BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK
Bildung & Begabung

Aufgaben und Lösungen

2. Runde 2019

Endgültige Fassung

Oktober 2019

» **KORREKTURKOMMISSION | KARL FEGERT**

» **BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK**
Kortrijker Straße 1, 53177 Bonn | Postfach 20 02 01, 53132 Bonn | Tel.: (02 28) 9 59 15-20, Fax: (02 28) 9 59 15-29
info@bundeswettbewerb-mathematik.de, www.bundeswettbewerb-mathematik.de

Stand: 22.10.2019

GEFÖRDERT VOM
Bundesministerium für Bildung und Forschung
STIFTERVERBAND
KULTUSMINISTER KONFERENZ
HDI talanx.
GEFÖRDERT VON GESAMTMETALL
think ING.

Aufgabe 1: 120 Piraten verteilen unter sich 119 Goldstücke. Danach kontrolliert der Kapitän, ob irgendeiner der Piraten 15 oder mehr Goldstücke hat. Wenn er den ersten solchen findet, muss dieser alle seine Goldstücke anderen Piraten geben, wobei er keinem mehr als ein Goldstück geben darf. Diese Kontrolle wird wiederholt, solange es irgendeinen Piraten mit 15 oder mehr Goldstücken gibt.

Endet dieser Vorgang in jedem Fall nach endlich vielen Kontrollen?

Anmerkung: Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.

Bezeichnungen: Mit "Kontrolle" bezeichnen wir den Vorgang, bei dem die Piraten der Reihe nach durchsucht werden, entweder bis ein erster Pirat mit mindestens 15 Goldstücken gefunden wird (und anschließend diese 15 Goldstücke verteilt werden) oder bis alle Piraten durchsucht wurden und jeder weniger als 15 Goldstücke hat. Die Kontrollen werden mit K_i (i = 1, 2, 3, ...) bezeichnet, wobei die Indizes der zeitlichen Reihenfolge entsprechend zugeordnet werden.

Antwort: Dieser Vorgang endet in jedem Fall nach endlich vielen Kontrollen. Über die Aufgabenstellung hinaus kann man zeigen, dass der Vorgang sogar spätestens mit der 15. Kontrolle endet.

1. Beweis (durch Widerspruch): Wir nehmen an, dass es eine Verteilung gibt, bei der bei jeder von 15 aufeinander folgenden Kontrollen ein Pirat mit 15 Goldstücken angetroffen wird.

Jeder Pirat, der bei einer Kontrolle mit 15 oder mehr Goldstücken angetroffen wird, muss alle seine Goldstücke abgeben und kann nach jeder weiteren Kontrolle höchstens ein Goldstück wiederbekommen, er kann also frühestens nach 15 weiteren Kontrollen wieder mit 15 oder mehr Goldstücken angetroffen werden. Wenn also bei 15 aufeinanderfolgenden Kontrollen jedes Mal ein Pirat mit 15 oder mehr Goldstücken angetroffen wird, kommt dabei kein Pirat zweimal vor.

Da jeder Pirat nach jeder Kontrolle höchstens ein Goldstück bekommt, kann dieser Pirat bei der Kontrolle K_i nur dann mit 15 Goldstücken angetroffen werden, wenn er bei der Kontrolle K_{i-j} (j = 0, 1, 2, ... , $i-1$) mindestens $15-j$ Goldstücke gehabt hat, also bei Kontrolle K_1 mindestens $15-(i-1) = 16-i$ Goldstücke.

Also gibt es zu Beginn 15 Piraten P_i (i = 1, 2, ... , 15), sodass jeder Pirat P_i mindestens $16-i$ Goldstücke hat. Unter diesen 15 Piraten wurden also mindestens 15 + 14 + ... + 2 + 1 = 120 Goldstücke verteilt, das sind aber mehr, als nach Voraussetzung insgesamt verteilt wurden. Das ist der gesuchte Widerspruch.

2. Beweis (Verwendung einer Kenngröße): Eine Kontrolle, bei der ein Pirat mit 15 oder mehr Goldstücken angetroffen wird, nennen wir *erfolgreich*.

Zu jeder Verteilung der Goldstücke betrachten wir die Kenngröße $V := \sum_{i=1}^{120} a_i^2$, wobei a_i die Anzahl der Goldstücke beschreibt, die der Pirat P_i (i = 1, 2, ... , 120) besitzt. Da es mindestens ein positives a_i gibt und nur endlich viele mögliche Verteilungen, gibt es eine natürliche Zahl K, sodass zu jedem Zeitpunkt $0 < V \leq K$. (Mit argumentativem Mehraufwand könnte man schärfer $119 \leq V \leq 119^2$ abschätzen.) Wir werden zeigen, dass nach jeder erfolgreichen Kontrolle mit Neuverteilung der Goldstücke diese Kenngröße um mindestens 2 kleiner wird. Es kann also höchstens $K/2$ erfolgreiche Kontrollen geben, weil andernfalls ein Wert $V \leq 0$ erreicht wird, was nicht sein kann.

Wir schätzen also die Kenngröße V' nach einer erfolgreichen Kontrolle mit Neuverteilung ab im Vergleich zur Kenngröße V vor der Kontrolle: O.B.d.A. werde der Pirat P_{120} mit $n \geq 15$ Goldstücken angetroffen und diese Goldstücke werden auf die Piraten P_1, P_2, ... , P_n verteilt ($15 \leq n \leq 119$). Diese n Piraten haben vor der Neuverteilung höchstens $119 - n \leq 119 - 15 = 104$ Goldstücke, d.h. es ist

$$2 \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \leq 2 \cdot (119 - 15) = 208.$$

Ferner ist $n \cdot (n-1) \geq 15 \cdot 14 = 210$. Damit gilt:

$$V' = V - \left(n^2 + \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right) + \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + 1)^2 \right) = V - n^2 + n + \sum_{i=1}^{n} 2a_i$$

$$= V - n \cdot (n-1) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \leq V - 210 + 208 = V - 2,$$ das war zu zeigen.

Bemerkungen: Werden 120 oder mehr Goldstücke verteilt, können die Piraten erzwingen, dass dieser Vorgang unendlich oft wiederholt wird: Es werden 16 Piraten P_i (i = 1, 2, ... , 16) ausgewählt, jeder Pirat P_i erhält $16 - i$ Goldstücke; dies ist möglich, weil $15 + 14 + ... + 1 + 0 = 120$. Wenn ein Pirat mit 15 Goldstücken kontrolliert wird, dann erhält jeder der übrigen Piraten genau ein Goldstück, damit gibt es nach jeder Kontrolle einen mit 15 Goldstücken.

Die Größe V ist ein Maß für die Ungleichheit Anteile eines Gutes unter den Individuen in einer Gesellschaft, wie es in den Wirtschaftswissenschaften (vgl. u.a. Herfindahl-Hirschman-Index) vielfältig angewendet wird.

