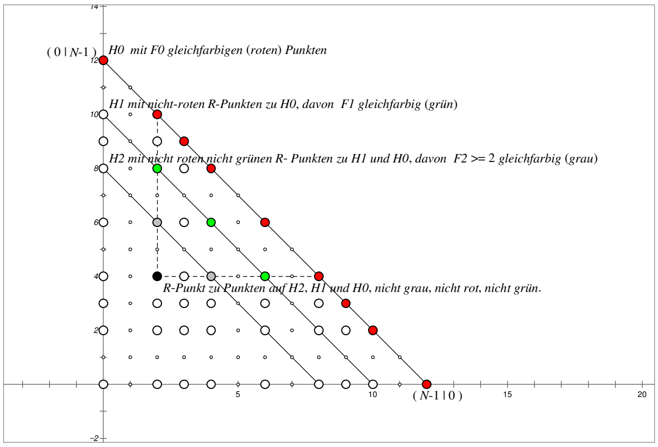
Zu den mindestens F_k gleichgefärbten Punkten auf H_k gibt es mindestens $\dfrac{F_k(F_k-1)}{2}$ R – Punkte, die alle in D liegen und von denen keiner die Farbe der ursprünglich ausgewählten Punkte auf der Hypotenuse H_k hat. Weiter sind diese R – Punkte auf nicht mehr als $N-1$ Hypotenusen verteilt und sie sind mit höchstens $n-1$ Farben gefärbt. Wenn nun zusätzlich $F(k) \geq 2$ gilt, dann ist $F(k) - 1 \geq F(k)/2$, und wir können die Anzahl gleichgefärbter Punkte auf H_{k+1} abschätzen zu

$$\frac{F_k(F_k-1)}{2\cdot(N-1)(n-1)} \geq \frac{F_k^{\,2}}{2\cdot 2\cdot Nn} = \frac{N^2}{2^2\cdot\left(2^{r(k)}n^{s(k)}\right)^2 Nn} = \frac{N}{2^{2r(k)+2}n^{2s(k)+1}} = F_{k+1}.$$

Nun betrachten wir die längste Hypotenuse von D, d.h. die Verbindungsstrecke der Punkte ($N-1$ | 0) und (0 | $N-1$), wir nennen sie H_0. Sie enthält N Gitterpunkte, die mit n Farben gefärbt sind. Also gibt es eine Farbe, mit der mindestens $^N/_n = \dfrac{N}{2^{r(0)}\cdot n^{s(0)}} = F_0$ Gitterpunkte auf H_0 gefärbt sind.

Wir können also ausgehend von H_0 mit oben beschriebener Konstruktion eine Folge von Hypotenusen H_k (k = 0, 1, 2, ... , $n-1$) konstruieren, die jeweils mindestens F_k gleichgefärbte Punkte enthalten. Da die zu den Punkten auf einer Hypotenuse H_i gehörenden R – Punkte stets auch R – Punkte zu den betrachteten Punkten auf den Hypotenusen H_j mit $j < i$ sind, stehen für die Färbung der zu H_0 gehörenden R – Punkte nur $n-1$ Farben zur Verfügung, für die zu H_1 gehörenden R – Punkte nur noch $n-2$ Farben usw., und für die zu H_{n-1} gehörenden R – Punkte nur noch $n-n = 0$ Farben, d.h. diesen zu gleichfarbigen Punkten auf H_{n-1} gehörenden R – Punkt darf es nicht geben. Einen solchen R – Punkt gibt es aber, wenn auf H_{n-1} noch mindestens 2 gleichfarbige Punkte sind, d.h. wenn $F_{n-1} \geq 2$. Dies können wir jedoch durch die Wahl von $N = N(n) \geq 2\cdot 2^{r(n-1)}\cdot n^{s(n-1)}$ erreichen. Dies stellt den gesuchten Widerspruch dar.

Illustration des 1. Beweises mit $n = 3$: Weil N riesig ist, gibt es auf H_0 ganz arg viele rote Punkte. Die zugehörigen R – Punkte sind mit großen Kreisen markiert und alle nicht rot. Weil es davon mehr als ganz arg viele gibt, finden wir arg viele davon auf H_1, und davon sind viele grün. Nach gleichem Vorgehen finden wir ein H_2 mit einigen wenigen, mindestens 2 grauen Punkten. Diese sind gleichzeitig R – Punkte der grünen Punkte auf H_1 und der roten Punkte auf H_0. Der R – Punkt, der zu diesen grauen Punkten gehört, ist gleichzeitig R – Punkt zu den anderen bisher betrachteten Punkten, also mit keiner der drei Farben rot, grün oder grau gefärbt – ein Widerspruch dar. (Die Abstände der Hauptdiagonalen sind nicht notwendigerweise gleich.)



