BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK

Bildung & Begabung

Aufgaben und Lösungen

1. Runde 2020

Endgültige Fassung

» **KORREKTURKOMMISSION | KARL FEGERT**

» **BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK**

Kortrijker Straße 1, 53177 Bonn | Postfach 20 02 01, 53132 Bonn | Tel.: (02 28) 9 59 15-20, Fax: (02 28) 9 59 15-29
info@bundeswettbewerb-mathematik.de, www.bundeswettbewerb-mathematik.de

Stand: 20. Mai 2020

GEFÖRDERT VOM

Bundesministerium für Bildung und Forschung

STIFTERVERBAND

KULTUSMINISTER KONFERENZ

Aufgabe 1: Beweise:

Es gibt unendlich viele Quadratzahlen der Form $50^m - 50^n$, aber keine Quadratzahl der Form $2020^m + 2020^n$; dabei sind m und n positive ganze Zahlen.

1. Beweis: Für $n = 2k$ und $m = 2k + 1$ gilt

$$50^m - 50^n = 50^{2k+1} - 50^{2k} = 50^{2k} \cdot (50 - 1) = (50^k)^2 \cdot 49 = (50^k \cdot 7)^2 ,$$

dies ist tatsächlich eine Quadratzahl; und da m, n und der Term $(50^k \cdot 7)^2$ mit k streng monoton wachsen, sind diese auch alle verschieden.

Zum zweiten Teil der Aufgabe verwenden wir einen Hilfssatz über Reste, die Zahlen bei der Division durch 3 lassen (Beweis am Ende):

HS: Die Summe bzw. das Produkt zweier Zahlen hat den gleichen Dreierrest wie die Summe bzw. das Produkt der Dreierreste dieser Zahlen.

Aus dem HS folgt sofort: Der Dreierrest der Zahl 2020 ist 1, also hat jede Zahl der Form $2020^m + 2020^n$ den Dreierrest $1^m + 1^n = 2$. Dagegen hat jede Quadratzahl den gleichen Dreierrest wie $0 \cdot 0 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$ oder $2 \cdot 2 = 4$, also in jedem Fall 0 oder 1, niemals aber den Dreierrest 2.

Beweis des HS: Die Zahlen z_1 und z_2 mögen die Dreierreste r_1 bzw. r_2 haben, dann gibt es ganze Zahlen k_1 und k_2, sodass $z_1 = 3k_1 + r_1$ und $z_2 = 3k_2 + r_2$. Die Aussage des HS folgt dann sofort aus der Umformungen

$$z_1 + z_2 = 3k_1 + r_1 + 3k_2 + r_2 = 3(k_1 + k_2) + r_1 + r_2$$

$$z_1 \cdot z_2 = (3k_1 + r_1) \cdot (3k_2 + r_2) = 3(3k_1k_2 + r_1 + r_2) + r_1r_2.$$

2. Beweis (für Teil 2): Über die Aufgabenstellung hinaus zeigen wir :

HS: Sei $b = r \cdot p$ mit $r \geq 2$, p prim, $p \geq r + 3$. Dann ist $b^m + b^n \neq q^2$ für alle m,n,q (r,m,n,q positiv ganz).

Dies gilt insbesondere für die Zahl $b = 2020 = 20 \cdot 101$, da 101 prim ist und $101 \geq 20 + 3$.

Beweis des HS (durch Widerspruch): Bekanntlich ist eine Zahl genau dann Quadratzahl, wenn in ihrer Primfaktorzerlegung jeder Primfaktor geradzahlig oft vorkommt.

Sei nun $b^m + b^n = q^2$ eine Quadratzahl. Dann kann nicht $m = n$ sein, denn es ist p prim und $p \geq r + 3$, also taucht p in der Primfaktorzerlegung von r nicht auf. Also ist in $b^m + b^m = 2\,r^m p^m$ die Zahl m gerade, also kommt der Faktor 2 in $2r^m$ ungeradzahlig oft vor, was nicht sein darf.

Also ist $m \neq n$, o.B.d.A. $m > n$, dann ist $b^m + b^n = b^n(b^d + 1) = r^n p^n (r^d p^d + 1)$ mit $d := m - n \geq 1$. Weil $p \geq r + 3$ ist und prim, ist p nicht Teiler von r, also ist n gerade, also ist $r^n p^n$ Quadratzahl und somit auch $r^d p^d + 1$, also gibt es eine positive ganze Zahl z mit $r^d p^d + 1 = z^2$.

Zwei positive Quadratzahlen unterscheiden sich um mindestens 3, also ist $r^d p^d$ keine Quadratzahl, also d ungerade. Ferner ist $r^d p^d = z^2 - 1 = (z + 1)(z - 1)$ das Produkt zweier Zahlen, die sich um 2 unterscheiden. Weil $p \geq r + 3$, ist auch $p^d \geq (r + 3)^d > r^d + 3$. Also ist $p^d \neq (z + 1)$ und $r^d \neq (z + 1)$, also $z + 1 = r' \cdot p^x$ und $z - 1 = r'' \cdot p^y$ mit $x,y < d$ und $x + y = d$. Hieraus folgt $p \mid (z + 1)$, $p \mid (z - 1)$, also teilt p auch $(z+1) - (z-1) = 2$, was im Widerspruch zu $p \geq r + 3$ steht.

Bemerkung: Man kann für Teil 1 schärfer argumentieren: Es ist $50^m - 50^n = 50^n \cdot (50^{m-n} - 1)$. In diesem Produkt ist der erste Faktor gerade, der zweite Faktor ungerade. In der Primfaktorzerlegung von $50^n(50^{m-n} - 1)$ gibt es also Faktoren 2, und diese sind alle in der PFZ von 50^n enthalten. Ist also der Ausdruck eine Quadratzahl, so muss n gerade und damit auch 50^n eine Quadratzahl sein. Hieraus folgt wiederum, dass auch $(50^{m-n} - 1)$ Quadratzahl ist. Für alle $m - n > 1$ ist aber $(50^{m-n} - 1) \equiv -1 \mod 4$, jede Quadratzahl hat aber Viererrest 1 oder 0. Also sind $(m,n) = (2k+1;2k)$ die einzigen Zahlenpaare, für die $50^m - 50^n$ eine Quadratzahl ist.

Die CATALAN'sche Vermutung aus dem Jahr 1844 besagt: $x^p - y^q = 1,\ p,q \geq 2 \Rightarrow x = q = 3,\ y = p = 2$. Akzeptiert man den Beweis von PREDA MIHAILESCU aus dem Jahr 2002, kann man im zweiten Beweis die Argumentation abkürzen: Die Voraussetzung $rp \geq r + 3$, p prim benötigt man nicht mehr. Es gilt $b^d + 1 = z^2$, also $z^2 - b^d = 1$. Wäre nun $d \geq 2$, wäre $z = d = 3$ und $b = 2 \neq 2020$. Also ist $d = 1$ ($d = 0$ scheidet von vorneherein aus), also ist $b = z^2 - 1$. Das wird von $b = 2020$ nicht erfüllt.

Damit hat die diophantischen Gleichung $b^m + b^n = q^2$ folgende Lösungsklassen ($k \geq 0$, $r \geq 2$):

$b = 2$, $m = 2k + 3$ und $n = 2k$, dann ist $2^{2k+3} + 2^{2k} = 2^{2k}(2^3 + 1) = (3 \cdot 2^k)^2$

$b = 2$, $m = n = 2k + 1$, dann ist $2^{2k+1} + 2^{2k+1} = 2^{2k+2} = (2^{k+1})^2$

$b = r^2 - 1$, $m = 2k + 1$, $n = 2k$, dann ist $b^{2k+1} + b^{2k} = b^{2k}(r^2 - 1 + 1) = (b^k r)^2$.

Aufgabe 2: Konstantin zieht auf einem n x n – Schachbrett ($n \geq 3$) mit einem Springer mit möglichst wenigen Zügen vom Feld in der unteren linken Ecke auf das Feld in der unteren rechten Ecke. Danach nimmt Isabelle diesen Springer und zieht von dem Feld in der unteren linken Ecke mit möglichst wenigen Zügen auf das Feld in der oberen rechten Ecke.

Für welche n benötigen beide dafür gleich viele Züge?

Hinweise: Der Springer darf nur wie im Schachspiel üblich gezogen werden. Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu begründen.

Antwort: Der einzige Wert von n , für den beide gleich viele Züge benötigen, ist $n = 7$.

Bezeichnungen: Mit $K(n)$ und $I(n)$ sei die minimale Anzahl von Zügen bezeichnet, die Konstantin bzw. Isabelle benötigen, um ihre Zielfelder zu erreichen.

Jedem Feld des Schachbrettes ordnen wir nicht–negative ganzzahlige Koordinaten zu: Das a–te Feld von links in der b–ten Zeile von unten erhalte die Koordinaten $(a - 1;b - 1)$. Das Feld in der linken unteren Ecke ist also (0;0), das in der rechten unteren Ecke $(n - 1,0)$, das in der rechten oberen Ecke $(n - 1;n - 1)$.