Aufgabe 2: Bestimme den kleinstmöglichen Wert der Summe $S(a,b,c) = \frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}$, wobei a, b, c drei positive reelle Zahlen mit $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ sind.

Anmerkung: Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.

Antwort: Der kleinstmögliche Wert ist $S(a,b,c) = \sqrt{3}$.

1. Beweis: Für $S(a,b,c)$ schreiben wir kürzer S. Zuerst beweisen wir einen Hilfssatz:

HS: Für drei reelle Zahlen x,y,z gilt stets:

$(x^2 + y^2 + z^2) \geq {}^1/_3 \cdot (x + y + z)^2$, wobei Gleichheit genau dann gegeben ist, wenn $x = y = z$.

Beweis des HS: Es gelten die Äquivalenzen

$$\begin{aligned} & (x^2 + y^2 + z^2) &\geq\ & {}^1/_3 \cdot (x + y + z)^2 \\ \Leftrightarrow\ & 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 &\geq\ & x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + z^2 - 2zx + x^2 &\geq\ & 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 &\geq\ & 0 \end{aligned}$$

und diese letzte Ungleichung ist offensichtlich stets erfüllt, wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn $x = y = z$.

Nun zum eigentlichen Beweis: Zuerst stellen wir fest, dass für $a = b = c = \frac{\sqrt{3}}{3}$ die Bedingung $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ erfüllt ist und die Summe S den Wert $\sqrt{3}$ hat, d.h. der behauptete Minimalwert wird tatsächlich angenommen.

Zum Nachweis, dass S keinen kleineren Wert annehmen kann, setzen wir $x := \frac{ab}{c}$, $y := \frac{bc}{a}$ und $z := \frac{ca}{b}$. Dann ist $xy + yz + zx = a^2 + b^2 + c^2 = 1$, zusammen mit dem HS können wir abschätzen:

$$\begin{aligned} S^2 &= (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = x^2 + y^2 + z^2 + 2 \cdot 1 \\ &\geq {}^1/_3 \cdot (x + y + z)^2 + 2 = {}^1/_3 \cdot S^2 + 2 \end{aligned}$$

Aus $S^2 \geq {}^1/_3 \cdot S^2 + 2$ folgt sofort $S^2 \geq 3$; und, da S sicher positiv ist, weiter $S \geq \sqrt{3}$.

2. Beweis: (letztlich nur Variante des 1. Beweises): Bekanntlich gilt für drei positive Zahlen stets, dass ihr quadratisches Mittel nicht kleiner ist als ihr arithmetisches Mittel, wobei Gleichheit genau dann eintritt, wenn die drei Zahlen gleich sind. Die Voraussetzung $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ verwenden wir in der folgenden Abschätzung, zu der noch bemerkt sei, dass wir bis zur zweiten Zeile nur den Radikanden umformen und so ablesen können, dass der Radikand der ersten Wurzel, nämlich ${}^1/_3(S^2 - 2)$, sicher positiv ist:

$$\sqrt{\frac{S^2-2}{3}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{ab}{c}\right)^2+\left(\frac{bc}{a}\right)^2+\left(\frac{ca}{b}\right)^2+2\left(\frac{abbc}{ca}+\frac{bcca}{ab}+\frac{caab}{bc}\right)-2}{3}}$$

$$= \sqrt{\frac{\left(\frac{ab}{c}\right)^2+\left(\frac{bc}{a}\right)^2+\left(\frac{ca}{b}\right)^2+2\left(a^2+b^2+c^2\right)-2}{3}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{ab}{c}\right)^2+\left(\frac{bc}{a}\right)^2+\left(\frac{ca}{b}\right)^2}{3}}$$

$$\geq \frac{\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}}{3} = \frac{S}{3},$$

Diese Ungleichung lösen wir nach S auf. Beide Seiten sind positiv, also ist Quadrieren beider Seiten eine Äquivalenzumformung, man erhält so (S ist sicher positiv):

$$3 \cdot (S^2 - 2) \geq S^2 \iff S^2 \geq 3 \iff S \geq \sqrt{3},$$

wobei Gleichheit genau dann auftritt, wenn $\frac{ab}{c}=\frac{bc}{a}=\frac{ca}{b}$. Dies ist äquivalent zu $a = b = c$, denn aus $\frac{ab}{c}=\frac{bc}{a}$ folgt $a^2b = bc^2$, wegen $a,b,c > 0$ also $a = c$; und analog folgt $b = a$ aus $\frac{bc}{a}=\frac{ca}{b}$. Weil die Bedingungen $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ und $a = b = c$ gleichzeitig erfüllbar sind, wird der Wert $\sqrt{3}$ auch tatsächlich angenommen, nämlich für den Wert $a = b = c = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. Beweis: Für alle positiven Zahlen x und y ist stets $(x-y)^2 \geq 0$, also $x^2 + y^2 \geq 2xy$, also $\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2$, wobei Gleichheit genau dann eintritt, wenn $x = y$. Es ist also $\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{b^2} = 2+\alpha$, $\frac{c^2}{a^2}+\frac{a^2}{c^2} = 2+\beta$ und $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2} = 2+\gamma$ für geeignete $\alpha,\beta,\gamma \geq 0$. Der Wert 2 wird also genau dann angenommen, wenn $\alpha = 0$ bzw. $\beta = 0$ bzw. $\gamma = 0$; dies ist jeweils äquivalent zu $b = c$ bzw. $c = a$ bzw. $a = b$. Dies benützen wir für folgende Kette von Äquivalenzen (die erste gilt, weil sicher $S > 0$)

$$\begin{aligned}
S \geq \sqrt{3} \quad &\iff \quad S^2 \geq 3 \\
&\iff \left(\frac{ab}{c}\right)^2+\left(\frac{bc}{a}\right)^2+\left(\frac{ca}{b}\right)^2+2\left(\frac{abbc}{ca}+\frac{bcca}{ab}+\frac{caab}{bc}\right) \geq 3 \\
&\iff \frac{a^2b^2}{c^2}+\frac{b^2c^2}{a^2}+\frac{c^2a^2}{b^2}+2\Big(\underbrace{b^2+c^2+a^2}_{=1}\Big) \geq 3 \\
&\iff \left(\frac{a^2b^2}{c^2}+\frac{b^2c^2}{a^2}+\frac{c^2a^2}{b^2}\right)\cdot 2 \geq 1 \cdot 2 \\
&\iff a^2\Bigg(\underbrace{\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{b^2}}_{=2+\alpha}\Bigg)+b^2\Bigg(\underbrace{\frac{c^2}{a^2}+\frac{a^2}{c^2}}_{=2+\beta}\Bigg)+c^2\Bigg(\underbrace{\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}}_{=2+\gamma}\Bigg) \geq 2 \\
&\iff a^2(2+\alpha)+b^2(2+\beta)+c^2(2+\gamma) \geq 2 \\
&\iff 2(a^2+b^2+c^2) + a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma \geq 2 \\
&\iff a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma \geq 0
\end{aligned}$$