Bemerkungen: Es ist $r(k) = 2^{k+1}-2$ und $s(k) = 2^{k+1}-1$, was interessant und leicht beweisbar ist, aber für den Beweis nicht gebraucht wird. Bei vorgegebenem n finden wir also im genannten Dreieck mit $N \geq (2n)^{2^n-1}$ sicher ein gleichgefärbtes grp – Dreieck. Für $n = 3$ erhält man $N \geq 279936$, für $n = 4$ erhält man $N \geq 3{,}5184\cdot 10^{13}$, *allein dieser Rand ist zu schmal, die zugehörige Figur zu fassen...*

Anstatt die Punkte auf der Diagonalen kann man auch mit Punkten auf der x – Achse beginnen und als R – Punkt des Punktepaares (a|0) und (b|0) mit $0 \leq a < b$ den Punkt (a | $b-a$) definieren; aus den Hauptdiagonalen werden dann Parallelen zur x – Achse.

2. Beweis: Wir benützen den

Satz von v. d. Waerden: Zu jedem Paar positiver ganzer Zahlen k und l gibt es eine Zahl $W(k;l)$ mit folgender Eigenschaft: Zerlegt man die Menge der natürlichen Zahlen in k Teilmengen, dann enthält jede Folge aufeinander folgender natürlicher Zahlen der Länge $W(k;l)$ mindestens eine arithmetische Teilfolge der Länge l von Zahlen, die alle der gleichen Teilmenge angehören.

Zum geforderten Beweis benötigen wir noch einige Definitionen und einen Hilfssatz:

Def.: Eine Folge von Gitterpunkten G_1, G_2, ... , G_N, die alle auf der gleichen Geraden liegen und bei der jedes Punktepaar P_i, P_{i+1} ($1 \leq i < N$) den gleichen gerichteten Abstand hat, heiße *arithmetische Folge von Gitterpunkten der Länge* N.

Aus dem Satz von v.d. Waerden folgt sofort

Hilfssatz 1: Zu jedem Paar positiver ganzer Zahlen k und l gibt eine kleinste Zahl $W(k;l)$ mit folgender Eigenschaft: Jede arithmetische Folge von Gitterpunkten der Länge $W(k;l)$, die mit k Farben gefärbt sind, enthält eine arithmetische Teilfolge von Gitterpunkten der Länge l, die alle mit der gleichen Farbe gefärbt sind.

Z.B. ist $W(1;2) = 2$, $W(2,3) = 9$.

Def.: Ein **(n ; N) – *Trigon*** ist eine Teilmenge von Gitterpunkten, die mit maximal n Farben gefärbt sind und folgende Punkte enthält: Auf einer Hauptdiagonalen eine arithmetische Folge von N Gitterpunkten, dazu die R – Punkte, die zu je zwei dieser Gitterpunkte gehören. Die arithmetische Folge von Gitterpunkten auf der Hauptdiagonale heiße *Hypotenuse* des Trigons.

Wir stellen fest: Jedes (1;2)–Trigon ist ein gleichgefärbtes grp–Dreieck.

Nun betrachten wir folgende – nach oben gesagtem existierende – rekursiv definierte Folge

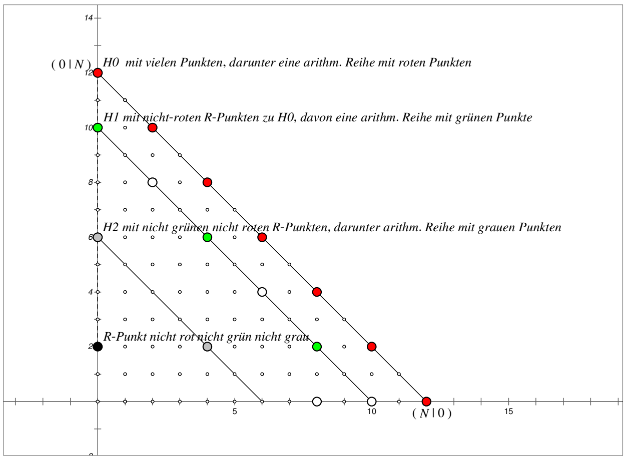
$$N_1 = W(1;2) = 2\ ;\quad N_{n+1} = W(n+1\ ;N_n+1) \text{ für alle } n.$$

Hilfssatz 2: Jedes $(n+1\ ; N_{n+1})$ – Trigon enthält ein grp–Dreieck, bei dem zwei Eckpunkte auf der Hypotenuse liegen, oder es enthält ein $(n\ ; N_n)$ – Trigon als Teilmenge.