Ähnlich wie bei der Beschreibung von Geometrie durch Vektoren bezeichne $(x;y)$ je nach Kontext das Feld $(x;y)$ oder den Zug um x Felder nach rechts und y Felder nach oben. Der Springer zieht stets $(\pm2;\pm1)$ oder $(\pm1;\pm2)$.

1. Beweis: Das Feld in der linken unteren Ecke bezeichnen wir mit lu, das in der rechten unteren Ecke mit ru und das in der rechten oberen Ecke mit ro.

2	1	4
3		1
0	3	2

	3		3	4		4
3		3		3	4	
2	3	2	3	4	3	4
3	2	3	2	3		3
2	1		3	2	3	
3		1	2	3		3
0	3	2	3	2	3	4

Auf einem 7x7– und einem 3x3–Schachbrett beschriften wir das Feld links unten mit 0, danach alle Felder, die wir von hier mit einem Springerzug erreichen können, mit "1", dann alle Felder, die von einem solchen Feld mit einem weiteren Zug erreicht werden können und noch nicht beschriftet sind, mit "2" usw. bis wir ru und ro erreicht haben (vgl. Bild). Damit haben wir schnell bestätigt, dass $K(7) = I(7) = 4$ und $2 = K(3) \neq I(3) = 4$. Es genügt also noch zu zeigen, dass aus $K(n) = I(n)$, $n > 3$ stets $n = 7$ folgt.

Zunächst zeigen wir, dass n ungerade sein muss: Das vom Springer besetzte Feld wechselt mit jedem Zug die Farbe, d.h. eine Zugfolge besteht genau dann aus einer geraden Anzahl von Zügen, wenn Anfangs– und Endfeld gleiche Farbe haben. Dies trifft für die Felder lu und ro stets zu, d.h. $I(n)$ ist stets gerade. Also muss auch $K(n)$ gerade sein und damit auch die Felder lu und ru gleiche Farbe haben. Dies ist genau dann der Fall, wenn n ungerade ist. Wir können deswegen n in der Form $n = 4r + j$ mit $j \in \{1,3\}$, $r \geq 1$ schreiben, nach Vorgabe von n sind dabei r und j eindeutig bestimmt.

Konstantin muss ebenso wie Isabelle von einem Feld auf dem linken Rand ein gleichfarbiges Feld auf dem rechts gegenüber liegenden Rand erreichen, Isabelle zusätzlich von einem Feld am unteren Rand ein gleichfarbiges am oben gegenüberliegenden Rand. (Dies ist eine schwächere Forderung als in der Aufgabenstellung vorgegeben).

Deshalb überlegen wir, welche Mindestzahl und welche Art von Zügen man benötigt, dies zu erreichen. Da man dabei mindestens $n - 1$ mal um ein Feld nach rechts (bzw. nach oben) voran kommen muss, und man mit jedem Zug höchstens zwei solche Schritte machen kann, benötigt man sicher mindestens $^1/_2(4r + j - 1) = 2r + {}^{(j-1)}/_2$ Züge.

Falls $j = 1$, sind dies mindestens $2r$ Züge, und $2r$ Züge sind auch ausreichend, nämlich $2r$ Züge $(2, \pm 1)$ (bzw. $(\pm1,2)$; bis auf Reihenfolge sind diese Zugfolgen die einzigen möglichen. Konstantin kann durch

Abwechseln der Züge (2, + 1) und (2, – 1) auch tatsächlich das Feld ru erreichen. Isabelle kann aber das Feld ro so nicht erreichen: Das Feld ro liegt sowohl auf dem rechts gegenüber liegenden Rand als auch auf dem oben gegenüberliegenden. Also muss Isabelle mit $2r$ Zügen (2, ± 1) zum gleichen Feld kommen wie mit $2r$ Zügen (± 1,2), d.h. Isabelle muss, weil das Schachbrett quadratisch ist, um gleich viele Felder nach rechts wie nach oben vorankommen. Dies ist nicht möglich, da man mit dieser Zugfolge $2r$ Felder nach rechts (bzw. oben), aber um höchstens r Felder nach oben (bzw. rechts) kommt. (Der Fall $r = 0$ ist ja ausgeschlossen).

Falls $j = 3$, sind dies mindestens $2r + 2$ Züge (da $2r + 1$ ungerade ist), und $2r + 2$ Züge sind auch ausreichend, nämlich für den rechten Rand die zwei Züge (1;+ 2) und (1;–2) gefolgt von $2r$ Zügen (2;±1); für den oberen Rand sind die beiden Koordinaten jeweils vertauscht. Bis auf die Reihenfolge sind diese Zugfolgen auch die einzig möglichen. Konstantin kann mit den Anfangszügen (1;+2), (1;–2) und anschließendem Abwechseln der Züge (2;+1) und (2,–1) auch tatsächlich das Feld ru erreichen, d.h. für Konstantin ist $2r + 2$ die Minimalzahl an Zügen. Isabelle muss also überlegen, ob sie mit $2r + 2$ Zügen sowohl den oberen als auch den rechten Rand erreicht. Mit zwei Zügen (1;±2) und $2r$ Zügen (2;±1) kommt sie $4r + 2$ Felder nach rechts und $2r + 4$ Felder nach oben, mit der anderen Zugfolge um $4r + 2$ Felder nach oben und $2r + 4$ Felder nach rechts. Da das Schachbrett quadratisch ist, muss also $4r + 2 = 2r + 4$ sein, es folgt $r = 1$ und hieraus $n = 4 \cdot 1 + 3 = 7$.

2. Beweis: (Abschätzung von $I(n)$ nach unten und von $K(n)$ nach oben): Wir ordnen jedem Feld $(x;y)$ die Zahl $E(x;y) := x + y$ zu; das Feld links unten hat so den E–Wert 0, das Feld rechts unten $n - 1$, das Feld rechts oben $2(n - 1)$. Da jeder Zug eines Springers von der Form (±1;±2) oder (±2;±1) ist, verändert sich der Wert E des vom Springer besetzten Feldes um ±3 oder ±1, weitere Möglichkeiten gibt es nicht. Insbesondere nimmt der E–Wert des vom Springer besetzten Feldes mit jedem Zug um höchstens 3 zu.

<u>Es gilt $I(n) \geq {}^2/_3 \cdot (n - 1)$</u>: Isabelle zieht von (0;0) nach $(n - 1;n - 1)$, dabei nimmt der E–Wert des vom Springer besetzten Feldes um $2(n - 1)$ zu, also ist $I(n) \geq {}^2/_3\,(n - 1)$.

<u>Es ist $n - 1$ gerade</u>: Der E–Wert des vom Springer besetzten Feldes nimmt mit den Zügen abwechselnd gerade und ungerade Werte an. Jede Zugfolge zwischen zwei Feldern besteht genau dann aus einer geraden Anzahl von Zügen, wenn diese beiden Felder E–Werte gleicher Parität haben. Da $E(0;0) = 0$ und $E(n - 1;n - 1) = 2(n - 1)$ beide gerade sind, besteht jede Zugfolge von Isabelle aus einer geraden Anzahl von Zügen. Es kann also $K(n) = I(n)$ kann nur dann gelten, wenn die Zugfolge von links unten nach rechts unten auch aus einer geraden Anzahl von Zügen besteht, d.h. wenn $E(n - 1;0) = n - 1$ gerade ist.

<u>Es gilt $K(n) \leq {}^1/_2(n + 1)$</u>: Wenn $n - 1 \equiv 2 \mod 4$ ist, kann Konstantin mit den beiden Züge (1;2) und (1;–2) gefolgt von ${}^1/_2(n - 3)$ Züge abwechselnd (2;1) und (2;–1) das Feld rechts unten erreichen, dies sind insgesamt $2 + {}^1/_2(n - 3) = {}^1/_2(n + 1)$ Züge. Wenn $n - 1 \equiv 0 \mod 4$, genügen sogar ${}^1/_2(n - 1)$ Züge, nämlich ${}^1/_2(n - 1)$ Züge abwechselnd (2;1) und (2;–1). Es sei noch bemerkt, dass wegen $n \geq 3$ stets ${}^1/_2(n - 3) \geq 0$ ist, d.h. die angegebene Zugfolgen sind stets wohldefiniert, und da sie nicht über die dritte Zeile führen, können sie auch auf jedem Schachbrett mit $n \geq 3$ ausgeführt werden.

Gilt also ${}^2/_3(n - 1) > {}^1/_2(n + 1)$, was äquivalent ist zu $n > 7$, so ist $I(n) > K(n)$, also $I(n) \neq K(n)$. Damit genügt es, die Fälle $n = 3, 5, 7$ zu untersuchen:

$n = 3$: Wir markieren alle Felder, die von (0;0) direkt erreicht werden können, mit "1", diejenigen Felder, die von hier direkt erreicht werden können und noch nicht anderweitig markiert sind, mit "2". Dann kann man ablesen: $K(3) = 2$, das Feld (2;2) ist nicht mit 1 oder 2 beschriftet, also ist $I(3) > 2$.