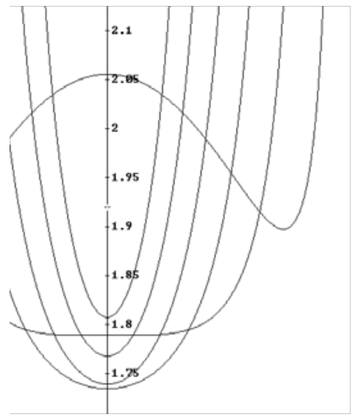
Die letzte Ungleichung ist stets erfüllt, weil $\alpha,\beta,\gamma \geq 0$; wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn $\alpha = \beta = \gamma = 0$, dies ist gleichbedeutend mit $a = b = c$.

Für den 4. Beweis zunächst etwas Heuristik: Wir vermuten, dass der Ausdruck S seinen kleinsten Wert für $a = b = c$ annimmt. Deswegen betrachten wir das arithmetische Mittel x aus a^2 und b^2 sowie die Abweichung t von diesem Mittel, und versuchen zu zeigen, dass S bei festem Mittelwert x (dann ist auch c konstant!) stets dann am kleinsten ist, wenn $t = 0$ ist; und anschließend, dass dieser Wert von S bei festem $t = 0$ am kleinsten wird für $x = {}^1/_3$. Diese Vermutung wird sich als teilweise falsch herausstellen (vgl. Figur), der Ansatz führt aber dennoch zum Erfolg.

4. Beweis (Differentialrechnung): Sei $x := \dfrac{a^2+b^2}{2}$ und $t := \dfrac{b^2-a^2}{2}$. Dann ist $a^2 = x - t$, $b^2 = x + t$, $c^2 = 1 - (a^2 + b^2) = 1 - 2x$, $a^2b^2 = x^2 - t^2$, und da $a^2,b^2,c^2 > 0$, folgt $0 < x < 0{,}5$, $x > |\,t\,|$ und $|\,t\,| < 0{,}5$. Somit gilt

$$S(a,b,c) = \frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{abc} = \frac{a^2b^2+\left(b^2+a^2\right)c^2}{abc}$$

$$= \frac{x^2-t^2+2x(1-2x)}{\sqrt{x^2-t^2}\cdot\sqrt{1-2x}} =: T(x,t).$$



Der Term $T(x,t)$ ist für alle relevanten Werte x und t definiert, Zähler und Nenner sind stets positiv.

Den Wert des Terms $T(x,t)$ betrachten wir zunächst als Funktion mit der Variablen t und dem Parameter x und untersuchen, für welchen Wert von t er bei fest gewähltem x den kleinsten Wert annimmt.

Vgl. Figur: Sie zeigt die Graphen von $t \to T(x,t)$ für die Parameter x = 0,45, 0,40, 0,35, 0,30, 0,25, 0,20 (in dieser Reihenfolge von rechts am oberen Bildrand). Vergleicht man die kleinsten Werte der einzelnen Kurven, stellt man fest, dass das kleinste Minimum für $x \approx 0.35 \approx {}^1/_3$ angenommen wird. Das Bild legt nahe, dass für $x < {}^1/_3$ das Minimum für $t = 0$ angenommen wird, aber dass für $x > {}^1/_3$ zwei Minima für $t \neq 0$ angenommen werden. Dann sind aber diese Minima größer als das kleinste Minimum für $(x,t) \approx (> {}^1/_3;0)$.

Hierzu verwenden wir schulübliche Differentialrechnung der Oberstufe. Stetigkeit und Differenzierbarkeit ist gegeben, die Definitionsbereiche sind offene zusammenhängende Intervalle, also können wir Minima über die Ableitung nach t bestimmen:

$$\frac{dT(x,t)}{dt} = \frac{-2t\sqrt{\left(x^2-t^2\right)}\sqrt{(1-2x)} - \dfrac{-2t}{2\sqrt{\left(x^2-t^2\right)}}\sqrt{(1-2x)}\left(x^2-t^2+2x(1-2x)\right)}{\left(x^2-t^2\right)(1-2x)}$$

$$= \frac{-2t\left(x^2-t^2\right) + t\left(x^2-t^2+2x(1-2x)\right)}{\sqrt{\left(x^2-t^2\right)}^3\sqrt{(1-2x)}} = \frac{-t\left(x^2-t^2-2x(1-2x)\right)}{\left(\sqrt{x^2-t^2}\right)^3\cdot\sqrt{1-2x}}$$

$$= \frac{-t\left(x(5x-2)-t^2\right)}{\left(\sqrt{x^2-t^2}\right)^3\cdot\sqrt{1-2x}} = 0 \;\Leftrightarrow\; t = 0 \text{ oder } t = \pm\sqrt{x(5x-2)}.$$

Wir betrachten zwei Fälle:

Fall 1: $x \le 0{,}4$: Dann ist $5x - 2 \le 0$, und da $x > 0$, ist $x(5x-2) - t^2 \le 0$, wobei Gleichheit nur für $(x;t) = (0{,}4\,;\,0)$ gilt, d.h. $t = 0$ ist die einzige Nullstelle. Ferner ist $sgn\left(\dfrac{dT(x,t)}{dt}\right) = sgn(t)$, also liegt für $t = 0$ ein Minimum vor (vgl. Figur). Dieses hat den Wert

$$T(x,0) = \frac{x^2+2x(1-2x)}{x\cdot\sqrt{1-2x}} = \frac{2-3x}{\sqrt{1-2x}},$$

und aufgrund des festgestellten Monotonieverhaltens ($T(x,t)$ nimmt zu, wenn t gegen die Ränder des Definitionsbereiches geht) ist es auch ein globales Minimum.

Um den kleinsten Wert dieses Ausdrucks bei Variation des Parameters x zu bestimmen, benützen wir wieder Differentialrechnung:

$$\frac{dT(x,0)}{dx} = \frac{-3\sqrt{1-2x}-(2-3x)\frac{-2}{2\sqrt{1-2x}}}{1-2x} = \frac{-3(1-2x)+(2-3x)\cdot 1}{\sqrt{1-2x}^3} = \frac{3x-1}{\sqrt{1-2x}^3},$$

also $\frac{dT(x,0)}{dx} = 0 \Leftrightarrow x = {}^1/_3$, ferner ist $\frac{dT(x,0)}{dx} > 0$ für $x > {}^1/_3$ und $\frac{dT(x,0)}{dx} < 0$ für $x < {}^1/_3$, für diesen Wert ist die Bedingung der Fallunterscheidung $0 < x \le 0{,}4$ erfüllt, es liegt also für $x = {}^1/_3$ ein globales Minimum für den Bereich $0 < x \le 0{,}4$ vor, dieses hat den Wert $T({}^1/_3,0) = \frac{2-3\cdot\frac{1}{3}}{\sqrt{1-2\cdot\frac{1}{3}}} = \sqrt{3}$.

