BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK
Bildung & Begabung

Aufgaben und Lösungen

1. Runde 2019

Endgültige Fassung
Mai 2019

» **KORREKTURKOMMISSION | KARL FEGERT**

» **BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK**
Kortrijker Straße 1, 53177 Bonn | Postfach 20 02 01, 53132 Bonn | Tel.: (02 28) 9 59 15-20, Fax: (02 28) 9 59 15-29
info@bundeswettbewerb-mathematik.de, www.bundeswettbewerb-mathematik.de

GEFÖRDERT VOM
Bundesministerium für Bildung und Forschung
STIFTERVERBAND
KMK KULTUSMINISTER KONFERENZ
HDI talanx.
GEFÖRDERT VON GESAMTMETALL
think ING.

Aufgabe 1: Ein 8x8–Schachbrett wird mit 32 Dominosteinen der Größe 1x2 vollständig und überschneidungsfrei bedeckt.

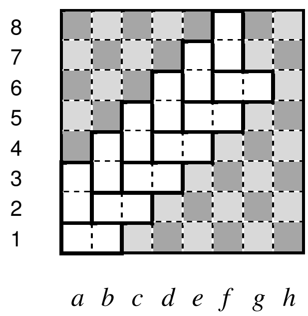
Beweise: Es gibt stets zwei Dominosteine, die ein 2x2–Quadrat bilden.

Vorbemerkung: Wir verkürzen gelegentlich den Begriff "Dominostein" zu "Stein". Eine Bedeckung eines ebenen Flächenstückes mit Teilflächen, die vollständig und überschneidungsfrei ist, nennen wir eine *Parkettierung*.

Bei jeder Parkettierung des Schachbrettes mit Dominosteinen liegt jeder Dominostein so, dass er genau zwei Felder des Schachbrettes bedeckt, d.h. die Ränder der Dominosteine liegen parallel zu den Rändern des Schachbrettes. Dies wird in den Beweisen nicht eigens erwähnt. Für die weitere Argumentation übernehmen wir die Notation wie beim Schachspiel: Jedes Feld wird durch seine "Koordinaten" beschrieben; dabei verwenden wir für die Zeilen die Zahlen 1 bis 8, für die Spalten die Buchstaben a bis h. Einen Dominostein in einer Parkettierung bezeichnen wir durch die Koordinaten der Felder, die er bedeckt.

1. Beweis:

Jedes Feld des Schachbrettes muss bedeckt sein. Wir betrachten einzelne (für unsere Argumentation geeignete) Felder des Schachbrettes und überlegen uns, auf welche Arten diese von den Steinen bedeckt werden können, wenn wir Lagen ausschließen, bei denen 2 Steine ein 2x2–Quadrat bilden. (Natürlich schließen wir auch aus, dass ein Feld von zwei Steinen bedeckt wird.) Wenn wir feststellen, dass es zwei benachbarte Felder gibt, die in allen Parkettierungen vom gleichen Stein bedeckt werden, legen wir diesen Stein auf das Schachbrett. Wir werden zeigen, dass wir – bevor alle Felder bedeckt sind – dann irgendwann nicht mehr legen können, ohne dass zwei Steine ein 2x2–Quadrat bilden oder dass ein Feld nicht mehr überdeckt werden kann.



Wir beginnen mit dem Feld $a1$. Bedingt durch die Lage dieses Feldes und durch die Form der Steine kann es nur durch einen Stein bedeckt werden, der entweder zusätzlich das Feld $a2$ oder das Feld $b1$ bedeckt. Es genügt den Fall zu betrachten, dass er auch $b1$ überdeckt. Falls er nämlich $a2$ überdeckt, können wir die folgende Argumentation übernehmen, wenn wir die Bezeichnungen "Zeilen" und "Spalten" vertauschen. Wenn wir ihn also auf $a1b1$ legen (d.h. wenn wir scheinbar nur eine von zwei Möglichkeiten betrachten), haben wir doch alle möglichen Parkettierungen behandelt.

Nun überlegen wir, wie der Stein, der das Feld $a2$ bedeckt, liegen kann. Da das Feld $a1$ schon belegt ist, gibt es zunächst nur zwei Möglichkeiten: die Lage $a2a3$ oder $a2b2$. In der Lage $a2b2$ würde er aber mit $a1b1$ ein Quadrat bilden, sodass nur die Lage $a2a3$ möglich ist. Wir legen ihn also auf $a2a3$; es entsteht zwangsweise eine L–förmige Konfiguration der zwei Steine $a1b1$ und $a2a3$ über dem Feld $a1$.

Als nächstes betrachten wir den Stein, der das Feld $b2$ bedeckt. Ähnlich wie im vorigen Abschnitt können wir argumentieren, dass die Lage $b2b3$ ausscheidet, da er dann mit $a2a3$ ein Quadrat bildet, also bleibt nur die Lage $b2c2$; und für den Stein, der $b3$ bedeckt, nur die Lage $b3b4$. Die L–förmige Konfiguration über dem Feld $a1$ erzwingt also eine gleiche L–förmige Konstellation über dem Feld $b2$.

Für die Steine, die die Felder auf der Diagonalen, also $c3$, $d4$, $e5$, $f6$ bedecken, argumentieren wir in dieser Reihenfolge analog und erhalten so, dass auch über dem Feld $f6$ eine solche L–förmige Konfiguration besteht, d.h. ein Stein hat die Lage $f6g6$, ein anderer $f7f8$, vgl. Figur. Nun können wir verschieden schließen:

Variante 1: Schließlich muss der Stein, der $g7$ bedeckt, die Lage $g7h7$ haben, um zu vermeiden, dass er mit dem Stein $f7f8$ ein Quadrat bildet. So bleiben aber im rechten oberen Eck am Rand des Schachbrettes die Felder $g8$ und $h8$ unbedeckt. Diese können nur mit dem Stein $g8h8$ überdeckt werden und bilden dann mit dem Stein $g7h7$ ein Quadrat aus zwei Steinen.

Variante 2: Nun ist das Schachbrett in zwei Bereiche mit noch freien Feldern aufgeteilt, der eine Bereich enthält genau 15 Felder, also eine ungerade Anzahl. Dieser Bereich kann aber nicht mit Steinen, von denen jeder eine gerade Anzahl von Feldern bedeckt, vollständig und überschneidungsfrei belegt sein.