2	1	
		1
0		2

$n = 5$: Es gilt $K(5) \leq {}^1/_2(5 + 1) = 3$ und $I(5) \geq {}^2/_3(5 - 1) = 2^2/_3$. Da zusätzlich die Zugzahl gerade sein muss, gilt sogar $I(5) \geq 4$ und $K(5) \leq 2$. (Eine entsprechende Markierung der Felder eines 5x5–Schachbrettes wie beim 3x3–Schachbrett führt zum gleichen Ergebnis.)

$n = 7$: Wir markieren die Felder des 7x7–Schachbretts analog wie im Fall $n = 3$. Die Abschätzungen $I(7) \geq {}^2/_3(n - 1) = {}^2/_3(4 - 1) = 4$ und $K(7) \leq {}^1/_2(n + 1) = {}^1/_2(7 + 1) = 4$ sind also scharf, es gilt also $I(7) = K(7)$.

	3		3			4
3		3		3		
2	3	2	3		3	
3	2	3	2	3		3
2	1		3	2	3	
3		1	2	3		3
0	3	2	3	2	3	4

3. Beweis (konkrete Berechnung der jeweils minimalen Zugzahl für alle n): Wir schreiben $n = 3k + i$ mit $i \in \{-1, 0, 1\}$ und $n = 4r + j$ mit $j \in \{0, 1, 2, 3\}$; nach Vorgabe von n sind k, i, r, j eindeutig bestimmt. Wir werden unten zeigen, dass mit diesen Bezeichnungen gilt:

$I(3) = 4$, für $n > 3$: $I(n) = I(3k + i) = 2k$;

für $j \in \{1, 3\}$: $K(n) = K(4r + j) = 2r + j - 1$,

$K(4) = 5$, für $n > 4, j \in \{0, 2\}$: $K(n) = K(4r + j) = 2r + 1$,

(Bemerkung: Auf dem 4x4–Schachbrett kann man das Feld (3;0) schon mit drei Zügen erreichen, wenn man Felder außerhalb des Brettes benutzen darf, und auf dem 3x3–Schachbrett das Feld (1;1) mit zwei Zügen.)

Dann können wir schließen:

Für $n = 3$ ist $I(3) = 4 \neq 2 = K(3) = 2$.

Für $j \in \{0, 2\}$ gilt: $K(n)$ ist stets ungerade, $I(n)$ stets gerade, insbesondere $I(n) \neq K(n)$.

Für $n > 3$, $j \in \{1, 3\}$ gilt: $K(n) = I(n) \Leftrightarrow$ $3k + i = 4r + j$ (I) und $2k = 2r + j - 1$. (II)

Auflösen dieses Gleichungssystems $(2 \cdot \text{(II)} - \text{(I)}$ und Umordnen) ergibt $k = i + j - 2$. Da $n > 3$, ist $k \geq 1$, also $i + j \geq 3$, gleichzeitig ist $i + j \leq 4$. Es ist also $k = 1$ oder $k = 2$. Falls $k = 1$, erhalten wir den ausgeschlossenen Wert $n = 3 \cdot 1 - 0 = 3$. Falls $k = 2$, ist $n = 3 \cdot 2 + 1 = 7$. Probe (sie vermeidet eine Untersuchung, ob sie wirklich notwendig ist) ergibt, dass tatsächlich $I(7) = 4 = K(7)$.

Es fehlt noch der Nachweis für die Richtigkeit der Funktionsterme $I(n)$ und $K(n)$. Hierfür verwenden wir die Bezeichnungen und Zwischenergebnisse aus dem 2. Beweis:

Dass $I(3) = 4$ und $K(4) = 5$, bestätigt man durch Betrachten der endlich vielen möglichen Zugfolgen auf dem 3x3– bzw. 4x4–Schachbrett. Für andere Werte $n \geq 3$ gilt (man überzeugt sich leicht, dass diese alle nur über innere Felder des begrenzten Schachbrettes gehen):

Es gilt $I(n) \geq {}^1/_3 \cdot 2 \cdot (n-1) = {}^1/_3 \cdot 2 \cdot (3k + i - 1) = 2k + {}^2/_3(i-1) \geq 2k - {}^4/_3$; und da $I(n)$ ganzzahlig und gerade ist, gilt sogar $I(n) \geq 2k$. Andererseits gilt auch $I(n) \leq 2k$, dies zeigen wir durch Angabe einer konkreter Zugfolgen mit $2k$ Zügen:

Falls $n = 3k + 1$, genügen k Doppelzüge $[(2;1)(1;2)] = (3k\,;3k) = (n-1;n-1)$.

Falls $n = 3k + 0$ genügen 4 Züge $[(2;1)(-1;2)(2;1)(2;1)] = (5;5)$ gefolgt von $(k-2)$ Doppelzügen $[(2;1)(1;2)]$; dies führt zum Feld $(5 + 3(k-2); 5 + 3(k-2) = (3k-1;3k-1) = (n-1;n-1)$; wobei noch bemerkt sei, dass $(k-2) \geq 0$, weil $n > 3$.

Falls $n = 3k - 1$ genügen 4 Züge $[(2;1)(-1;2)(2;-1)(1;2)]$ gefolgt von $(k-2)$ Doppelzügen $[(2;1)(1;2)]$; dies führt zum Feld $(4 + 3(k-2);\ 4 + 3(k-2) = (3k-2;3k-2) = (n-1;n-1)$; wieder ist $(k-2) \geq 0$.

Da mit jedem Zug die erste Koordinate um höchstens zwei zunimmt und Konstantin auf seinem Weg diese Koordinate um $n-1$ vergrößern muss, ist $K(n) \geq {}^1/_2 \cdot (n-1) = {}^1/_2 \cdot (4r + j - 1) = 2r + {}^{(j-1)}/_2$; und da $K(n)$ ganzzahlig ist, gilt sogar $K(n) \geq 2r$ und für $j \in \{2,3\}$ sogar $K(n) \geq 2r + 1$.

Falls $j \in \{0,2\}$ ist n gerade, also $K(n)$ ungerade, sodass in diesem Fall stets $K(n) \geq 2r + 1$. Es ist aber auch $K(n) \leq 2r + 1$, denn Konstantin kann in $2r + 1$ Zügen stets das Feld $(n-1;0)$ erreichen:

Für $j = 0$, d.h. für $n = 4r + 0$, genügen $2r + 1 = 3 + 2(r-1)$ Züge: nämlich die 3 Züge $[(2;1)(2;1)(-1;-2)]$ gefolgt von $(r-1)$ Doppelzügen $[(2;1)(2;-1)]$, was tatsächlich zum Feld $(3 + 4(r-1);0) = (4r-1;\ 0) = (n-1;0)$ führt.

Für $j = 0$, also für $n = 4r + 2$, ersetzen wir in obiger Betrachtung den dritten Zug $(-1;-2)$ durch $(1;-2)$, dann führt die Folge dieser $2r + 1$ Zügen zum Feld $(4r + 1;\ 0) = (n-1;0)$.

Falls $j \in \{1,3\}$ ist n ungerade, also $K(n)$ gerade, also mindestens so groß wie die kleinste gerade Zahl, die größer oder gleich $2r + {}^{(j-1)}/_2$ ist, d.h. es ist stets $K(n) \geq 2r + j - 1$. Es ist aber auch $K(n) \leq 2r + j - 1$:

Für $j = 1$, d.h. für $n = 4r + 1$, genügen $2r + 1 - 1 = 2r$ Züge, nämlich r Doppelzüge [(2;1)(2;–1)], diese führen zum Feld $(4r;0) = (n - 1;0)$.

Für $j = 3$, also für $n = 4r + 2$, genügen $2r + 3 - 1 = 2r + 2$ Züge, nämlich zwei Züge [(1;2),(1;–2)] gefolgt von r Doppelzügen [(2;1)(2;–1)], diese führen zum Feld $(4r + 2;0) = (n - 1;0)$.

Bemerkungen: Färbt man Felder mit ungeradem E weiß, die mit geradem E schwarz, so erhält man die übliche Schachbrettfärbung.

Die Aufgabenstellung geht von einem begrenzten Schachbrett aus. Dies muss bei der Argumentation berücksichtigt werden. Es kommt vor, dass die minimale Zugzahl zum Erreichen eines Eckfeldes kleiner ist, wenn man auch Felder "außerhalb" des begrenzten Schachbretts betreten darf. Auf dem 4x4-Schachbrett kann man das Feld rechts unten dann mit drei anstatt mit fünf Zügen erreichen, auf dem 3x3–Schachbrett kann das mittlere Feld ohne diese Grenzüberschreitung überhaupt nicht erreichen.

Aufgabe 3: Die Strecke AB sei der Durchmesser eines Kreises k und E ein Punkt im Innern von k. Die Gerade AE schneide k außer in A noch im Punkt C, die Gerade BE schneide k außer in B noch im Punkt D.

Beweise: Der Wert von $\overline{AC}\cdot\overline{AE} + \overline{BD}\cdot\overline{BE}$ ist unabhängig von der Lage von E.