Fall 2: Nicht Fall 1. Da $0 < x < 0{,}5$, genügt es, nur noch den Fall $0{,}4 < x < 0{,}5$ zu untersuchen (vgl. Figur). Wie oben bemerkt, gilt

$$\frac{dT(x,t)}{dt} = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ oder } t = \pm\sqrt{x(5x-2)}.$$

Sei $t_{min} = \sqrt{x(5x-2)}$ die positive Nullstelle obigen Ausdrucks. Wie oben bemerkt, gilt $|t| < x$ für alle t,x. Ferner ist $\frac{dT(x,t)}{dt} < 0$ für $0 < t < t_{min}$ und $\frac{dT(x,t)}{dt} > 0$ für $t > t_{min}$; es liegt also für t_{min} ein lokales Minimum vor (vgl. Figur). Aus Symmetriegründen muss für $-t_{min}$ ebenfalls lokal ein Minimum vorliegen; diese beiden Minima sind gleich und wegen des festgestellten Monotonieverhaltens globale Minima im Bereich $0{,}4 < x < 0{,}5$. (Übrigens liegt im Fall 2 für $t = 0$ ein lokales Maximum vor.) Es gilt:

$$T(x,t_{min}) = T(x,-t_{min}) = \frac{x^2 - t_{min}{}^2 + 2x(1-2x)}{\sqrt{x^2-t_{min}{}^2}\cdot\sqrt{1-2x}} = \frac{x^2-(5x^2-2x)+2x(1-2x)}{\sqrt{x^2-(5x^2-2x)}\cdot\sqrt{1-2x}}$$

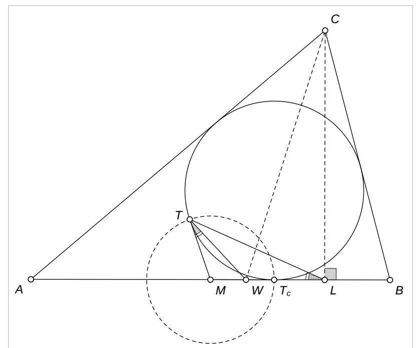
$$= \frac{-8x^2+4x}{\sqrt{2x-4x^2}\cdot\sqrt{1-2x}} = \frac{2\cdot 2x(1-2x)}{\sqrt{2x}\cdot\sqrt{1-2x}\cdot\sqrt{1-2x}} = 2\sqrt{2x} \ge \sqrt{8\cdot 0{,}4} > \sqrt{3}$$

Die globalen Minima im Fall 2 sind also größer als das globale Minimum im Fall 1.

Damit ist $T(x,t) = S(a,b,c) \ge \sqrt{3}$, wobei Gleichheit für $t = 0$ und $x = {}^1/_3$ gilt, also für $a = b = c = {}^1/_3\sqrt{3}$ auftritt.

Aufgabe 3: Gegeben sei das Dreieck ABC mit $\overline{AC} > \overline{BC}$ und Inkreis k. Weiter seien M, W und L die Punkte auf der Geraden AB, die die Seitenhalbierende bzw. Winkelhalbierende bzw. Höhe von C mit der Geraden AB gemeinsam haben. Diejenige Tangente an k durch M, die verschieden von AB ist, berühre k in T.

Beweise, dass die Winkel $\angle MTW$ und $\angle TLM$ gleich groß sind.



1. Beweis: Die Dreiecke MTW und MLT haben bei M einen gemeinsamen Winkel. Damit sind die Winkel $\angle MTW$ und $\angle TLM$ genau dann gleich groß, wenn diese beiden Dreiecke (mit entsprechendem Drehsinn) ähnlich sind, was wiederum genau dann der Fall ist, wenn $\overline{MW} : \overline{TM} = \overline{TM} : \overline{ML}$.

Mit T_c sei der Berührpunkt der Seite AB an den Inkreis bezeichnet. Dann sind die Strecken MT und MT_c die beiden Tangentenabschnitte vom Punkt M an den Inkreis, also gilt $\overline{TM} = \overline{T_cM}$; es genügt also zu zeigen, dass $\overline{MW} : \overline{MT_c} = \overline{MT_c} : \overline{ML}$.

Die Längen dieser drei Strecken können wir in Abhängigkeit von a, b und c ausdrücken und dann die Gleichheit leicht (wenn auch mit lästiger Rechnerei) verifizieren. Dabei berücksichtigen wir noch, dass aus $b > a$ folgt, dass die Punkte A, M, W, T_c und L in dieser Reihenfolge auf der Halbgeraden $[AB$ liegen.

Bekanntlich haben die Tangentenabschnitte von der Ecke A an den Inkreis die Länge $\frac{1}{2}(b + c - a)$, damit ist

$$\overline{MT_c} = \overline{AT_c} - \overline{AM} = \frac{b+c-a}{2} - \frac{c}{2} = \frac{b-a}{2}.$$

Bekanntlich teilt die Winkelhalbierende die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten, also ist $\overline{AW} = c \cdot \frac{b}{a+b}$, also ist

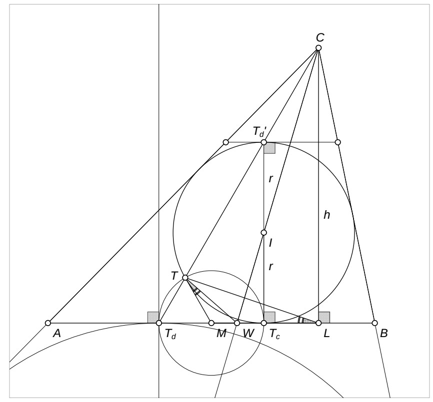
$$\overline{MW} = \overline{AW} - \overline{AM} = c \cdot \frac{b}{a+b} - \frac{c}{2} = c \cdot \frac{2b-(a+b)}{2(a+b)} = c \cdot \frac{b-a}{2(a+b)}.$$

Schließlich ist $\overline{AL} = b \cdot \cos(\alpha)$, nach Kosinus–Satz gilt

$$\overline{ML} = \overline{AL} - \overline{AM} = b \cdot \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} - \frac{c}{2} = \frac{b^2-a^2}{2c} = \frac{(b+a)(b-a)}{2c}.$$

Einfache Rechnung beendet den Beweis:

$$\overline{MW} : \overline{MT_c} = c \cdot \frac{b-a}{2(a+b)} : \frac{b-a}{2} = \frac{c}{a+b} = \frac{b-a}{2} : \frac{(b+a)(b-a)}{2c} = \overline{MT_c} : \overline{ML}.$$



2. Beweis: Mit T_c sei der Berührpunkt der Seite AB an den Inkreis bezeichnet, sein Spiegelbild bei Punktspiegelung an M sei T_d. Da die Strecken MT und MT_c die Tangentenabschnitte an den Inkreis vom Punkt M sind, gilt $\overline{MT_c} = \overline{MT_d} = \overline{MT}$. Weil $b > a$, liegen die Punkte A, T_d, M, W, T_c und L in dieser Reihenfolge auf dem Strahl $[AB$.