Bemerkung: Die Reihenfolge, in der wir bei obiger Betrachtung die Felder auswählen, ist beliebig, solange wir sicherstellen können, dass es für die Lage des betr. Steines nur eine Möglichkeit gibt. So hätten wir auch nach dem Legen von $d5d6$ schließen können, dass man dann $a4a5$, $b5b6$, $c6c7$, $a6a7$ legen muss und nun eines der Felder $a8$ und $b7$ nicht mehr belegen kann.

Der Beweis kann erheblich verkürzt werden, wenn man seine Argumente in einen Widerspruchsbeweis einbaut.

2. Beweis (durch Widerspruch): Wir nehmen an, dass es eine Parkettierung mit Dominosteinen gibt, in der keine zwei Dominosteine ein 2x2–Quadrat bilden.

Ein Feld, das von einem Dominostein so belegt wird, dass er auch das rechte oder obere Nachbarfeld dieses Feldes belegt, nennen wir ein RO–Feld, entsprechend ein LU–Feld, wenn er auch das linke oder untere Nachbarfeld belegt. Offensichtlich hat in jeder Parkettierung jedes Feld genau eine dieser beiden Bezeichnungen, ebenso offensichtlich ist das Feld $a1$ ein RO–Feld und das Feld $h8$ ein LU–Feld.

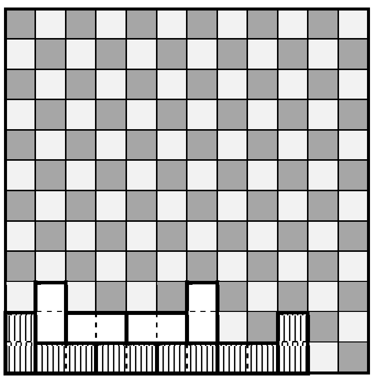
Nun betrachten wir ein Feld und dazu das diagonal rechts oberhalb angrenzende Nachbarfeld, z.B. $c3$ und $d4$. Wäre $c3$ ein RO–Feld und $d4$ ein LU–Feld, so würde der Stein auf $c3$ zusätzlich entweder das Feld $c4$ oder $d3$ bedecken, und der Stein auf $d4$ auch eines dieser beiden bedecken. Damit bedecken diese beiden Steine entweder zusammen das Quadrat $c3d3d4c4$ oder eines der beiden Felder $c4$ oder $d4$ doppelt, was beides im Widerspruch zur Annahme steht. Auf jedes RO–Feld folgt also diagonal rechts oberhalb ein weiteres RO–Feld.

Da das Feld $a1$ ein RO–Feld ist, folgt nach dem eben Gesagten, dass jedes Feld auf der Diagonalen $a1$ bis $h8$ ebenfalls ein RO–Feld ist, was aber für das Feld $h8$ nicht zutrifft. Damit haben wir den gesuchten Widerspruch.

3. Beweis (durch Widerspruch): Über die Aufgabenstellung hinaus zeigen wir, dass die Aussage nicht nur für ein 8x8–Schachbrett gilt, sondern auch für jedes MxN–Schachbrett mit geradem M und geradem N. (Falls beide Kantenlängen ungeradzahlig sind, gibt es keine solche Parkettierung, weil dann die Gesamtzahl der zu bedeckenden Felder stets ungerade ist.)

Wir nehmen an, dass es eine Parkettierung des Schachbrettes gibt, ohne dass es zwei Steine gibt, die ein Quadrat bilden. Von einer solchen Parkettierung betrachten wir einen Stein, der ein Eckfeld bedeckt. Eine der langen Seiten dieses Steines berührt eine Randseite des Schachbrettes; diese Randseite nennen wir den *linken* Rand, und die Randseite, die eine der beiden kurzen Seiten dieses Steines berührt, nennen wir den *unteren* Rand. Die Lage eines Steines nennen wir *senkrecht* bzw. *waagrecht*, wenn seine lange Seite parallel zum linken bzw. parallel zum unteren Rand des Schachbrettes ist.

Der Stein im linken unteren Eck liegt also senkrecht, er bedeckt ein Feld der untersten Reihe des Schachbrettes. Da die Anzahl der Felder entlang des unteren Randes gerade ist, und jeder Stein in waagrechter Lage genau zwei Felder entlang des unteren Randes bedeckt, gibt es mindestens einen zweiten senkrecht liegenden Stein, der den unteren Rand berührt.



Im Rechteck, das durch zwei aufeinander folgende senkrecht liegende Steine bestimmt ist, liegt am unteren Rand eine Anzahl waagrecht liegender Steine. Die Anzahl dieser Steine sei $k \geq 0$, dann besteht diese Rechteck aus zwei waagrechten Reihen von je $2k + 2$ Feldern des Schachbrettes. Eine solche Konfiguration nennen wir eine *Wanne der Länge* $2k + 2$ (in der Figur beispielhaft dargestellt für $k = 4$ mit schraffierten Steinen).

Falls $k = 0$, haben wir einen Widerspruch zur Annahme, da die beiden senkrecht liegenden Steine nebeneinander liegen und so ein Quadrat bilden.

Falls $k \neq 0$, betrachten wir den Stein, der das Feld in der linken unteren Ecke der Wanne bedeckt: Er liegt nicht waagrecht, da er entgegen der Annahme mit dem ersten Stein am unteren Rand der Wanne ein Quadrat bilden würde. Er liegt also senkrecht, die restliche Länge der Wanne ist ungerade. Also gibt es einen zweiten senkrecht liegenden Stein und wir können mit gleicher Argumentation wie oben die Existenz einer Wanne nachweisen, deren Länge nun höchstens $2(k-1)+2$, also kleiner ist, und die eine waagrechte Reihe höher liegt.

Wiederholte Anwendung dieser Argumentation liefert entweder die Existenz einer Wanne mit $k = 0$, oder die Existenz einer Wanne, bei der die senkrecht liegenden Steine den oberen Rand des Schachbrettes berühren. Entweder belegen die beiden senkrechten Steine ein Quadrat, oder jeder der restlichen zu legenden Steine bildet mit dem darunter liegenden ein Quadrat, das ist der gewünschte Widerspruch.