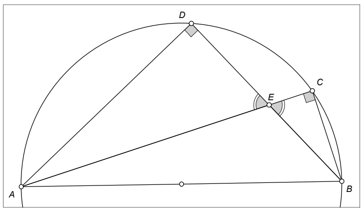
Vorbemerkung: Es gilt $\overline{AC}\cdot\overline{AE} + \overline{BD}\cdot\overline{BE} = \overline{AB}^2$.

Wenn E auf der Strecke AB liegt, dann ist $C = B$ und $D = A$ und die Aussage richtig, weil $\overline{AC}\cdot\overline{AE} + \overline{BD}\cdot\overline{BE} = \overline{AB}\cdot\overline{AE} + \overline{BA}\cdot\overline{BE} = \overline{AB}\cdot(\overline{AE} + \overline{BE}) = \overline{AB}^2$ unabhängig von der Lage von E ist. In einigen der folgenden Beweise müsste dieser Fall gesondert betrachtet werden.

Falls E auf der Kreislinie liegt, ist $E = C = D$ und wir erhalten den Satz des Pythagoras.

Die Aussage gilt weiter auch für jede Lage des Punktes E in der Zeichenebene, solange $\alpha \le 90°$ und $\beta \le 90°$. Wenn $\alpha > 90°$ oder $\beta > 90°$, gilt die Aussage in modifizierter Form, es ist dann $|\overline{AC}\cdot\overline{AE} - \overline{BD}\cdot\overline{BE}| = \overline{AB}^2$. Dis ergibt sich, wenn man Längen als Längen gerichteter Strecken deutet. Wenn z.B. $\beta > 90°$ ist, dann liegt B zwischen D und E und genau einer der beiden Werte $\overline{BD}$ und $\overline{BE}$ ist dann negativ, entsprechendes gilt für $\alpha > 90°$.

1. Beweis (Satz von Thales, ähnliche Dreiecke): Die Dreiecke BEC und AED besitzen beide einen rechten Winkel bei C bzw. D (Satz des Thales) sowie den gleichen Winkel bei E (Scheitelwinkel), sind also ähnlich und somit gilt $\overline{AE}\cdot\overline{EC} = \overline{BE}\cdot\overline{ED}$ (ersatzweise auch begründbar mit Sehnensatz). Weil E im Innern des Kreises mit Durchmesser AB liegt, liegt E im Innern der Strecken AC und BD, es gilt $\overline{AE} + \overline{EC} = \overline{AC}$ und $\overline{BE} + \overline{ED} = \overline{BD}$):



Zusammen mit dem Satz von Pythagoras in den rechtwinkligen Dreiecken ECB und ACB ergibt sich:

$$\overline{AC}\cdot\overline{AE} + \overline{BD}\cdot\overline{BE} = (\overline{AE}+\overline{EC})\cdot(\overline{AC}-\overline{EC}) + (\overline{BE}+\overline{ED})\cdot\overline{BE}$$

$$= \overline{AE}\cdot\overline{AC} - \overline{AE}\cdot\overline{EC} + \overline{EC}\cdot\overline{AC} - \overline{EC}^2 + \overline{BE}^2 + \overline{ED}\cdot\overline{BE}$$

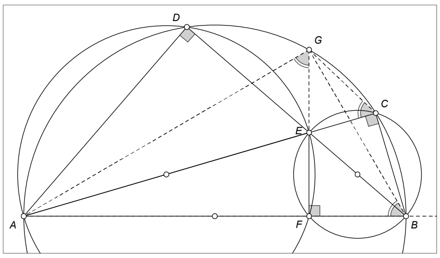
$$= (\overline{AE}\cdot\overline{AC} + \overline{EC}\cdot\overline{AC}) + (\overline{BE}^2 - \overline{EC}^2) + (-\overline{AE}\cdot\overline{EC} + \overline{BE}\cdot\overline{ED})$$

$$= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + 0 = \overline{AB}^2,$$ was offensichtlich unabhängig von der Lage von E ist.

2. Beweis (mit räumlicher Erweiterung): Das Lot auf die Zeichenebene in E schneide die Halbkugel über der Zeichenebene mit Durchmesser AB in E^*. Dann schneiden die Ebenen AE^*C, BE^*D und AE^*B diese Halbkugel in Halbkreisen mit AC bzw. BD bzw. AB als Durchmesser. Nach Satz des Thales sind also die Dreiecke AE^*C, BE^*D und AE^*B rechtwinklig bei E^*, und in den ersten beiden Dreiecken ist E Höhenfußpunkt, also gilt mit Kathetensatz und Satz von Pythagoras

$$\overline{AC}\cdot\overline{AE} + \overline{BD}\cdot\overline{BE} = \overline{AE^*}^2 + \overline{BE^*}^2 = \overline{AB}^2 = const.$$

3. Beweis (2x Sehnen–/Sekantensatz): Der Fußpunkt des Lotes von E auf die Gerade AB sei mit F bezeichnet.



Nun haben die Vierecke $AFED$ und $FBCE$ an den gegenüber liegenden Ecken F und D bzw. F und C rechte Winkel, sie sind also Sehnenvierecke. Also gilt $\overline{AC}\cdot\overline{AE} = \overline{AB}\cdot\overline{AF}$ und auch $\overline{BD}\cdot\overline{BE} = \overline{BF}\cdot\overline{BA}$; Addition ergibt (weil E im Innern des Kreises mit Durchmesser AB liegt, liegt F im Innern der Strecke AB und es gilt $\overline{AF} + \overline{BF} = \overline{AB}$) zusammen mit dem Sekantensatz:

$$\overline{AC}\cdot\overline{AE} + \overline{BD}\cdot\overline{BE} = \overline{AB}\cdot\overline{AF} + \overline{BF}\cdot\overline{BA} = \overline{AB}\cdot(\overline{AF} + \overline{BF}) = \overline{AB}^2 .$$

Bemerkung: Die Argumentation kann auch für die Lage "E auf AB" übernommen werden. Dann ist nämlich $F = E$, $A = D$ und $B = C$; auch dann liegen A, F, E und D bzw. F, B, C und E auf einem (jetzt nicht mehr eindeutig bestimmten) Kreis.

E ist der Höhenschnittpunkt im Dreieck, das durch die Geraden AB, AD und BC gebildet wird. Der Beweis und damit die Aussage ist auch gültig, wenn E außerhalb des Kreises k liegt und F im Innern der Strecke AB, d.h. wenn $\alpha < 90°$ und $\beta < 90°$; die Punkte D und C liegen dann in anderer Reihenfolge auf dem Kreis.

Variante: Sei G derjenige Schnittpunkt dieses Lotes mit dem Kreis, der in der gleichen Halbebene bez. AB liegt wie die Punkte C und D. Da E im Innern des Kreises k liegt, ist das Dreieck ABG nicht entartet und rechtwinklig bei G; die Strecke GF ist Höhe und teilt es in zwei ähnliche Dreiecke AGF und GBF auf. Nun ist $\angle AGF = \angle GBF = \angle GBA = \angle GCA$ (letzte Gleichung nach Umfangswinkelsatz). Also stimmen die Dreiecke AEG und AGC in zwei Winkeln überein, sind also ähnlich. So folgern wir $\overline{AG}:\overline{AC} = \overline{AE}:\overline{AG}$, und hieraus $\overline{AG}^2 = \overline{AC}\cdot\overline{AE}$. Analog folgt $\overline{BG}^2 = \overline{BD}\cdot\overline{BE}$, durch Addition mit Pythagoras im Dreieck AGB folgt schließlich $\overline{AC}\cdot\overline{AE} + \overline{BD}\cdot\overline{BE} = \overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 = \overline{AB}^2 = const.$

Bemerkung: Die Variante erfasst ohne weitere Ergänzung auch den Fall "E auf AB".

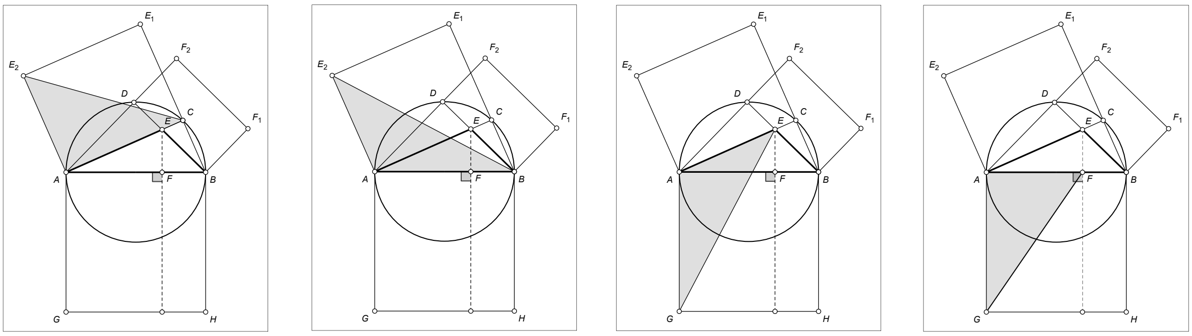
4. Beweis (Sinus–Satz): Sei $\alpha = \angle BAE$ und $\beta = \angle EBA$. Weil E im Innern des Kreises mit Durchmesser AB liegt, liegen E, C und D in der gleichen Halbebene bez. der Geraden AB und es gilt $\alpha,\beta < 90°$. Weil nach Thales $\angle ACB = \angle ADB = 90°$, ist $\overline{AC} = \overline{AB}\cdot cos(\alpha)$ und $\overline{BD} = \overline{AB}\cdot cos(\beta)$.