Es genügt nun zu zeigen, dass $\overline{MW} \cdot \overline{ML} = \overline{MT_c}^2$, denn hieraus folgt $\overline{MW} : \overline{MT} = \overline{MT} : \overline{ML}$; und hieraus, dass in den Dreiecken MTW und MLT die an M anliegenden Seiten im gleichen Verhältnis stehen, und da auch die eingeschlossenen Winkel bei M in beiden Dreiecken gleich sind, sind diese Dreiecke ähnlich, d.h. es gilt insbesondere $\angle MTW = \angle TLM$.

Bekanntlich liegen die Punkte, in denen eine Dreieckseite den Ankreis und den Inkreis berührt, symmetrisch bzgl. des Mittelpunktes dieser Seite. Also ist T_d der Berührpunkt des Ankreises an die Seite AB. Ferner enthält der Strahl $[CW$ die Mittelpunkte von Inkreis und Ankreis an die Seite AB, und da die Strahlen $[CA$ und $[CB$ gemeinsame Tangenten an diese beiden Kreise sind, gibt es eine zentrische Streckung mit Zentrum C, die diesen Ankreis in den Inkreis des Dreiecks ABC überführt, dabei ist das Bild des Berührpunktes T_d der Berührpunkt des Inkreises mit derjenigen Tangente, die parallel zu AB und verschieden von ihr ist, und dieser Punkt ist der Endpunkt des Durchmessers von T_c.

Nun ist $CL \parallel T_cI \parallel T_cT_d'$, also können wir (unter Berücksichtigung der Lagebeziehungen) mit Strahlensatz mit Zentrum W bzw. T_d zwei Verhältnisgleichungen herleiten:

$$\frac{h_c}{r} = \frac{\overline{WL}}{\overline{WT_c}} = \frac{\overline{ML}-\overline{MW}}{\overline{MT_c}-\overline{MW}} \quad \text{und} \quad \frac{h_c}{2r} = \frac{\overline{T_dL}}{\overline{T_dT_c}} = \frac{\overline{T_dM}+\overline{ML}}{2\overline{MT_c}}, \quad \Rightarrow \frac{\overline{ML}-\overline{MW}}{\overline{MT_c}-\overline{MW}} = \frac{\overline{MT_c}+\overline{ML}}{\overline{MT_c}}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{ML}\cdot\overline{MT_c} - \overline{MW}\cdot\overline{MT_c} = \overline{MT_c}^2 + \overline{ML}\cdot\overline{MT_c} - \overline{MW}\cdot\overline{MT_c} - \overline{MW}\cdot\overline{ML}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{MW}\cdot\overline{ML} = \overline{MT_c}^2$$, das war zu zeigen.

Für einen 3. Beweis benützen wir die Eigenschaften der *harmonischen Teilung einer Strecke* und setzen folgende Definitionen und Hilfssätze als bekannt voraus (Details sind in den Fachbüchern und im Internet leicht zu finden):

Definition und Satz: Zu jeder Strecke XY und jedem Teilverhältnis $\lambda \neq 1$ gibt es auf der Geraden XY zwei Punkte T und T', für die $\overline{XT} : \overline{TY} = \overline{XT'} : \overline{T'Y}$; dabei liegt einer der beiden Punkte T und T' im Innern der Strecke XY (innerer Teilpunkt, meistens mit T bezeichnet), der andere außerhalb (äußerer Teilpunkt, meistens T'). Für eine solche Konfiguration der vier Punkte X, Y, T, T' sagen wir: Die Strecke XY wird von T und T' *harmonisch im Teilverhältnis* λ *geteilt*; oder auch: *die Punktepaare* (X,Y) *und* (T,T') *liegen harmonisch*.

HS 1: Die Strecke XY werde von T und T' harmonisch geteilt und M sei der Mittelpunkt der Strecke TT'. Dann gilt $\overline{MX} : \overline{MT} = \overline{MT} : \overline{MY}$.

HS 2: In jedem Dreieck teilen die Innen– und Außenwinkelhalbierenden von einer Ecke die gegenüberliegende Seite harmonisch.

Für den Beweis von (1) genügt es also zu zeigen, dass die Strecke WL von T und T' harmonisch geteilt wird. Wenn wir dazu HS 1 und HS 2 als bekannt voraussetzen, wird es sehr kurz:

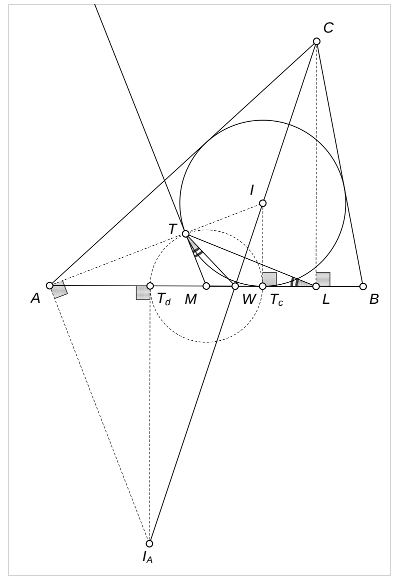
3. Beweis: Die Vorüberlegungen übernehmen wir aus dem 2. Beweis. Es genügt also nachzuweisen, dass

$$\overline{MW} : \overline{MT} = \overline{MT} : \overline{ML},$$

hierfür genügt nach HS 1 nachzuweisen, dass WL von T_c und T_d harmonisch geteilt wird.

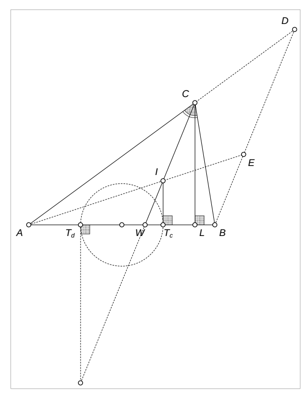
Inkreismittelpunkt I und Ankreismittelpunkt I_A sind die Schnittpunkte der Innen– und Außenwinkelhalbierenden von $\angle WAC$. Also teilen nach HS 2 –bezogen auf das Dreieck AWC – die Punkte I und I_A die Strecke WC harmonisch.