4. Beweis (kombinatorisch): Die Anzahl der 2x2–Teilquadrate auf dem Schachbrett beträgt $7^2 = 49$. Die Anzahl der Steine, die den Rand mit einer langen Seite berühren, sei r, es gilt $r \leq 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 14$. Jeder dieser r Steine liegt in genau einem solchen 2x2–Quadrat. Jeder andere Stein liegt in genau zwei solchen 2x2–Teilquadraten. Da das Schachbrett 64 Felder hat und jeder Stein genau zwei Felder davon bedeckt, gibt es $32 - r$ solche Steine.

Nun versehen wir jedes Quadrat für jeden Stein, der in ihm liegt, mit einer Markierung. Nach oben Gesagtem gibt es $r + 2 \cdot (32 - r) = 64 - r \geq 64 - 14 = 50$ Markierungen. Nach Schubfachprinzip gibt es also mindestens ein Quadrat mit zwei Markierungen, in diesem liegen also zwei Steine.

5. Beweis (kombinatorisch): Das Schachbrett hat 64 Felder, jeder Stein belegt genau zwei Felder, also werden in jeder Parkettierung des Schachbrettes $64 : 2 = 32$ Steine verwendet.

Die Ecken der einzelnen Felder auf dem Schachbrett nennen wir *Knoten*, im Innern des Schachbrettes gibt es $7 \cdot 7 = 49$ Knoten. Die Ränder der einzelnen Felder nennen wir *Kanten*, und diejenigen Kanten, auf denen Ränder von Steinen liegen, nennen wir *Fugen* (die entstehen würden, wenn wir das Schachbrett mit dominoförmigen Fliesen fliesen). Im Innern des Schachbrettes gibt es $2 \cdot 8 \cdot 7 = 112$ Kanten, davon sind 32 von der Mittellinie eines Steins überdeckt, also keine Fugen. Damit gibt es im Innern des Schachbrettes genau $112 - 32 = 80$ Fugen.

Von jedem der Knoten gehen genau 2 oder genau 3 oder genau 4 Fugen aus, dies ist bedingt durch die Form der Steine. Ein Knoten ist genau dann der Mittelpunkt eines Quadrates aus zwei Steinen, wenn er im Innern des Schachbrettes liegt und von ihm genau zwei Fugen ausgehen. Es genügt also zu zeigen, dass es mindestens einen solchen Knoten gibt.

Seien z, d und v die Anzahl der Knoten im Innern des Schachbrettes, von denen genau 2 bzw. genau 3 bzw. genau 4 Fugen ausgehen, dann gilt $z + d + v = 49$. Weiter sei a die Anzahl der Knoten auf dem Rand, von denen eine Fuge ins Innere des Schachbrettes geht; Offensichtlich ist die Anzahl dieser Knoten gleich der Anzahl der Steine, die den Rand berühren. Von solchen Knoten geht übrigens jeweils genau eine Kante ins Innere.

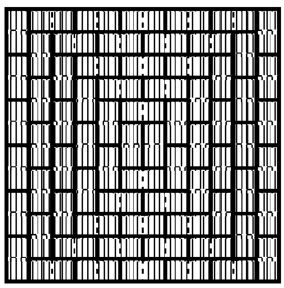
So können wir a abschätzen: Die 4 Steine in den Ecken haben je genau 3 Fugen am Rand, die übrigen höchstens 2, also ist $4 \cdot 3 + 2(a-4) \geq 32$ und somit $a \geq 14$.

Nun zählen wir die Fugen im Innern des Schachbrettes, indem wir von jedem inneren Knoten die Anzahl der von ihm ausgehenden inneren Fugen addieren und das Ergebnis durch 2 teilen (weil jede Kante doppelt gezählt wird). Es ergibt sich

$$\begin{aligned} 80 &= {}^1\!/_2(2z + 3d + 4v + a) \geq {}^1\!/_2(2z + 3(d+v) + a) \\ &\geq {}^1\!/_2(2z + 3(49 - z) + 14) = {}^1\!/_2(161 - z), \end{aligned}$$

woraus sofort $z \geq 161 - 2 \cdot 80 = 1$ folgt. Das war zu zeigen.

Bemerkung: Für $v = 0$ und $a = 14$ ist die Abschätzung scharf. Tatsächlich kann man jedes $(2N\text{x}2N)$–Schachbrett so parkettieren, dass es nur ein Quadrat aus zwei Steinen gibt, vgl. Figur für $N = 6$.



Aufgabe 2: Die Buchstaben A, C, F, H, L und S stehen für sechs nicht notwendigerweise verschiedene Ziffern im Dezimalsystem, wobei $S \neq 0$ und $F \neq 0$ ist. Aus ihnen werden die sechsstelligen Dezimaldarstellungen $SCHLAF$ und $FLACHS$ zweier Zahlen gebildet.

Beweise: Die Differenz dieser beiden Zahlen ist genau dann durch 271 teilbar, wenn $C = L$ und $H = A$ gilt.

1. Beweis: Es ist $SCHLAF - FLACHS$

$$= (S-F)\cdot 10^5 + (C-L)\cdot 10^4 + (H-A)\cdot 10^3 + (L-C)\cdot 10^2 + (A-H)\cdot 10 + (F-S)$$

$$= (S-F)\cdot(10^5-1) + 10^2\cdot(C-L)\cdot(10^2-1) + 10\cdot(H-A)\cdot(10^2-1).$$

Wie man leicht nachrechnet, ist $10^5 - 1 = 99\,999 = 369 \cdot 271$, und 271 ist eine Primzahl.

"$\Leftarrow$" Falls nun $C = L$ und $H = A$, also $C - L = 0$ und $H - A = 0$, bleibt

$$SCHLAF - FLACHS = (S-F)\cdot(10^5-1) = (S-F)\cdot 369 \cdot 271;$$

diese Zahl ist offensichtlich durch 271 teilbar.