Beweis des HS 2: Die Hypotenuse eines $(n+1\ ; N_{n+1})$ – Trigons besteht nach Voraussetzung aus einer arithmetischen Reihe von N_{n+1} Gitterpunkten, die mit $n+1$ Farben gefärbt sind. Da $N_{n+1} = W(n+1\ ; N_n+1)$, enthält diese eine arithmetische Teilreihe mit N_n+1 Gitterpunkten gleicher Farbe, z.B. rot. Falls das Trigon einen roten R – Punkt besitzt, sind wir fertig. Falls alle R – Punkte nicht rot sind, betrachten wir das $(n+1\ ; N_n+1)$–Trigon, das durch die arithmetische Reihe der N_n+1 roten Punkte auf der Hypotenuse definiert ist. Es erzeugt auf der der Hypotenuse benachbarten Hauptdiagonalen eine arithmetische Reihe nicht roter Gitterpunkte der Länge N_n. Wir entfernen alle Gitterpunkte auf der Hypotenuse und erhalten so das geforderte $(n\ ; N_n)$ – Trigon.

Nun ist der Beweis schnell erbracht: Für ein vorgegebenes n wenden wir Hilfssatz 2 mehrfach auf ein $(n\ ; N_n)$ – Trigon an: Spätestens beim $(n-1)$ten Mal erhalten wir in Form des $(1\ ; N_1)$ – Trigons das geforderte grp – Dreieck.

Illustration für den 2. Beweis: Wenn N_{n+1} riesig groß ist, finden wir auf H_0 (das ist die Hypotenuse des $(n+1, N_{n+1})$ – Trigons) viele rote Punkte, darunter eine arithmetische Reihe roter Punkte der Länge N_n+1, dies bestimmt ein $(n+1; N_n+1)$ – Trigon. Nun gibt es darin entweder einen rotgefärbtes grp – Dreieck oder auf H_1 ganz viele nicht rote R – Punkte (nämlich N_n Stück), dies ist die Hypotenuse eines (n, N_n) – Trigons. Unter diesen gibt es viele grüne Punkte und unter diesen eine arithm. Reihe grüner Punkte. Diese wiederum erzeugt entweder ein grüngefärbtes grp – Dreieck oder auf H_2 viele nicht grüne nicht rote R – Punkte, darunter eine arithm. Reihe grauer Punkte usw.



3. Beweis (Induktion nach Zahl der Farben n, eine Variante des 2. Beweises):

Unter einem *quadratischen* $N_n \times N_n$ – *Teilgitter* (N_n positiv ganz) verstehen wir eine Menge von Gitterpunkten, die – nach geeigneter Verschiebung im Achsenkreuz – durch $(ad \mid bd)$ mit positiven ganzzahligen a,b mit $1 \le a \le N_n$ und $1 \le b \le N_n$ und festem positivem ganzen d beschrieben werden kann.

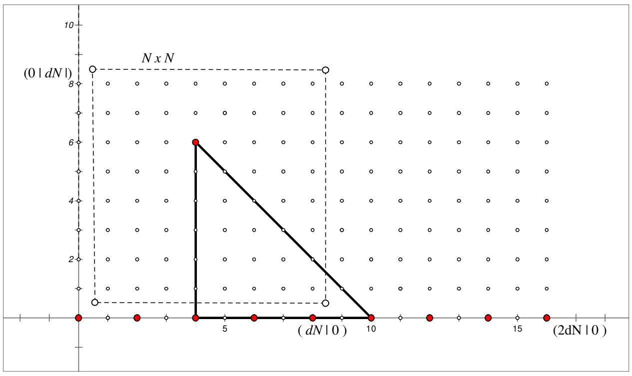
Wir werden zeigen, dass es für jedes $n \ge 1$ eine Zahl N_n gibt derart, dass jedes quadratische $N_n \times N_n$ – Teilgitter ein gleichgefärbtes grp – Dreieck enthält.