Nach Strahlensatz mit Zentrum W gilt dies dann auch für die senkrechten Projektionen dieser vier Punkte auf die Gerade AB, d.h. für die Punktepaare (W,L) und (T_c,T_d); das war zu zeigen.



Bemerkung: Es gilt sogar $\overline{ML} : \overline{MT_c} = \overline{MT_c} : \overline{MW} = \overline{T_cL} : \overline{WT_c} = \dfrac{a+b}{c}$; es folgt

- der Kreis um M durch T_c ist der Apollonius–Kreis zur Strecke WL und Teilpunkt T_c,
- TT_c die Winkelhalbierende von $\angle WTL$.



Für den Nachweis kann man auch nebenstehende Figur zum Beweis verwenden: Die Parallele zur Winkelhalbierenden w_γ durch B schneide AC in D, die Winkelhalbierende w_α schneide BD in E. Dann ist $\angle CDB = \angle ACW = \angle WCB = \angle DBC$, also das Dreieck BCD gleichschenklig mit Basis BD, also $\overline{BC} = \overline{DC}$. Weiter ist w_α auch im Dreieck ABD Winkelhalbierende, also gilt

$$\overline{T_cL} : \overline{WT_c} = \overline{IC} : \overline{WI} = \overline{ED} : \overline{BE} = \overline{T_cL} : \overline{WT_c} = \frac{a+b}{c}.$$

Alternativ können wir dies mit Flächenbetrachtungen zeigen:

$$2 \cdot |ABC| = (a+b+c) \cdot r = c \cdot h_c \Rightarrow \left(\overline{WT_c} + \overline{T_cL}\right) : \overline{WT_c} = h_c : r = \frac{a+b+c}{c} \Rightarrow \overline{T_cL} : \overline{WT_c} = \frac{a+b}{c}.$$

Aufgabe 4:

Beweise: Für keine ganze Zahl $k \geq 2$ liegen zwischen $10k$ und $10k + 100$ mehr als 23 Primzahlen.

1. Beweis: Sei S die Menge der ganzen Zahlen, die durch keine der Zahlen 2, 3, 5, 7 teilbar sind. Da $k \geq 2$ vorausgesetzt wird, sind alle Primzahlen in den Intervallen $[10k;10k + 100]$ größer als 20 und damit in S enthalten. Damit können wir in jedem dieser Intervalle (oder Teilen davon) die Anzahl der darin enthaltenen Primzahlen durch die Anzahl der darin enthaltenen Zahlen aus S nach oben abschätzen.

Sei S_k ($k \geq 0$) die Menge der Zahlen aus S im 10er–Intervall $[10k;10k + 10]$ und Σ_k die Anzahl der Zahlen aus S zwischen $10k$ und $10k + 100$. Es gilt $\Sigma_k = |S_k| + |S_{k+1}| + ... + |S_{k+9}|$, weil kein Vielfaches von 10 eine Zahl in S ist und somit in Σ_k keine Zahl aus S doppelt gezählt wird. Es genügt nun, für jedes $k \geq 2$ entweder nachzuweisen, dass $\Sigma_k \leq 23$, oder nachzuweisen, dass unter den Zahlen aus S in diesem Intervall $(\Sigma_k - 23)$ Zahlen durch 11 oder 13 teilbar, also keine Primzahlen sind. (Da $k \geq 2$, sind die betrachteten Zahlen sicher größer als 20, also von 11 bzw. 13 verschieden.)

Um die $|S_k|$ und Σ_k mit wenig Aufwand zu bestimmen, bestätigen wir zunächst durch Kopfrechnen, dass es im Intervall $[0;110]$ genau 26 Zahlen aus S gibt, nämlich die Zahl 1 und alle Primzahlen außer 2, 3, 5, und 7:

1, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109;

hieraus lesen wir die Werte der $|S_k|$ für $0 \leq k \leq 10$ ab, vgl. Tabelle unten.

Weiter überlegen wir, dass die Zahl $r \cdot 105 - n$ ($r,n \in$ □) genau dann in S enthalten ist, wenn die Zahl $r \cdot 105 + n$ in S enthalten ist. Es ist nämlich $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, also $r \cdot 105 \pm n$ genau dann durch die Primzahlen 3 und 5 und 7 teilbar, wenn auch n durch diese Zahlen teilbar ist; und $r \cdot 105 \pm n$ ist genau dann durch die Primzahl 2 teilbar, wenn n dies nicht ist. Es gilt also $|S_{10-k}| = |S_{10+k}|$ für $0 \leq k \leq 10$, womit wir die Werte der $|S_k|$ auch für $11 \leq k \leq 20$ bestimmt haben (vgl. Tabelle unten).

Schließlich überlegen wir, dass sich alle Aussagen über Teilbarkeit einer Zahl durch die Zahlen 2, 3, 5 und 7 periodisch mit der Periode $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$ wiederholen, d.h. es gilt $n \in S \Leftrightarrow r \cdot 210 + n \in S$ für alle $r,n \in$ □ und somit $|S_k| = |S_{k+21}|$ für alle $k \geq 0$, also auch $\Sigma_k = \Sigma_{k+21}$. Also sind alle Zahlen aus S im Intervall $]10k ; 10k + 100[$ darstellbar in der Form $r \cdot 210 + s$, wobei r fest ist und $s \in S$, $0 < s < 300$. Es genügt also, die Σ_k für $0 \leq k \leq 20$ zu bestimmen.

Unsere Überlegungen fassen wir in folgender Tabelle zusammen (zur Berechnung der Σ_k mit $k \geq 12$ ergänze man die Zeile der $|S_k|$ nach rechts durch die ersten 10 Werte):

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\lvert S_k \rvert$	1	4	2	2	3	2	2	3	2	1	4	1	2	3	2	2	3	2	2	4	1
Σ_k	22	**25**	22	22	23	22	22	23	22	22	**25**	22	22	**24**	23	23	**24**	23	23	**24**	22

Damit ist die Aussage für 16 der betrachteten Werte für k bewiesen; es genügt noch nachzuweisen, dass in den Intervallen $[10k;10k + 100]$ mit $k = 13$, $k = 16$ und $k = 19$ wenigstens eine der Zahlen aus S durch eine Primzahl p mit $7 < p < 20$ teilbar ist, und dass für $k = 1$ und $k = 10$ dies für wenigstens zwei Zahlen aus S zutrifft.