"$\Rightarrow$" Sei die Differenz durch 271 teilbar. Es gilt $-9 \le (S-F) \le 9$, $-9 \le (C-L) \le 9$ und $-9 \le (H-A) \le 9$, ferner gilt auch

$$SCHLAF - FLACHS$$

$$= (S-F)\cdot(10^5-1) + 10^2\cdot(C-L)\cdot(10^2-1) + 10\cdot(H-A)\cdot(10^2-1).$$

$$= (S-F)\cdot 369\cdot 271 + 10\cdot(10^2-1)\cdot(10\cdot(C-L) + (H-A)).$$

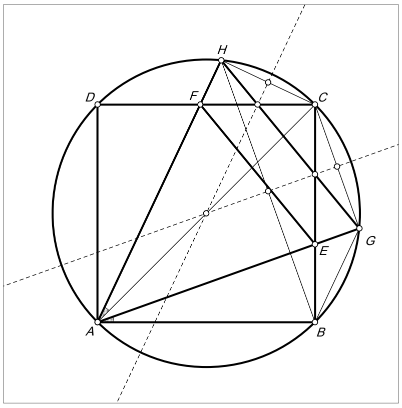
Da diese Summe durch 271 teilbar ist und aus zwei Summanden besteht, von denen der erste ebenfalls durch 271 teilbar ist, muss auch der zweite Summand durch 271 teilbar sein; und da keiner der Faktoren 10 und $(10^2 - 1)$ des zweiten Summanden den Primfaktor 271 enthält, muss der letzte Faktor des zweiten Summanden, also $10\cdot(C-L) + (H-A)$, durch 271 teilbar sein. Da C, L, H und A Ziffern sind, ist

$$-271 < -99 \le 10\cdot(C-L) + (H-A) \le +99 < 271.$$

Einzige Möglichkeit ist also $10\cdot(C-L) + (H-A) = 0$, und da $10\cdot(C-L)$ Endziffer 0 hat, muss dies auch die Endziffer von $H - A$ sein; und da die beteiligten Zahlen Ziffern sind, ist die einzige Möglichkeit $H - A = 0$, was wiederum $C - L = 0$ nach sich zieht. Das war zu zeigen.

Aufgabe 3: Im Quadrat $ABCD$ werden auf der Seite BC der Punkt E und auf der Seite CD der Punkt F so gewählt, dass $\angle EAF = 45°$ gilt und weder E noch F Eckpunkte des Quadrates sind. Die Geraden AE und AF schneiden den Umkreis des Quadrates außer im Punkt A noch in den Punkten G bzw. H.

Beweise, dass die Geraden EF und GH parallel sind.



1. Beweis: Wir verwenden mehrfach folgenden Satz von der Mittelparallele im Dreieck, ohne ihn jeweils zu zitieren (man könnte jeweils auch mit dem Strahlensatz argumentieren):

HS: Eine Gerade durch den Mittelpunkt einer Dreiecksseite enthält genau dann den Mittelpunkt einer zweiten Seite, wenn sie parallel zur dritten Seite des Dreiecks ist.

Es ist $\angle BAC = 45° = \angle GAH$, also auch $\angle BAG = \angle CAH$. Nach Umfangswinkelsatz haben damit die Sehnen BG und CH gleiche Länge, liegen also symmetrisch bezüglich des Durchmessers durch ihren Schnittpunkt. Also ist das Viereck $BGCH$ ein achsensymmetrisches Trapez. Insbesondere schneiden sich die symmetrisch liegenden Diagonalen BC und GH auf der Symmetrieachse, d.h. auf der Mittelsenkrechten von CG.

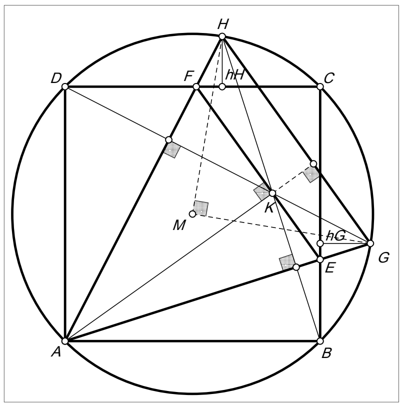
Es gilt aber auch $\angle CAD = 45° = \angle GAH$. Mit analoger Argumentation erhalten wir, dass auch das Viereck $DHCG$ ein achsensymmetrisches Trapez ist und sich seine Diagonalen DC und GH auf der Mittelsenkrechten von HC schneiden.

Der Umkreis des Quadrates $ABCD$ ist gleichzeitig Thaleskreis über der Strecke AC, also ist $\angle CGA = 90°$ und die Mittelsenkrechte der Strecke CG parallel zur Strecke AG. Diese Mittelsenkrechte ist also Mittelparallele im Dreieck CGA. Weil der Punkt E auf der Strecke AG liegt, ist sie darüber hinaus aber auch Mittelparallele im Dreieck CGE, insbesondere halbiert sie die Strecke CE. Mit analoger Argumentation schließen wir, dass die Mittelsenkrechte von HC die Strecke FC halbiert.

Nach oben Gesagtem sind diese Halbierungspunkte aber auch Punkte der Strecke HG. Also enthält die Strecke HG die Mittelpunkte der Seiten EC und FC im Dreieck FCE, ist also Mittelparallele zur Seite FE.

2. Beweis: Mit M sei der Mittelpunkt des Umkreises des Quadrates $ABCD$ bezeichnet, mit h_H und h_G die (Längen der) Höhen von H bzw. G in den Dreiecken DCH bzw. CBG.

Es ist $\angle GAH = 45°$, also ist nach Umfangswinkelsatz $\angle GMH = 2 \cdot 45° = 90°$. Aber es ist auch $\angle BMC = \angle CMD = 90°$, also führt die Drehung um M um $90°$ gegen den UZS das Dreieck BGC in das Dreieck CHD über. Die Dreiecke sind also kongruent, insbesondere sind h_H und h_G gleich lang. Da auch die Quadratseiten alle gleiche Länge haben, gilt nach Strahlensatz (Zentrum F, $h_H \parallel AD$ bzw. Zentrum E, $h_G \parallel AB$)
$$\frac{\overline{HF}}{\overline{FA}} = \frac{h_H}{\overline{AD}} = \frac{h_G}{\overline{AB}} = \frac{\overline{GE}}{\overline{EA}},$$



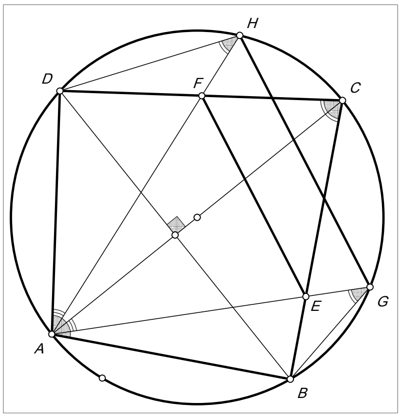
und da F zwischen A und H liegt und auch E zwischen A und G, folgt wieder mit Strahlensatz, dass $FE \parallel HG$.