Weiter gilt nach Sinus–Satz $\overline{AE}:\overline{BE}:\overline{AB} = sin(\beta) : sin(\alpha) : sin(\alpha+\beta)$, also $\overline{AE} = \overline{AB}\cdot{}^{sin(\beta)}/_{sin(\alpha+\beta)}$ und $\overline{BE} = \overline{AB}\cdot{}^{sin(\alpha)}/_{sin(\alpha+\beta)}$. Dies setzen wir zusammen zu

$$\begin{aligned}\overline{AC}\cdot\overline{AE} + \overline{BD}\cdot\overline{BE} &= \overline{AB}\,cos(\alpha)\cdot\overline{AB}\frac{sin(\beta)}{sin(\alpha+\beta)} + \overline{AB}\,cos(\beta)\cdot\overline{AB}\frac{sin(\alpha)}{sin(\alpha+\beta)} \cdot \\ &= \overline{AB}^2\cdot\frac{cos(\alpha)sin(\beta)+cos(\beta)sin(\alpha)}{sin(\alpha+\beta)} = \overline{AB}^2\cdot\frac{sin(\alpha+\beta)}{sin(\alpha+\beta)} \\ &= \overline{AB}^2 \text{, dies ist unabhängig von der Lage von } E.\end{aligned}$$

Die Beweisführung ist für alle Lagen von E gültig, bei denen $\alpha,\beta < 90°$, also bei denen E, C und D in der gleichen Halbebene bez. der Geraden $\overline{AB}^2$ liegen. Wenn z.B. $\beta > 90°$, dann liegen D und E in verschiedenen Halbebenen bez. AB und es gilt $\overline{BD} = \overline{AB}\cdot cos(180° - \beta) = \overline{AB}\cdot(-cos(\beta))$.

5. Beweis (Variation des Beweises für den Satz des Pythagoras von Euklid): Mit $|X...YZ|$ sei der Flächeninhalt des Vielecks $X...YZ$ bezeichnet. Wir errichten nun über der Seite AC des Dreiecks ABC nach außen ein Rechteck ACE_1E_2 mit $\overline{AE} = \overline{AE_2}$; und über der Seite BC ein Rechteck BF_1F_2D mit $\overline{BE} = \overline{BF_1}$. Die Senkrechte zu AB durch E schneide AB in F.

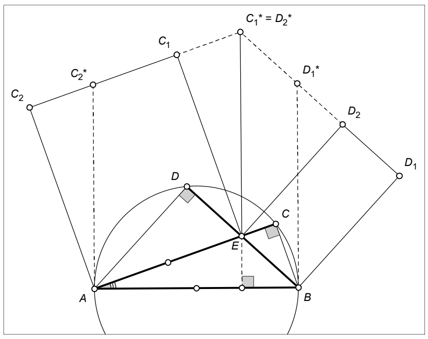


Weil $BE_1 \parallel AE_2$ und $C \in BE_1$, ist $|E_2AC| = |E_2AB|$, eine Drehung um 90° um A überführt Dreieck E_2AB in das flächengleiche Dreieck EAG, wobei $AG \perp AB$ und $\overline{AG} = \overline{AB}$; schließlich hat auch das Dreieck FAG den gleichen Flächeninhalt.

In analoger Weise überführen wir das Dreieck F_1DB in ein flächengleiches Dreieck FHB mit $BH \perp AB$ und $\overline{BH} = \overline{AB}$. Dies setzen wir zusammen zu

$$\begin{aligned}\overline{AC}\cdot\overline{AE} + \overline{BD}\cdot\overline{BE} &= 2|E_2AC| + 2|F_1DB| &&= 2|E_2AB| + 2|F_1AB| \\ &= 2|EAG| + 2|EHB| &&= 2|FAG| + 2|FHB| \\ &= |AGHB| = \overline{AB}^2 .\end{aligned}$$

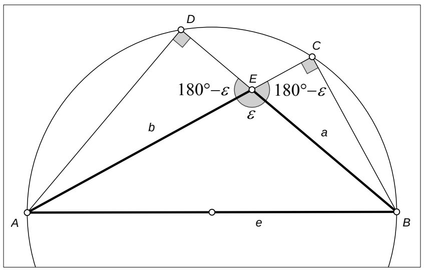
6. Beweis (Pappus): Wir errichten über der Seite AE des Dreiecks ABE nach außen ein Rechteck AEC_1C_2 mit $\overline{AC} = \overline{AC_2}$, und analog über der Seite BE ein Rechteck EBD_1D_2 mit $\overline{BD} = \overline{BD_1}$. Der Ausdruck $\overline{AC}\cdot\overline{AE} + \overline{BD}\cdot\overline{BE}$ beschreibt also den Gesamtflächeninhalt dieser beiden Rechtecke.



Der Schnittpunkt der Geraden C_1C_2 mit der Senkrechten auf AB durch E sei C_1*, der Schnittpunkt von D_1D_2 mit dieser Senkrechten sei D_2*. Nach Konstruktion ist $\overline{AC} = \overline{EC_1}$, ferner $\angle BAC = \angle C_1{}^*EC_1$ und $\angle ACB = \angle EC_1C_1{}^*$, also sind die Dreiecke ABC und $EC_1{}^*C_1$ kongruent, insbesondere $\overline{EC_1{}^*} = \overline{AB}$. Mit analoger Schlussweise leitet man her, dass auch $\overline{ED_2{}^*} = \overline{AB}$, also gilt $D_2{}^* = C_1{}^*$.

Weil $AE \parallel C_1C_2$, und $C_1{}^* \in C_1C_2$, können wir das Rechteck AEC_1C_2 einer Scherung unterwerfen, die es in ein Parallelogramm $AEC_1{}^*C_2{}^*$ überführt, der Flächeninhalt bleibt dabei konstant. Analog überführen wir das Rechteck EBD_1D_2 in ein flächengleiches Parallelogramm $EBD_1{}^*D_2{}^*$. Diese beiden Parallelogramme haben die gemeinsame Grundseite $EC_1{}^* = ED_2{}^*$ und weil $AC_2{}^* \parallel BD_1{}^* \parallel EC_1{}^* \perp AB$, haben sie die Gesamthöhe AB. Der Gesamtflächeninhalt ist also $\overline{AB}^2$, unabhängig von der Lage von E, das war zu zeigen.

7. Beweis (Äquivalenz der Aussage mit dem $\cos$–Satz im Dreieck ABE, Variation des 3. Beweises): Weil E im Innern des Kreises mit Durchmesser AB liegt, ist $\varepsilon > 90°$ und E liegt sowohl zwischen A und C als auch zwischen B und D, sodass $\overline{AC} = \overline{AE} + \overline{EC}$ und $\overline{BD} = \overline{BE} + \overline{ED}$.



Im Dreieck ABE verwenden wir die üblichen Bezeichnungen $a = \overline{BE}$, $b = \overline{AE}$ und $e = \overline{AB}$ für die Seiten und ε für den Innenwinkel bei E. Die Dreiecke EBC und AED sind bei C bzw. D rechtwinklig (Satz von Thales), beide haben bei E den Innenwinkel $180° - \varepsilon < 90°$. Somit ist

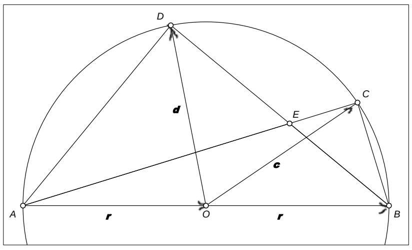
$$\cos(\varepsilon) = -\cos(180° - \varepsilon) = -\frac{\overline{EC}}{a} = -\frac{\overline{ED}}{b}.$$

Mit $\cos$–Satz im Dreieck ABE erhalten wir

$$\overline{AB}^2 = e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos(\varepsilon) = a(a + (-b\cdot\cos(\varepsilon))) + b(b + (-a\cdot\cos(\varepsilon)))$$

$$= \overline{AE}\cdot(\overline{AE} + \overline{EC}) + \overline{BE}\cdot(\overline{BE} + \overline{ED}) = \overline{AC}\cdot\overline{AE} + \overline{BD}\cdot\overline{BE}$$

tatsächlich unabhängig von der Lage von E.



8. Beweis (vektoriell): Wir wählen den Mittelpunkt der Strecke AB als Ursprung O, definieren $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OB} = \mathbf{r}$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$, $\overrightarrow{OD} = \mathbf{d}$ und normieren $|\mathbf{r}| = 1$. Da die Punkte C und D auf dem Kreis um O mit Radius r liegen, gilt auch $|\mathbf{c}| = |\mathbf{d}| = 1$,also $\mathbf{r}^2 = \mathbf{c}^2 = \mathbf{d}^2 = 1$ und $\overline{AB} = 2$. Weiter liegt E auf den Geraden AC und BD, also gibt es reelle Zahlen λ und μ, sodass $\overrightarrow{AE} = \lambda(\mathbf{c} + \mathbf{r})$ und $\overrightarrow{BE} = \mu(\mathbf{d} - \mathbf{r})$.