Induktionsanfang: Die Aussage ist richtig für $n = 1$, da in jedem mit $n = 1$ Farben gefärbten quadratischen 2×2 – Teilgitter drei Gitterpunkte ein grp – Dreieck bilden, und weil $n = 1$ ist, ist dieses gleichgefärbt. Es ist also $N_1 = 2$.

Induktionsannahme: Die Aussage sei richtig für ein bestimmtes n, d.h. es existiert eine Zahl N_n, so dass jedes mit n Farben gefärbte quadratische $N_n \times N_n$ – Teilgitter ein gleichgefärbtes grp – Dreieck enthält.

Induktionsschluss: Nach dem Satz von v.d. Waerden gibt es eine arithmetische Folge der Länge $2N_n + 1$ von gleichgefärbten Gitterpunkten auf der x – Achse. Der Abstand zweier aufeinander folgenden Punkte dieser Reihe sei d. Dann können wir das Achsenkreuz so legen, dass diese Punkte die Koordinaten $(ad \mid 0)$ mit $0 \le a \le 2N_n$ haben, ferner seien sie mit der Farbe 0 von den $n + 1$ Farben 0, 1, 2, ... , n gefärbt.

Nun betrachten wir die Menge der Gitterpunkte mit den Koordinaten $(ad \mid bd)$ mit $0 \le a \le 2N_n$ und $0 \le b \le N_n$ (d.h. der Gitterpunkte im Rechteck, das durch die Diagonale mit Endpunkte (0|0) und $(2dN_n \mid dN_n)$ definiert ist).



Falls ein Punkt $(a_0d \mid b_0d)$ mit $0 \le a_0 \le N_n$ und $1 \le b_0 \le N_n$ mit der Farbe 0 gefärbt ist, bildet dieser Punkt zusammen mit den Punkten $(a_0d \mid 0)$ und $(a_0d + b_0d \mid 0)$ ein grp – Dreieck, und weil $0 \le a_0d \le a_0d + b_0d < 2N_n$, sind diese beiden Punkte ebenfalls mit Farbe 0 gefärbt und wir haben ein gleichgefärbtes grp – Dreieck.

Falls aber alle Punkte $(a_0d \mid b_0d)$ mit $0 \le a_0 \le N_n$ und $1 \le b_0 \le N_n$ nicht mit Farbe 0 gefärbt sind, sind sie mit maximal n Farben gefärbt und es greift die Induktionsvoraussetzung im quadratischen $N_n \times N_n$ – Teilgitter der Gitterpunkte $(ad \mid bd)$ mit $1 \le a \le N_n$ und $1 \le b \le N_n$.

In jedem Fall liegt das gleichgefärbte grp –Dreieck im quadratischen $(2dN_n + 1) \times (2dN_n + 1)$ – Teilgitter; d.h. die Zahl $N_{n+1} = 2dN_n + 1$ erfüllt die Bedingung der Aussage.

Bemerkungen: Über die Aufgabenstellung hinaus haben wir im Beweis den trivialen Fall $n = 1$ eingeschlossen. Für einen Induktionsanfang mit $n = 2$ kann folgendermaßen argumentieren: Man kann $N_2 = 9$ wählen (vielleicht sogar noch kleiner). Beweis: Wenn mit zwei Farben gefärbt wird, sind von den 9 Gitterpunkten am unteren Rand des quadratischen 9×9 – Teilgitters mindestens 5 von gleicher Farbe, es gibt also unter diesen Randpunkten mindestens $5 \cdot 4 : 2 = 10$ Paare von gleichfarbigen Punkten. Der Abstand, den die Punkte eines dieser 10 Paare haben können, nimmt einen von 8 möglichen Werten an, also gibt es zwei Punktepaare mit gleichem Abstand. Die Koordinaten der Punkte dieser beiden Paare seien mit (0|0), $(ad|0)$, $(bd|0)$ und $(bd + ad|0)$ beschrieben, dabei ist $1 \le a,b \le 7$, $a + b \le 8$, wobei wir $a = b$ nicht ausschließen. Die vier Punkte seien mit Farbe 0 gefärbt. Wenn die drei Punkte $(ad|ad)$, $(ad{+}bd|ad)$, $(ad{+}bd|ad{+}bd)$ gleiche Farbe haben, bilden sie bilden ein grp – Dreieck. Wenn nicht, hat einer der Punkte Farbe 0, und dazu gibt es auf der x – Achse zwei Punkte, mit denen er ein gleichgefärbtes grp – Dreieck bildet.