3. Beweis: Wir spiegeln das Dreieck ABE an AE, das Bild des Punktes B bezeichnen wir mit K. Der Punkt K liegt also auf dem Lot von B auf AE. Weiter spiegeln wir das Dreieck ADF an AF. Weil $\angle BAE + \angle FAD = 90° - 45° = 45° = \angle EAF$ und weil die beiden Strecken AB und AD gleiche Länge haben, ist das Bild von D ebenfalls der Punkt K; dieser Punkt liegt also auch auf dem Lot von D auf AF. Da weiter $\angle AKE = \angle ABE = 90° = \angle ADF = \angle AKF$, gilt $\angle FKE = 90° + 90° = 180°$. Also liegt der Punkt K auf der Strecke EF und es gilt $AK \perp EF$.

Mit M sei der Mittelpunkt des Umkreises des Quadrates $ABCD$ bezeichnet. Es ist $\angle GAH = 45°$, also ist nach Umfangswinkelsatz $\angle GMH = 2 \cdot 45° = 90°$. Aber auch jede Quadratseite erscheint von M unter dem Winkel von 90°. Also führt die Drehung um M um 90° gegen den UZS den Punkt A nach B, den Punkt G nach H und den Punkt D nach A. Hieraus folgt sofort, dass $AG \perp BH$ und $GD \perp HA$. Damit sind die die Strecken BH und DG Höhen im Dreieck AGH, nach den Ergebnissen im ersten Absatz enthalten sie beide den Punkt K. Dieser ist also Höhenschnittpunkt im Dreieck AGH, also ist AK Höhe von A auf die Seite GH. Damit haben GH und EF das gemeinsame Lot AK, sind also parallel.

Bemerkung: Zum Nachweis, dass die Punkte F, K und E kollinear sind, können wir auch den Satz von Pascal bemühen: Die Ecken des Sechsecks $BHAGDC$ liegen auf einem Kegelschnitt, also liegen die Schnittpunkte gegenüberliegende Seiten (BH mit GD, HA mit DC und AG mit CA) auf einer Geraden.

4. Beweis: Jedes Drachenviereck $ABCD$ mit Symmetrieachse AC und rechten Winkeln bei B und D hat einen Umkreis, nämlich den Thaleskreis über der Strecke AC. Über die Aufgabenstellung hinaus zeigen wir, dass die Aussage auch für ein solches Viereck $ABCD$ gilt, wenn wir die Bedingung $\angle EAF = 45°$ durch die Bedingung $\angle EAF = {}^1/_2\angle BAD$ ersetzen. Die Aufgabenstellung ist dann für den Spezialfall $\angle BAD = 90°$ gezeigt.



Nach Voraussetzung gilt ${}^1/_2\angle BAD = \angle BAC = \angle GAH$, also auch $\angle BAG = \angle CAH = \angle CAF$. Weiter ist nach Umfangswinkelsatz und aus Symmetriegründen $\angle AGB = \angle ACB = \angle ACD = \angle ACF$. Damit haben die Dreiecke ABG und AFC gleiche Innenwinkel; sie sind also ähnlich und es gilt $\frac{\overline{AF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AG}}$.

Nach analoger Argumentation sind auch die Dreiecke ADH und AEC ähnlich, also gilt $\frac{\overline{AD}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$.

Multiplikation der linken Seiten und der rechten Seiten ergibt $\frac{\overline{AF}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{AD}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AG}} \cdot \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$, was sich wegen $\overline{AD} = \overline{AB}$ kürzt zu $\frac{\overline{AF}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AG}}$. Mit Umkehrung des Strahlensatzes folgt sofort $EF \parallel GH$.

5. Beweis: Wir gehen von der abgeschwächten Voraussetzung wie im 4. Beweis aus. O.B.d.A sei $\overline{AB} = 1$, nach Voraussetzung also auch $\overline{AD} = 1$. Weiter sei $\varphi := \angle BAE$ und $\alpha := \angle BAC$. Mit der Voraussetzung folgt $\angle BAC = \angle GAH = \angle CAD = \alpha$ und hieraus sofort $\angle BAG = \angle CAH = \varphi$ und $\angle GAC = \angle FAD = \alpha - \varphi$. Ferner ist der Umkreis von Viereck $ABCD$ auch Thaleskreis über der Strecke AC, also sind die Dreiecke AGC und AHC rechtwinklig bei G bzw. H.

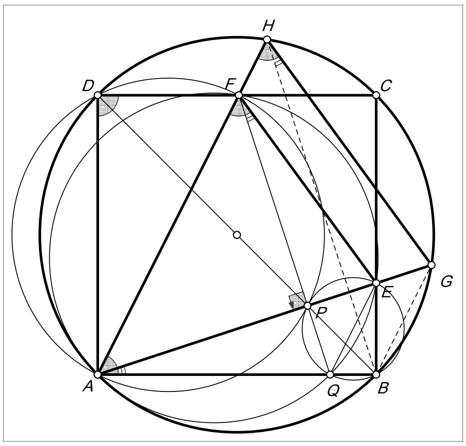
Nun können wir berechnen:

$$\overline{AG} = cos(\alpha - \varphi) \cdot \overline{AC} \qquad \overline{AH} = cos(\varphi) \cdot \overline{AC}$$

$$\overline{AE} = \frac{1}{cos(\varphi)} \qquad \overline{AF} = \frac{1}{cos(\alpha - \varphi)}$$

Hieraus folgt $\frac{\overline{AG}}{\overline{AE}} = cos(\varphi) \cdot cos(\alpha - \varphi) \cdot \overline{AC} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AF}}$ und hieraus mit Strahlensatz, dass $GH \parallel EF$.