* Fall 1.1, 1.2: $k = 13$, $k = 16$: Die Zahlen aus S im Intervall $]10k ; 10k + 100[$ sind genau die Zahlen der Form $r \cdot 210 + s$ mit einem geeigneten festen r, und $s \in S$ und $130 \leq s \leq 230$ bzw. $160 \leq s \leq 260$. Aus diesen Werten s wählen wir die 11 Zahlen 173, 181, 191, 193, 197, 199, 209, 211, 223, 227 und 229 aus. (vgl. Tabelle unten). Unter diesen Zahlen kommt jeder Rest *mod* 11 vor, dies können wir mit einfachem Kopfrechnen nachweisen, z.B. indem wir zeigen, dass keine zwei Zahlen – diese sind übrigens alle ungerade – eine Differenz haben, die ein gradzahliges Vielfaches von 11 ist. Dann kommt auch unter den Zahlen $r \cdot 210 + s$ jeder mögliche Rest *mod* 11 vor, insbesondere der Rest 0.

Die gewählten Zahlen liegen sowohl im Bereich $130 \leq s \leq 230$ als auch im Bereich $160 \leq s \leq 260$, also gibt es mindestens eine Zahl, die durch 11 teilbar ist, also keine Primzahl.

* Fall 1.3: $k = 19$: Auch für die Zahlen $190 < s < 290$ finden wir entsprechende Zahlen, hierzu ersetzen wir aus der vorigen Auswahl die Zahlen 173 und 181 durch 239 und 247.

Folgende Tabelle zeigt diese 11 Zahlen in der Übersicht:

s		131	137	139	143	149	151	157	163	167	169	173	179	181	187	191	193	197	199	209	211	221	223	227	229	233	239	241	247
mod	11	10	5	7	0	6	8	3	9	2	4	8	3	5	0	4	6	10	1	0	2	1	3	7	9	2	8	10	5

* Fall 2.1: $k = 1$: Die Zahlen aus S im Intervall $]10k\,;10k + 100[$ sind genau die Zahlen der Form $r \cdot 210 + s$ mit einem geeigneten festen r, und $s \in S$ und $10 < s < 110$. Aus diesen 25 Werte s wählen wir 24 Zahlen aus, von denen 11 die $T_{11} := \{11, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 71, 79, 83\}$ bilden und 13 davon verschiedene Zahlen, die die Teilmenge $T_{13} := \{13, 17, 19, 53, 59, 61, 67, 73, 89, 101, 103, 107, 109\}$ bilden (vgl. Tabelle unten, die Reste sind jeweils gelb eingefärbt).

Wie oben zeigen wir, dass in der Teilmenge T_{11} jeder mögliche Rest *mod* 11 vorkommt und in der Teilmenge T_{13} jeder mögliche Rest *mod* 13. Dann kommt auch unter den Zahlen $r \cdot 210 + s$ jeder mögliche Rest *mod* 11 bzw. *mod* 13 vor, insbesondere die Reste 0, und die beiden zugehörigen Zahlen sind auch verschieden.

Folgende Tabelle zeigt diese 11 bzw. 13 Zahlen für den Fall $k = 1$:

s		11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101	103	107	109
mod	11	**0**	2	6	8	**1**	**7**	**9**	**4**	**8**	**10**	**3**	9	4	6	1	**5**	7	**2**	**6**	1	9	2	4	8	10
mod	13	11	**0**	**4**	**6**	10	3	5	11	2	4	8	**1**	**7**	**9**	**2**	6	**8**	1	5	**11**	6	**10**	**12**	**3**	**5**

* Fall 2.2: $k = 10$: Die Zahlen aus S im Intervall $]10k\,;10k + 100[$ sind genau die Zahlen der Form $r \cdot 210 + s$ mit einem geeigneten festen r, und $s \in S$ und $100 < s < 200$. Dies können wir aber auch ausdrücken in der Form $(r+1) \cdot 210 - s$, $10 < s < 100$. Wie im obigen Abschnitt bewiesen gibt es unter diesen Werten von s zwei, die zu zwei verschiedenen durch 11 bzw. 13 teilbaren Zahlen gehören.

2. Beweis (Variation des 1. Beweises): Mit T–Zahlen bezeichnen wir die ganzen Zahlen, die durch keine der Zahlen 2, 3, 5 teilbar sind. Da $k \geq 2$ vorausgesetzt wird, sind alle Primzahlen in den Intervallen $[10k;10k + 100]$ größer als 20 und damit T–Zahlen. Damit können wir in jedem dieser Intervalle (oder Teilen davon) die Anzahl der darin enthaltenen Primzahlen durch die Anzahl der darin enthaltenen T–Zahlen nach oben abschätzen.

Hierzu definieren wir T_k ($k \geq 0$) als die Menge der T–Zahlen im 10er–Intervall $[10k;10k + 10]$. In der Summe $\Lambda_k := |T_k| + |T_{k+1}| + \ldots + |T_{k+9}|$ wird keine T–Zahl doppelt gezählt, da kein Vielfaches von 10 eine T–Zahl ist. Also bezeichnet Λ_k die Anzahl der T–Zahlen zwischen $10k$ und $10k + 100$. Es genügt nun, für jedes $k \geq 2$ nachzuweisen, dass von diesen T–Zahlen $\Lambda_k - 23$ Zahlen durch eine der Primzahlen 7, 11 oder 13 teilbar und somit – da größer als 20 – keine Primzahlen sind.

Um die T–Zahlen und damit die $|T_k|$ mit wenig Aufwand zu bestimmen, überlegen wir zunächst, dass sich alle Aussagen über Teilbarkeit einer Zahl durch eine der Zahlen 2, 3 und 5 periodisch mit der Periode $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ wiederholen, d.h. es gilt $n \in T \Leftrightarrow (r \cdot 30 + n) \in T$ für alle $r,n \in \mathbb{Z}$. Es gilt also $|T_k| = |T_{k+3}|$ für alle $k \geq 0$ und es genügt, die Λ_k für die Restklassen von k *mod* 3 zu bestimmen

Wie man leicht nachrechnet gibt es im Intervall $[0;30]$ genau acht T–Zahlen, nämlich 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29; dies sind genau die Zahl 1 und alle Primzahlen im Intervall $[0;30]$ mit Ausnahme von 2, 3 und 5. So kann man in folgender Tabelle die Werte der $|T_k|$ und hieraus die der Λ_k leicht durch Kopfrechnen bestätigen:

k *mod* 3	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
$\lvert T_k \rvert$	2	4	2	2	4	2	2	4	2	2	4	2
Λ_k	**26**	**28**	**26**									

Für $k \equiv 0$ *mod* 3 und $k \equiv 2$ *mod* 3 genügt es also nachzuweisen, dass drei der T–Zahlen durch eine der Primzahlen 7, 11 oder 13 teilbar sind, für $k \equiv 1$ *mod* 3 genügt es, dies für fünf T–Zahlen nachzuweisen.