Dann ist $2\mathbf{r} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{BE} = \lambda(\mathbf{c} + \mathbf{r}) - \mu(\mathbf{d} - \mathbf{r})$, also $(2 - (\lambda + \mu))\mathbf{r} = \lambda\mathbf{c} - \mu\mathbf{d}$.

Weil $\angle BAE \le 90°$ und $\angle EBA \le 90°$ (dies ist für jede Lage von E innerhalb des Kreises mit Durchmesser AB erfüllt), sind die Vektoren $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AE}$ gleichgerichtet, ebenso die Vektoren $\overrightarrow{BD}$ und $\overrightarrow{BE}$, sodass $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE} = \overline{AC}\cdot\overline{AE}$ und ebenso $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BE} = \overline{BD}\cdot\overline{BE}$. Einfache Rechnung ergibt nun:

$$\overline{AC}\cdot\overline{AE} + \overline{BD}\cdot\overline{BE} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BE} = \lambda(\mathbf{c} + \mathbf{r})^2 + \mu(\mathbf{d} - \mathbf{r})^2$$

$$= \lambda\mathbf{c}^2 + 2\lambda\mathbf{cr} + \lambda\mathbf{r}^2 + \mu\mathbf{d}^2 - 2\mu\mathbf{dr} + \mu\mathbf{r}^2 = 2(\lambda + \mu) + 2\mathbf{r}(\lambda\mathbf{c} - \mu\mathbf{d})$$

$$= 2(\lambda + \mu) + 2\mathbf{r}(2 - (\lambda + \mu))\mathbf{r} = 2(\lambda + \mu) + 4\mathbf{r}^2 - 2\mathbf{r}^2(\lambda + \mu) = 4 = \overline{AB}^2,$$

dies ist unabhängig von der Lage von E.

Bemerkungen: Der letzte Beweis zeigt, dass für $\alpha \le 90°$ und $\beta \le 90°$die Aussage auch dann gilt, wenn E außerhalb des Kreises liegt. Wenn entweder $\alpha > 90°$ oder $\beta > 90°$, gilt die Aussage, wenn man die Streckenlängen als Längen gerichteter Strecken versteht. Dann liegt entweder E nicht zwischen A und C oder E nicht zwischen B und D und die Aussage wird zu

$$|\overline{AC}\cdot\overline{AE} - \overline{BD}\cdot\overline{BE}| = \overline{AB}\cdot|\overline{AF} - \overline{BF}| = \overline{AB}^2.$$

Auf dieses Ergebnis kommt man auch, wenn man im dritten Beweis zulässt, dass F außerhalb der Strecke AB liegt. Der Punkt E liegt dann z.B. nicht mehr zwischen B und D, d.h. die Strecken BD und BE sind dann verschieden gerichtet.

Die Lage von E spielt in den Beweisen an zwei Stellen eine Rolle: Bei den meisten Beweisansätzen muss der Fall "E auf AB" gesondert betrachtet werden, ebenso muss überlegt werden, ob E zwischen A und C liegt und/oder auch zwischen B und D.

Aufgabe 4: Die Folge (a_n) ist rekursiv definiert durch

$$a_1 = 0,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3 \text{ sowie } a_n = \max_{0<d<n} a_d \cdot a_{n-d} \text{ für } n \geq 4.$$

Bestimme die Primfaktorzerlegung von $a_{19702020}$?

Hinweise: Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.
Der Ausdruck $\max_{0<d<n} a_d \cdot a_{n-d}$ bezeichnet den größten Wert aller Zahlen $a_1 \cdot a_{n-1}, a_2 \cdot a_{n-2}, \ldots, a_{n-1} \cdot a_1$.

Ergebnis: Es gilt $a_{3k} = 3^k$ für alle $k \geq 1$, also $a_{19702020} = a_{3 \cdot 6567340} = 3^{6567340}$.

1. Beweis: Zunächst vereinfachen wir die Rekursionsformel. Keines der a_i ist negativ und es ist $a_1 = 0$. Somit ist sicher $0 = a_1a_{n-1} \leq a_ia_j$ für alle $2 \leq i,j \leq n-2$, und da $n \geq 4$, gibt es immer ein Indexpaar $(i,j) \neq (1,n-1)$. Also ist es unnötig, für die Bestimmung des Maximalwertes aller Produkte a_da_{n-d} das Produkt a_1a_{n-1} zu untersuchen und es genügt es, Werte d mit $2 \leq d \leq n-2$ zu betrachten. Dies kann man sogar weiter auf Werte $2 \leq d \leq {}^n/_2$ einschränken, da mit wachsendem d jedes Produkt $a_d \cdot a_{n-d}$ mit $d > {}^n/_2$ schon als Produkt $a_{d'} \cdot a_{n-d'}$ mit $d' = n-d < {}^n/_2$ untersucht wurde. Somit können wir die Rekursionsformel auch schreiben als

$$a_n = \max_{2 \leq d \leq \frac{n}{2}} a_d \cdot a_{n-d} \quad \text{für alle } n \geq 4.$$

Wir werden mit vollständiger Induktion nach n zeigen, dass $a_n = 3a_{n-3}$ für alle $n \geq 5$. Zusammen mit $a_2 = 2$, $a_3 = 3$ und $a_4 = 4 = 2^2$ folgt sofort, dass $a_{n+3k} = a_n \cdot 3^k$ für alle $k \geq 0$; also

$$a_{2+3k} = 2^1 \cdot 3^k,\ a_{3+3k} = 3 \cdot 3^k = 3^{k+1} \text{ und } a_{4+3k} = 2^2 \cdot 3^k \text{....für alle } k \geq 0,$$

und hieraus das oben angegebene Ergebnis.

* Induktionsanfang: Die Aussage ist richtig für $n \in \{5, 6, 7, 8\}$: Einfache Rechnung ergibt nämlich:

$$a_1 = 0,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3,$$

$$a_4 = \max_{2 \leq d \leq \frac{4}{2}} a_d \cdot a_{n-d} = \max\{a_2a_2\} = \max\{2 \cdot 2\} = 4,$$

$$a_5 = \max_{2 \leq d \leq \frac{5}{2}} a_d \cdot a_{5-d} = \max\{a_2a_3\} = \max\{2 \cdot 3\} = 6 = 3a_2,$$

$$a_6 = \max_{2 \leq d \leq \frac{6}{2}} a_d \cdot a_{6-d} = \max\{a_2a_4, a_3a_3\} = \max\{2 \cdot 4, 3 \cdot 3\} = 9 = 3a_3,$$

$$a_7 = \max_{2 < d < \frac{7}{2}} a_d \cdot a_{7-d} = \max\{a_2a_5, a_3a_4\} = \max\{2 \cdot 6, 3 \cdot 4\} = 12 = 3a_4,$$

$$a_8 = \max_{2 \leq d \leq \frac{8}{2}} a_d \cdot a_{8-d} = \max\{a_2a_6, a_3a_5, a_4a_4\} = \max\{2 \cdot 9, 3 \cdot 6, 4 \cdot 4\} = 18 = 3a_5.$$

* Induktionsannahme: Für ein bestimmtes $n \geq 8$ sei die Aussage richtig für alle Zahlen 5, 6, 7, ... n.

* Induktionsschluss: Dann ist die Aussage auch richtig für $n + 1$. Es gilt nämlich

$$a_{n+1} = \max_{2 \leq d \leq \frac{n+1}{2}} a_d \cdot a_{n+1-d} \overset{1)}{=} \max_{2 \leq d \leq \frac{n+1}{2}} a_d \cdot 3 \cdot a_{n+1-d-3} \overset{2)}{=} 3 \cdot \max_{2 \leq d \leq \frac{n+1}{2}} a_d \cdot a_{n-2-d} = 3a_{n-2}.$$

1) Für $n \geq 8$ ist $n + 1 - d \geq (n+1) - {}^{(n+1)}/_2 = {}^{(n+1)}/_2 \geq 4{,}5$; und da der Index ganzzahlig ist, sogar $n + 1 - d \geq 5$. Also können wir auf a_{n+1-d} die Induktionsannahme $a_{n+1-d} = 3 \cdot a_{n+1-d-3}$ anwenden.

[2)] Es würde sogar $2 \le d \le \frac{n-2}{2}$ genügen.