6. Beweis (über vier Sehnenvierecke): Sei P der Fußpunkt des Lotes von F auf AE und Q der Schnittpunkt von FP mit AB. Die Vierecke $APFD$ und $BEPQ$ haben beide an zwei gegenüber liegenden Ecken 90° Innenwinkel, sind also beide Sehnenvierecke, ebenso wie nach Voraussetzung das Viereck $ABCD$. Im Sehnenviereck $APFD$ gilt $45° = \angle PAF = \angle PDF = \angle BDF$,



also liegt P auf der Geraden BD. Hieraus schließen wir, dass

$\angle AFQ = \angle AFP = \angle ADP = 45° = \angle PBQ = \angle PEQ = \angle AEQ,$

d.h. dass auch $AQEF$ ein Sehnenviereck ist.

Ein Tanz in diesen vier Sehnenvierecken ergibt:

$$\begin{aligned}\angle AFE &= \angle AFP + \angle QFE = \angle ADP + \angle QAE \\ &= \angle ADB + \angle BAG = \angle AHB + \angle BHG \\ &= \angle AHG,\end{aligned}$$

also sind diese beiden Stufenwinkel gleich, es folgt $FE \parallel HG$.

7. Beweis (trigonometrisch mit Koordinatenrechnung): Wir werden zeigen, dass eine zentrische Streckung vom Punkt A mit dem Streckfaktor $\dfrac{1+\tan(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)}$ sowohl den Punkt E nach G als auch den Punkt F nach H abbildet. Hieraus folgt sofort, dass die Geraden EF und GH parallel.

Hierzu legen wir ein Koordinatensystem so auf die Figur, dass der Ursprung auf den Punkt A zu liegen kommt, die Achsen und Einheiten wählen wir so, dass B die Koordinaten $(1|0)$ und D die Koordinaten $D(0|1)$ hat.

Sei $\alpha := \angle BAE$, dann hat E die Koordinaten $E(1|\tan(\alpha))$ mit $0° < \alpha < 45°$ (deswegen sind auch alle unten vorkommenden Nenner von 0 verschieden) die Gerade AE hat die Gleichung $y = x \cdot \tan(\alpha)$. Der Umkreis des Quadrates hat den Mittelpunkt $(^1/_2 \,|\, ^1/_2)$ und enthält den Punkt $(0|0)$, hat also die Gleichung $(x - {}^1/_2)^2 + (y - {}^1/_2)^2 = {}^1/_2$.

Der Punkt G ist Schnittpunkt dieser beiden Linien, also gilt $(x_G - {}^1/_2)^2 + (x_G \cdot \tan(\alpha) - {}^1/_2)^2 = {}^1/_2$, was wir äquivalent umformen zu $x_G^2 \cdot (1 + \tan^2(\alpha)) = x_G \cdot (1 + \tan(\alpha))$. Die erste Lösung $x_G = 0$ führt zu den x–Koordinaten des zweiten Schnittpunkts A, sodass wir $x_G = \dfrac{1+\tan(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)} = x_E \cdot \dfrac{1+\tan(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)}$ erhalten, d.h. G ist tatsächlich das Bild von E bei der angegebenen Streckung.

Die Gerade AF hat die Gleichung $y = x \cdot \tan(45°+\alpha)$ mit $45° < 45° + \alpha < 90°$. Dies formen wir mit $\tan(45°) = 1$ und einem Additionstheorem um zu

$$y = x \cdot \tan(45° + \alpha) = x \cdot \frac{\tan(45°)+\tan(\alpha)}{1-\tan(45°)\cdot\tan(\alpha)} = x \cdot \frac{1+\tan(\alpha)}{1-\tan(\alpha)} \quad \text{oder} \quad x = y \cdot \frac{1-\tan(\alpha)}{1+\tan(\alpha)}.$$

Zur Berechnung der y – Koordinate von H setzen wir dies in die Kreisgleichung ein und erhalten

$$\left(y_H \cdot \frac{1-\tan(\alpha)}{1+\tan(\alpha)} - {}^1/_2\right)^2 + (y_H - {}^1/_2)^2 = {}^1/_2,$$

und hieraus zusammen mit $y_F = 1$:

$$y_H = \frac{1+\dfrac{1-\tan(\alpha)}{1+\tan(\alpha)}}{1+\dfrac{(1-\tan(\alpha))^2}{(1+\tan(\alpha))^2}} = \frac{\dfrac{1+\tan(\alpha)+1-\tan(\alpha)}{1+\tan(\alpha)}}{\dfrac{(1+\tan(\alpha))^2+(1-\tan(\alpha))^2}{(1+\tan(\alpha))^2}} = \frac{2(1+\tan(\alpha))}{2+2\tan^2(\alpha)} = y_F \cdot \frac{1+\tan(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)},$$

also den gleichen Streckfaktor. Dies war zu zeigen.

Aufgabe 4: In der Dezimaldarstellung von $\sqrt{2}$ = 1,4142... findet Isabelle eine Folge von k aufeinander folgenden Nullen, dabei ist k eine positive ganze Zahl.

Beweise: Die erste Null dieser Folge steht frühestens an der k–ten Stelle nach dem Komma.

Bemerkung: Ob es in der Dezimalentwicklung der Zahl $\sqrt{2}$ tatsächlich beliebig lange Folgen von Ziffern 0 gibt, ist mir nicht bekannt, ein einfacher Beweis dafür erst recht nicht.

1. Beweis: Einfache Rechnung zeigt, dass $1{,}414^2 < 2 < 1{,}42^2$ und somit $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}420$. Isabelle betrachtet also die Dezimaldarstellung $\sqrt{2} = 1,\underbrace{41.....x}_{r-1\text{ Stellen}}\underbrace{000...000}_{k\text{ Stellen}}y......$, d.h. an der $(r-1)$–ten Stelle nach dem Komma steht eine Ziffer $x \neq 0$, dabei ist sicher $r-1 \geq 3$; danach folgen k Ziffern 0 und dann eine Ziffer $y \neq 0$. Es ist zu zeigen, dass $r \geq k$.