* Fall 1: $k \equiv 0 \; mod \; 3$: Das Intervall $]10k; 10k + 100[$ enthält drei disjunkte Teilintervalle der Form $]10k^*; 10k^* + 30[$ mit $k^* = k + i$, $i \in \{0, 3, 6\}$, und die drei Werte $10k^*$ sind alle durch 30 teilbar. Wir betrachten $V_7 := \{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$, dies sind sieben T–Zahlen, bei denen jeder mögliche Rest mod 7 vorkommt. Also sind die Zahlen der Form $10k^* + t$ mit $i \in \{0, 3, 6\}$ und $t \in V_7$ genau diejenigen T–Zahlen, die in den drei Teilintervallen vorkommen und für jedes i kommt jeder mögliche Rest mod 7 vor, also auch der Rest 0 vor, d.h. für jedes der drei i gibt es eine durch 7 teilbare T–Zahl.

* Fall 2: $k \equiv 2 \; mod \; 3$: Hier weisen wir ebenfalls drei durch sieben teilbare Zahlen nach; hierzu argumentieren wir analog mit dem Intervall $]10k + 10 ; 10k + 100[$, das drei disjunkte Teilintervalle $]10k^*; 10k^* + 30[$ mit $k^* = k + i$, $i \in \{1, 4, 7\}$ enthält.

* Fall 3: $k \equiv 1 \; mod \; 3$: Hier weisen wir fünf T–Zahlen nach. Es ist $10k + 50 \equiv 0 \; mod \; 30$, d.h. $(10k + 50) \notin T$, somit gilt $(10k + 50 \pm w) \in T \Leftrightarrow w \in T$, d.h. die T–Zahlen im Intervall $[10k ; 10k + 100]$ sind genau die Zahlen der Form $10k + 50 \pm w$ mit $0 \le |w| \le 50$, und von diesen sind keine zwei gleich.

In der folgenden Tabelle sind in der ersten Zeile alle T – Zahlen w mit $0 \le |w| \le 50$ aufgeführt, in den folgenden Zeilen ihre Reste mod 7, mod 11 bzw. mod 13. Die Richtigkeit der rechten Hälfte bestätigt man schnell durch Kopfrechnen, die Richtigkeit der linken Hälfte folgt schnell aus $-w + w \equiv 0$ in allen Restklassen:

W		-49	-47	-43	-41	-37	-31	-29	-23	-19	-17	-13	-11	-7	-1	1	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	49
Mod	7	0	2	6	1	5	4	6	5	2	4	1	3	0	6	1	0	4	6	3	5	2	1	3	2	6	1	5	0
mod	11	6	8	1	3	7	2	4	10	3	5	9	0	4	10	1	7	0	2	6	8	1	7	9	4	8	10	3	5
mod	13	3	5	9	11	2	8	10	3	7	9	0	2	6	12	1	7	11	0	4	6	10	3	5	11	2	4	8	10

Wir definieren zwei disjunkte Teilmengen der Zahlen aus der ersten Zeile, in denen jeder Rest mod 11 bzw. mod 13 vorkommt (vgl. Tabelle):

$W_{11} = \{-49, -41, -11, -7, 7, 13, 23, 31, 41, 43, 49\}$ (in der Tabelle 3. Zeile, gelb) und

$W_{13} := \{-47, -43, -37, -29, -19, -13, -1, 1, 17, 19, 29, 37, 47\}$ (in der Tabelle 4. Zeile, braun).

Unter den 11 Zahlen $10k + 50 + w$ mit $w \in W_{11}$ gibt es also genau eine Zahl, die durch 11 teilbar ist, und unter den 13 Zahlen $10k + 50 + w$ mit $w \in W_{13}$ genau eine, die durch 13 teilbar ist; diese beiden Zahlen sind verschieden, weil $W_{11} \cap W_{13} = \varnothing$ (ersichtlich aus der Tabelle, weil es in keiner Spalte sowohl gelbe als auch braun markierte Zahlen gibt).

Abhängig vom Rest mod 7, den die Zahl $10k + 50$ aufweist, bestimmen wir jeweils fünf T–Zahlen im Intervall $](10k + 50) - 50 ; (10k + 50) + 50[$, die durch 7, 11 oder 13 teilbar sind:

* Fall 2.1: $10k + 50 \equiv 0 \; mod \; 7$: Dann haben vier Zahlen den Rest 0 mod 7, nämlich $10k + 50 + w$ mit $w \in \{7, 49, -7, -49\}$, keine dieser Zahlen w ist in W_{13}, also gibt es eine weitere Zahl, die durch 13 teilbar ist.

* Fall 2.2: $10k + 50 \equiv 1 \; mod \; 7$: Dann haben fünf Zahlen den Rest 0 mod 7, nämlich $10k + 50 + w$ mit $w \in \{13, 41, -1, -29, -43\}$.

* Fall 2.3: $10k + 50 \equiv 2 \; mod \; 7$: Dann haben vier Zahlen Rest 0 mod 7, nämlich $10k + 50 + w$ mit $w \in \{19, 47, -23, -37\}$, keine dieser Zahlen ist in W_{11}, also gibt es eine weitere Zahl, die durch 11 teilbar ist.

* Fall 2.4: $10k + 50 \equiv 3 \; mod \; 7$: Dann haben die drei Zahlen $10k + 50 + w$ mit $w \in \{11, -17, -31\}$ den Rest 0 mod 7. Keine dieser Zahlen ist in W_{11} und auch nicht in W_{13}, also gibt es noch zwei weitere Zahlen, die durch 11 bzw. 13 teilbar sind.

* Fall 2.5 $10k + 50 \equiv 4, 5, 6 \; mod \; 7$: Wir übernehmen die Argumentation der Fälle 2.2 – 2.4, ersetzen aber jeweils w durch $-w$.

Bemerkung: Der Nachweis kann auch durch ein einfaches, aber langwieriges Sieb-Verfahren geführt werden:

> Überprüfe jedes Intervall $[10k;100k]$ auf Zahlen, die durch keine der Zahlen 2, 3, 5, 7, 11 und 13 teilbar sind, es genügt, dabei $10k$ alle Restklassen mod $30030 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ durchlaufen zu lassen, dies reduziert man auf "k durchläuft alle Restklassen mod 3003".

Dies ist mit einem Computer mit wenig Programmier– und Rechenzeitaufwand möglich. In den Teilnahmebedingungen heißt es:

> Gegen die Verwendung eines Computers oder eines Taschenrechners als Hilfsmittel zur Ideenfindung bzw. Rechnungskontrolle ist nichts einzuwenden, doch müssen die für den jeweiligen Nachweis wesentlichen Schritte und Resultate ohne diese Hilfsmittel nachvollziehbar und überprüfbar sein.

Eine wesentliche Schwierigkeit bei dieser Aufgabe besteht also darin, durch geschicktes Zusammenfassen die Anzahl der betrachteten Fallunterscheidungen auf ein "nachvollzieh– und überprüfbares" Maß zu reduzieren.