Zur Illustration konkret für a_9 : Es ist $a_9 = \max_{2 \le d \le \frac{9}{2}} a_d \cdot a_{9-d} = \max\{a_2a_7,\ a_3a_6,\ a_4a_5\}$

$= \max\{a_2{\cdot}3{\cdot}a_4,\ a_3{\cdot}3{\cdot}a_3,\ a_4{\cdot}3{\cdot}a_2,\} = 3 \cdot \max\{\ a_2a_4,\ a_3a_3,\ a_4a_2\} = 3a_6.$

2. Beweis: Wir werden zeigen, dass für alle $n \ge 2$ stets $a_n = a_{3m-j} = 2^j \cdot 3^{m-j}$ ($n \ge 2$, $j \in \{0, 1, 2\}$, das Paar (m,j) ist nach Vorgabe von n eindeutig bestimmt). Insbesondere ist dann

$a_{19702020} = a_{3 \cdot 6567340 - 0} = 3^{6567340}$.

Zunächst stellen wir fest, dass keines der a_i negativ ist, ferner ist $a_1 = 0$. Somit ist sicher $0 = a_1a_{n-1} \le a_ia_j$ für alle $2 \le i,j \le n–2$, und da $n \ge 4$, gibt es immer ein Indexpaar $(i,j) \neq (1,n–1)$, also ist es unnötig, für die Bestimmung des Maximalwertes aller Produkte a_da_{n-d} das Produkt a_1a_{n-1} zu untersuchen. Somit können wir die Rekursionsformel der Folge (a_n) einfacher schreiben als

$$a_n = \max_{2 \le d \le n-2} a_d \cdot a_{n-d} \quad \text{für alle } n \ge 4.$$

Nun betrachten wir die Folge (b_n), $n = 1, 2, 3, \ldots$ mit $b_{3m-j} = 2^j \cdot 3^{m-j}$, $j \in \{0, 1, 2\}$, $m = 1, 2, 3, \ldots$. Jedes Glied dieser Folge ist eindeutig definiert. Weiter gilt $a_2 = 2 = 2^1 \cdot 3^{1-1} = b_{3 \cdot 1 - 1} = b_2$ und $a_3 = 3 = 2^0 \cdot 3^1 = b_{3 \cdot 1 - 0} = b_3$. Um nachzuweisen, dass $a_n = b_n$ für alle $n \ge 2$, genügt es also, noch zu zeigen, dass beide Folgen die gleiche Rekursionsformel für $n \ge 4$ besitzen, d.h. dass

$$b_n = \max_{2 \le d \le n-2} b_d \cdot b_{n-d} \quad \text{für alle } n \ge 4.$$

Hierzu vereinfachen wir das Produkt $b_d \cdot b_{n-d}$ für alle n und $2 \le d \le n-2$, wobei wir die Fälle $m \equiv 0, 1, 2 \mod 3$ unterscheiden und in diesen Fällen die Unterfälle $d \equiv 0, 1, 2 \mod 3$.

Fall 1: $n = 3m$, ($m \ge 2$, wegen $n \ge 4$ muss $m < 2$ nicht untersucht werden):

$d = 3k$: $b_d \cdot b_{n-d} = b_{3k-0} \cdot b_{3(m-k)-0} = 2^0 \cdot 3^k \cdot 2^0 \cdot 3^{m-k} = 2^0 \cdot 3^m$,

$d = 3k + 1$: $b_d \cdot b_{n-d} = b_{3(k+1)-2} \cdot b_{3m-(3k+1)} = 2^2 \cdot 3^{k-1} \cdot 2^1 \cdot 3^{m-k-1} = 2^3 \cdot 3^{m-2}$,

$d = 3k + 2$: $b_d \cdot b_{n-d} = b_{3(k+1)-1} \cdot b_{3m-(3k+2)} = 2^1 \cdot 3^{k+1-1} \cdot 2^2 \cdot 3^{m-k-2} = 2^3 \cdot 3^{m-2}$,

Es ist stets $2^3 \cdot 3^{m-2} = 8 \cdot 3^{m-2} < 9 \cdot 3^{m-2} = 2^0 \cdot 3^m$, und der Unterfall $d = 3k$ kommt für jeden Index $n \ge 4$ vor (nämlich mindestens für $k = 1$), also gilt

$$b_{3m} = \max_{2 \le d \le 3m-2} b_d \cdot b_{3m-d} = 2^0 \cdot 3^m = b_{3m-0}.$$

Fall 2: $n = 3m + 1$ mit $m \ge 1$, also $n = 3(m + 1) - 2$:

$d = 3k$: $b_d \cdot b_{n-d} = b_{3k-0} \cdot b_{3(m+1)-2-3k} = 2^0 \cdot 3^k \cdot 2^2 \cdot 3^{m+1-k-2} = 2^2 \cdot 3^{m-1}$,

$d = 3k + 1$: $b_d \cdot b_{n-d} = b_{3(k+1)-2} \cdot b_{3(m+1)-2-(3k+1)} = 2^2 \cdot 3^{k-1} \cdot 2^0 \cdot 3^{m-k} = 2^2 \cdot 3^{m-1}$,

$d = 3k + 2$: $b_d \cdot b_{n-d} = b_{3(k+1)-1} \cdot b_{3(m+1)-2-(3k+2)} = 2^1 \cdot 3^{k+1-1} \cdot 2^1 \cdot 3^{m-k-1} = 2^2 \cdot 3^{m-1}$,

also gilt $b_{3m+1} = \max_{2 \le d \le 3(m+1)-2-2} b_d \cdot b_{3m+1-d} = 2^2 \cdot 3^{m-1} = b_{3(m+1)-2}$.

Fall 3: $n = 3m + 2$ mit $m \ge 1$, also $n = 3(m + 1) - 1$:

$d = 3k$: $b_d \cdot b_{n-d} = b_{3k-0} \cdot b_{3(m+1)-1-3k} = 2^0 \cdot 3^k \cdot 2^1 \cdot 3^{m-k+1-1} = 2^1 \cdot 3^m$,

$d = 3k + 1$: $b_d \cdot b_{n-d} = b_{3(k+1)-2} \cdot b_{3(m+1)-1-(3k+1)} = 2^2 \cdot 3^{k-1} \cdot 2^2 \cdot 3^{m-k-1} = 2^4 \cdot 3^{m-2}$,

$d = 3k + 2$: $b_d \cdot b_{n-d} = b_{3(k+1)-1} \cdot b_{3(m+1)-1-(3k+2)} = 2^1 \cdot 3^{k+1-1} \cdot 2^0 \cdot 3^{m-k} = 2^1 \cdot 3^m$,

Es ist stets $2^4 \cdot 3^{m-2} = 2^3 \cdot 2^1 \cdot 3^{m-2} < 3^2 \cdot 2^1 \cdot 3^{m-2} = 2^1 \cdot 3^m$,
und der Unterfall $d = 3k + 2$ kommt für jeden Index $n \ge 4$ vor (z.B. für $k = 0$), also gilt

$$b_{3m+2} = \max_{2 \le d \le 3m+2-2} b_d \cdot b_{3m-d} = 2^1 \cdot 3^m = b_{3(m+1)-1}, \text{ das war zu zeigen.}$$

3. Beweis: Wir schätzen a_n nach unten ab: Nach Konstruktionsvorschrift ist sicher $a_n \geq a_d a_{n-d}$ für alle $0 < d < n$, also $a_n \geq a_3 a_{n-3} \geq a_3^2 a_{n-6} \geq \ldots \geq a_3^k a_{n-3k}$. Für $k = {}^1/_3 \cdot (19\,702\,020 - 3) = 6\,567\,339$ erhält man so $a_{19\,702\,020} \geq a_3^{6\,567\,339} \cdot a_3 = 3^{6\,567\,340}$.

Nun schätzen wir a_n nach oben ab: Da $a_1 = 0$, aber $a_2 = 2 > 0$ und $a_3 = 3 > 0$, kann jedes a_n mit $n \geq 2$ geschrieben werden in der Form $a_n = 2^{x(n)} \cdot 3^{y(n)}$ für geeignete $x(n), y(n) \geq 0$. Für diese beiden Exponenten gilt schärfer: $2x(n) + 3y(n) = n$, was wir mit vollständiger Induktion schnell zeigen: Die Aussage ist richtig für $i = 2$ und $i = 3$. Und wenn sie richtig ist für alle $2 \leq i < n - 1$ mit $n \geq 4$, dann gilt $a_n = a_d a_{n-d} = 2^{x(d)} \cdot 3^{y(d)} \cdot 2^{x(n-d)} \cdot 3^{y(n-d)}$ für ein geeignetes $2 \leq d \leq n - 2$. Also gilt mit geeigneter Wahl von d und nach Induktionsvoraussetzung $2x(n) + 3y(n) = 2[x(d) + x(n-d)] + 3[y(d) + 3y(n-d)] = d + (n-d) = n$.

Ferner gilt $2^x \cdot 3^y = {}^8/_9\ 2^{(x-3)} \cdot 3^{(y+2)} < 2^{(x-3)} \cdot 3^{(y+2)}$, gleichzeitig ist $2x + 3y = 2(x-3) + 3(y+2)$. Der Ausdruck $2^x \cdot 3^y$ nimmt also unter der Nebenbedingung $x, y \geq 0$, $2x + 3y = n$ seinen maximalen Wert an, wenn $x \in \{0, 1, 2\}$. Wenn n durch drei teilbar ist, ist dies für $y = {}^n/_3$ und $x = 0$ der Fall. Für $n = 19\,702\,020 = 3 \cdot 6\,567\,340$ gilt also $a_n \leq 2^0 \cdot 3^{6\,567\,340}$. Dies ist der gleiche Wert, durch den a_n nach oben abgeschätzt wird, also gilt Gleichheit.