Sei $a := \left\lfloor \sqrt{2}\cdot 10^{r-1} \right\rfloor = \underbrace{141.....x}_{r\text{ Stellen}}$. Weil a ganzzahlig ist und $a < \sqrt{2}\cdot 10^{r-1}$, gilt $\left(\sqrt{2}\cdot 10^{r-1}\right)^2 - a^2 > 0$, und da dies eine Differenz zweier ganzer Zahlen ist, gilt sogar $\left(\sqrt{2}\cdot 10^{r-1}\right)^2 - a^2 \geq 1$. Weiter ist $0 < \sqrt{2}\cdot 10^{r-1} - a = 0,\underbrace{000....000}_{k\text{ Stellen}}y \leq 0,\underbrace{000....00}_{k-1\text{ Stellen}}1 = 10^{-k}$. Dies setzen wir alles zusammen zu

$$\begin{aligned} 1 &\leq \left(\sqrt{2}\cdot 10^{r-1}\right)^2 - a^2 = \left(\sqrt{2}\cdot 10^{r-1} + a\right)\left(\sqrt{2}\cdot 10^{r-1} - a\right) < \left(2\sqrt{2}\cdot 10^{r-1}\right)\cdot 10^{-k} \\ &< 2\cdot 1{,}42\cdot 10^{r-1-k} = 2{,}84\cdot 10^{r-1-k}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt sofort $10^{r-1-k} > {}^{1}/_{2{,}84} > 10^{-1}$, also $r-1-k \geq 0$ und somit $r \geq k+1 > k$.

Damit haben wir sogar mehr gezeigt als verlangt: Die erste Null dieser Folge kann frühestens an der $(k+1)$–ten Stelle nach dem Komma stehen.

2. Beweis (mit kleiner Lücke, durch Widerspruch, letztlich mit den gleichen Argumenten wie im 1. Beweis.): Alle Formulierungen beziehen sich auf Darstellungen einer Zahl im Dezimalsystem.

Zunächst stellen wir fest, dass die ersten 4 NKS (Nachkommastellen) von $\sqrt{2}$ keine Ziffer 0 enthalten. Damit ist in folgender Argumentation sicher $r \geq 3$.

Wir nehmen an, dass Isabelle folgende Darstellung gefunden hat:

$$\sqrt{2} = 1,\underbrace{4142.....x}_{r-1\text{ Stellen}}\underbrace{000....000}_{k\text{ Stellen}}y..... \quad \text{mit } r \geq 3,\ x \neq 0,\ y \neq 0 \text{ und } k > r. \text{ Quadrieren ergibt}$$

$$\begin{aligned} 2 &= \left(1,\underbrace{41.....x}_{r-1\text{ Stellen}} + 0,\underbrace{000...000}_{r-1+k\text{ Stellen}}y......\right)^2 \\ &= \left(1,\underbrace{41.....x}_{r-1\text{ Stellen}}\right)^2 + 2\cdot 1,\underbrace{41.....x}_{r-1\text{ Stellen}}\cdot 0,\underbrace{000...000}_{r-1+k\text{ Stellen}}y...... + \left(0,\underbrace{000...000}_{r-1+k\text{ Stellen}}y......\right)^2. \\ &= 1,\underbrace{99...........z}_{2r-2\text{ Stellen}}0000... + 0,\underbrace{00..........0}_{r-2+k\text{ Stellen}}vw..... + 0,\underbrace{00..............0}_{2(r-1+k)-1\text{ Stellen}}tu..... \end{aligned}$$

Da $2,\overline{0}$ und $1,\overline{9}$ die einzigen Dezimaldarstellungen der Zahl 2 sind, genügt es zu zeigen, dass die Summe dieser drei Zahlen an der $(2r-2)$–ten NKS eine von Null verschiedene Ziffer hat und an der $(2r-1)$–ten NKS eine von Neun verschiedene Ziffer.

Nach bekannten Rechenregeln zur Multiplikation von Dezimalzahlen hat der erste Summand ab einschließlich der $(2r-1)$–ten NKS lauter Nullen stehen und an der $(2r-2)$–ten NKS die Einerziffer von x^2, und da $x \neq 0$, ist diese (oben mit z bezeichnete) Ziffer von Null verschieden. Wir werden zeigen, dass unter der Annahme $k > r$ sich diese Ziffer bei der Addition von zweitem und dritte Summanden nicht ändert.

Der zweite Summand hat frühestens an der $(r - 1 + k)$–ten NKS eine Ziffer verschieden von 0, nämlich wenn bei der Multiplikation $2 \cdot 1{,}4142...x \cdot y...$ ein Übertrag bei der linken Ziffer stattfindet, d.h. mit der Annahme $k > r$ frühestens an der $2r$–ten Stelle, der dritte Summand hat sicher frühestens an der $(2[(r - 1 + k)] - 1)$–ten NKS, also frühestens an der $(4r - 1)$–ten NKS, das ist wegen $r \geq 3$ sicher später als beim 2. Summand. Addiert man diese beiden Zahlen, so hat die Summe an der $(2r - 1)$–ten NKS entweder die Ziffer 0 oder die Ziffer 1, je nachdem, ob ein Übertrag stattfindet oder nicht.

Bei der Addition der drei Summanden treffen also an der $(2r–1)$–ten NKS die Ziffern 0 aus dem 1. Summanden auf eine Ziffer 0 oder 1 aus der Summe von zweitem und dritten Summanden; in jedem Fall ist die Ziffer dann von 9 verschieden und es findet kein Übertrag statt, d.h. die Ziffer an der $(2r - 2)$–ten NKS bleibt von Null verschieden. Das war zu zeigen.

Bemerkung: Wie im 1. Beweis kann auch schon die Annahme $k + 1 > r$ zum Widerspruch geführt werden: Die Ziffer v im zweiten Summanden steht dann frühestens an der $(2r–1)$ten NKS, sie hat den Wert 0, wenn bei der Multiplikation $2 \cdot 1{,}4142...x \cdot 0{,}00...0y...$ kein Übertrag bei der ersten linken Ziffer stattfindet, sonst ist sie nicht größer als 3. In der Gesamtsumme wird dann die $(2r–1)$te NKS selbst bei einem Übertrag nicht größer als 4, also verschieden von 9 und es findet kein Übertrag auf die $2r$–te NKS statt, sodass diese Ziffer x unverändert in der Gesamtsumme auftaucht, d.h. von Null verschieden ist. Damit ist gezeigt: Die erste Null dieser Folge kann sogar frühestens an der $(k + 1)$ – ten NKS stehen.

Bemerkung: Folgende kleine Lücke müsste noch geschlossen werden: Es wäre nachzuweisen, dass die verwendeten Additions- und Multiplikationsalgorithmen nicht nur bei Zahlen mit endlicher Dezimaldarstellung verwendet werden können, sondern auch bei solchen mit unendlicher Darstellung.

3. Beweis (Wurzelziehalgorithmus): Die Ziffer mit dem Stellenwert 10^{-n} ($n \in \{0, 1, 2, ...\}$) in der Dezimaldarstellung von $\sqrt{2}$ bezeichnen wir mit z_n, und die Zahl, die durch die Ziffernfolge $z_0z_1 ... z_n$ dargestellt wird, mit a_n. Es ist also z.B. $a_0 = 1$, $z_0 = 1$, $a_1 = 14$, $z_1 = 4$, $a_2 = 141$, $z_2 = 1$ usw.; ferner gilt $a_{n+1} = 10 \cdot a_n + z_{n+1}$.

Wir überlegen, wie wir aus a_n die Ziffer z_{n+1} bestimmen können, und überlegen dann, unter welchen Umständen diese Ziffer z_{n+1} den Wert Null hat.

Jede Zahl a_n^2 ist ein etwas zu kleiner ganzzahliger Näherungswert für $2 \cdot 10^{2n}$ und $(a_n + 1)^2$ ein zu großer; wir definieren s_n als die positive ganze Zahl, um die a_n^2 zu klein ist, d.h. als die Zahl, für die

$$a_n^2 = 2 \cdot 10^{2n} - s_n .$$

Nun gilt $(a_{n+1})^2 = (10 \cdot a_n + z_{n+1})^2 = 10^2 \cdot (2 \cdot 10^{2n} - s_n)^2 + 2 \cdot 10 \cdot a_n \cdot z_{n+1} + z_{n+1}^2$

$$= 2 \cdot 10^{2n+2} - [100 \cdot s_n - z_{n+1} \cdot (20a_n + z_{n+1})],$$

es ist also $s_{n+1} = 100 \cdot s_n - z_{n+1} \cdot (20a_n + z_{n+1})$.

Hieraus kann man z_{n+1} bestimmen: Dies ist die größte Ziffer, für die $s_{n+1} \geq 0$. (*)

Gleichheit tritt dabei genau dann auf, wenn die Dezimalbruchentwicklung abbricht, was hier nie der Fall ist, weil $\sqrt{2}$ irrational ist.

Also hat die Ziffer z_{n+1} genau dann den Wert 0, wenn $z_{n+1} = 1$ "zu groß" wäre, d.h. wenn

$$1 \cdot (20a_n + 1) > 100 \cdot s_n ,$$

und wenn $z_{n+1} = 0$ ist, gilt $s_{n+1} = 100 \cdot s_n$.

Wenn nun Isabelle die Darstellung $\sqrt{2} = 1{,}\underbrace{4142.....x}_{r-1\text{ Stellen}}\underbrace{000....000}_{k\text{ Stellen}}y.....$ findet, ist zu zeigen, dass $r \geq k$.

Da unter den ersten vier Nachkommastellen keine Ziffer 0 vorkommt, ist die Aussage richtig für $k \leq 2$. Wir können uns also auf $k \geq 3$ beschränken; dies stellt sicher, dass alle unten vorkommenden Indices wohldefiniert sind.

Es ist $z_{r-1} = x \neq 0$ und für die k folgenden Ziffern gilt $z_r = z_{r+1} = ... = z_{r+k-1} = 0$, also ist

$1 \cdot (20a_n + 1) > 100 \cdot s_n$ für die k Indices $n = r-1, r, \ldots, r+k-2$, und ferner

$a_{r+i} = 10^{i+1} \cdot a_{r-1}$ für alle $i = 0, 1, \ldots, k-1$.

Zusätzlich folgt wegen $s_n \geq 1$ für alle n induktiv

$$s_{r+i} = 10^{2(i+1)} \cdot s_{r-1} \geq 10^{2(i+1)} \text{ für alle } i = 0, 1, \ldots, k-1.$$

Andererseits gilt $1{,}5 \cdot 10^n > a_n + 0{,}05$ für alle n, was wir mit Obigem zusamensetzen zu

$$\begin{aligned} 3 \cdot 10^{r+k-1} &= 20 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{r+k-2} > 1 \cdot (20 \cdot (a_{r+k-2} + 0{,}05)) = 1 \cdot (20 \cdot a_{r+k-2} + 1) \\ &> 100 \cdot s_{r+k-2} \geq 100 \cdot 10^{2(k-2+1)} \\ &= 10^{2k}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt sofort $3 > 10^{2k-(r+k-1)}$, also $2k - (r+k-1) \leq 0$, also $r \geq k+1$; das ist sogar mehr als zu zeigen war.

Bemerkungen: Bis in die 1970er–Jahre wurde an manchen Gymnasien in Deutschland ein schriftlicher Wurzelziehalgorithmus gelehrt, der dem üblichen Divisionsalgorithmus ähnelt. Die Gleichung (*) ist Grundlage für diesen Algorithmus. Er nützt aus, dass es einfacher ist, zur Ungleichung $z_{n+1} \cdot (20a_n + z_{n+1}) \leq s_{n+1}$ die maximale Lösung z_{n+1} zu bestimmen als zur Ungleichung $(10a_n + z_{n+1})^2 \leq 2 \cdot 10^{2(n+1)}$. Näheres findet man im Internet unter dem Stichwort "Wurzelzieh-algorithmus" o.ä..

Die Seite `https://apod.nasa.gov/htmltest/gifcity/sqrt2.1mil` listet die erste Million Ziffern der Dezimaldarstellung von $\sqrt{2}$ auf. Wenn diese Aufstellung richtig ist, der Suchalgorithmus meines Computers fehlerfrei arbeitet und ich keinen Tippfehler gemacht habe, gibt es in dieser Liste genau eine Kette von aufeinander folgenden Nullen der Länge 7 (sie steht ungefähr an 300.000ster Stelle), aber keine längere. Ob man hieraus heuristisch folgern kann, dass man die Aussage der Aufgabe erheblich verschärfen kann, ist m.E. fraglich.