Bemerkung: Mit den Argumenten des 3. Beweises können wir die explizite Formel

$$a_n = a_{3m-j} = 2^j \cdot 3^{m-j} \quad (n \geq 2,\ j \in \{0, 1, 2\})$$

aus dem 2. Beweis ebenfalls herleiten. Für $j = 0$ liest sich die Abschätzung nach unten $a_{3m} \geq a_3^{m-1} a_3^1 = 3^m$, für $j = 1$ erhalten wir $a_{3m-1} \geq a_3^{m-1} a_2^1 = 2^1 \cdot 3^{m-1}$, für $j = 2$ erhalten wir nach Berechnung von $a_4 = 2^2$ (da $a_1 = 0$, verwenden wir die schärfere Abschätzung mit a_4) mit $m \geq 2$ schließlich $a_{3m-2} \geq a_3^{m-2} a_4^2 = 2^2 \cdot 3^{m-2}$. Mit dem Nachweis, dass diese Abschätzungen nach unten zum gleichen Wert führen wie die Abschätzungen nach oben, sind wir fertig.

Setzt man $a_1 = {}^4/_3$ und lässt alle anderen Bedingungen unverändert, so erhält man für $n \geq 2$ die gleiche Folge. Dann gilt die Beziehung $a_n = 3a_{n-3}$ schon für $n \geq 4$, und im 2. Beweis gilt auch $b_1 = a_1$, sodass der Induktionsanfang nur für $n \leq 4$ gezeigt werden muss.

Statistik zur 1. Runde 2020

Stufe = Klassenstufe am 1. März 2020, Disqualifiziert: 5
Anzahl der Teilnehmerinnen in Klammern

Bundeslanc		Stufe ≤ 8		Stufe 9		Stufe 10		Stufe 11		Stufe 12		Stufe 13		Gesamt	
Baden-Württemberg	Teilnehmer(innen)	21	(9)	13	(4)	47	(18)	57	(11)	61	(14)	10	(3)	209	(59)
	1. Preis					4	(1)	5		10				19	(1)
	2. Preis					3	(1)	4		6	(1)			13	(2)
	3. Preis	1		5	(1)	7	(1)	11	(1)	10	(3)	1		35	(6)
	Anerkennung	10	(5)	4	(2)	28	(12)	23	(7)	28	(7)	5	(1)	98	(34)
Bayern	Teilnehmer(innen)	30	(11)	27	(7)	48	(18)	111	(28)	44	(10)	4	(1)	264	(75)
	1. Preis	1	(1)	4		7		19	(3)	5	(2)			36	(6)
	2. Preis			1		4	(1)	8	(3)	10	(2)			23	(6)
	3. Preis	2		7	(1)	6	(1)	31	(11)	7	(1)			53	(14)
	Anerkennung	13	(3)	6	(2)	20	(9)	40	(5)	20	(5)	1		100	(24)
Berlin	Teilnehmer(innen)	4	(1)	13	(4)	15	(1)	15	(1)	16	(5)	3		66	(12)
	1. Preis			1		5	(1)	7		6	(1)	1		20	(2)
	2. Preis	1		1	(1)	2		3		2				9	(1)
	3. Preis	1		5	(2)	2		3		1				12	(2)
	Anerkennung			5		6		2	(1)	7	(4)	2		22	(5)
Brandenburg	Teilnehmer(innen)	4	(2)	2		18	(6)	13	(4)	9	(3)			46	(15)
	1. Preis					1		2		3	(1)			6	(1)
	2. Preis					1				2	(1)			3	(1)
	3. Preis			1		6		4	(2)	2	(1)			13	(3)
	Anerkennung			1		3	(2)	2	(1)	1				7	(3)
Bremen	Teilnehmer(innen)	1	(1)			2		1		2				6	(1)
	1. Preis									1				1	
	2. Preis														
	3. Preis					2								2	
	Anerkennung							1						1	
Hamburg	Teilnehmer(innen)	1		5	(1)	3		4	(2)	7	(2)	1		21	(5)
	1. Preis			1				1		3				5	
	2. Preis							1	(1)	1	(1)			2	(2)
	3. Preis			1		2				2	(1)	1		6	(1)
	Anerkennung	1		1						1				3	
Hessen	Teilnehmer(innen)	3		15	(3)	17	(10)	35	(5)	24	(6)	2		96	(24)
	1. Preis			5		2		10	(1)	3				20	(1)
	2. Preis			2		1								3	
	3. Preis			1		2	(1)	3		5		1		12	(1)
	Anerkennung			3		5	(5)	15	(2)	12	(5)	1		36	(12)
Mecklenburg-Vorpommern	Teilnehmer(innen)					2	(1)	3	(1)	1				6	(2)
	1. Preis														
	2. Preis					1	(1)							1	(1)
	3. Preis									1				1	
	Anerkennung														
Niedersachsen	Teilnehmer(innen)	3	(1)	8	(3)	8	(2)	7		23	(4)			49	(10)
	1. Preis			2						4				6	
	2. Preis			1				2		1				4	
	3. Preis					3		1		3				7	
	Anerkennung	2		2	(1)	3		3		10	(3)			20	(4)
Nordrhein-Westfalen	Teilnehmer(innen)	10	(5)	29	(12)	41	(13)	59	(9)	52	(10)	5		196	(49)
	1. Preis			3	(1)	2		8	(2)	11				24	(3)
	2. Preis	1	(1)	3	(2)	3		5		4				16	(3)
	3. Preis			10	(6)	12	(2)	13	(3)	14	(7)	1		50	(18)
	Anerkennung	6	(2)	6	(1)	15	(7)	15	(2)	18	(2)	4		64	(14)
Rheinland-Pfalz	Teilnehmer(innen)	3		3		11	(2)	16	(4)	18	(4)	5		56	(10)
	1. Preis	1						1		5		1		8	
	2. Preis									3	(1)	1		4	(1)
	3. Preis	1				2	(1)			5	(1)	1		9	(2)
	Anerkennung	1				4	(1)	9	(3)	4	(2)	2		20	(6)
Saarland	Teilnehmer(innen)					5	(2)			1				6	(2)
	1. Preis					2	(1)							2	(1)
	2. Preis														
	3. Preis					1								1	
	Anerkennung									1				1	
Sachsen	Teilnehmer(innen)	1	(1)	8	(1)	22	(8)	16	(6)	8	(2)			55	(18)
	1. Preis			3		1	(1)	4	(1)	4				12	(2)
	2. Preis					1		1						2	
	3. Preis	1	(1)	1	(1)	1		2	(2)	1	(1)			6	(5)
	Anerkennung			2		4	(1)	5	(1)	1				12	(2)
Sachsen-Anhalt	Teilnehmer(innen)			6	(3)	14	(5)	11	(3)	2	(2)			33	(13)
	1. Preis			3	(1)	2	(1)	3	(2)					8	(4)
	2. Preis									1	(1)			1	(1)
	3. Preis					2								2	
	Anerkennung					6	(2)	7	(1)					13	(3)
Schleswig-Holstein	Teilnehmer(innen)	2	(1)	7	(2)	7	(3)	3	(3)	4	(2)	1	(1)	24	(12)
	1. Preis									1	(1)	1	(1)	2	(2)
	2. Preis														
	3. Preis			1	(1)			2	(2)	2				5	(3)
	Anerkennung			2		4		1	(1)					7	(1)
Thüringen	Teilnehmer(innen)	3	(2)	9	(6)	10	(2)	9	(2)	8	(3)			39	(15)
	1. Preis					3		1		3	(1)			7	(1)
	2. Preis	1				1		4		2	(1)			8	(1)
	3. Preis			3	(2)	2	(1)			1				6	(3)
	Anerkennung	2	(2)	1	(1)	1		4	(2)	2	(1)			10	(6)
Ausland	Teilnehmer(innen)	1	(1)			2		3	(2)					6	(3)
	1. Preis							3	(2)					3	(2)
	2. Preis					1								1	
	3. Preis														
	Anerkennung	1	(1)											1	(1)
Gesamt	Teilnehmer(innen)	87	(35)	145	(46)	272	(91)	363	(81)	280	(67)	31	(5)	1178	(325)
	1. Preis	2	(1)	22	(2)	29	(5)	64	(11)	59	(6)	3	(1)	179	(26)
	2. Preis	3	(1)	8	(3)	18	(3)	28	(4)	32	(8)	1		90	(19)
	3. Preis	6	(1)	35	(14)	50	(7)	70	(21)	54	(15)	5		220	(58)
	Anerkennung	36	(13)	33	(7)	99	(39)	127	(26)	105	(29)	15	(1)	415	(115)
	kein Preis	40	(19)	47	(20)	76	(37)	74	(19)	30	(9)	7	(3)	274	(107)